대한수학교육학회지 <학교수학> 제 7 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.7, No.4, 391-402. Dec 2005

도형의 무게중심과 관련된 오개념 및 논리적 문제

홍 갑 주*

도형의 무게중심에 대한 일반적인 고찰은 삼각형의 무게중심에 대한 오개념을 올바르게 이해하게 해 주며, 일반화와 특수화, 해의 존재성과 유일성, 실세계의 수학적 모델링, 공리적 방법론 등과 관련하여 교육적으로 유익한 논의를 유발시킨다는 점에서 가치가 있다. 본 연구는 무게중심에 대한 오개념의 파악과 해소를 위한 수학적 분석을 제시했으며, 다각형의 무게중심을 구하는 학생들의 잘못된 전략을 분석하여 교육적인 시사점을 얻었다. 또한, 다각형 무게중심의 탐구과정에서 제기될 수 있는 논리적 문제를 밝히고 해결하였다.

Ⅰ. 서 론

학교수학에서 세 중선의 교점으로 정의되는 삼각형의 무게중심은, 삼각형 모양의 물체가 그 점을 받침점으로 할 때 평형을 이룬다는 점에서 물리적인 의미 또한 가진다(강행고 외, 2002).

어떤 학생과 교사들은 삼각형이 그 무게중심 위에서 실제로 평형을 이루는 이유를 무게중심은 넓이를 이등분하는 직선의 교점이라는 오개념에 근거하여 잘못 설명하는데, 이는 주로 중선의 의미에 대한 잘못된 해석과 관련되어 있다. 물체의 평형은 삼각형에 대해 한정된 개념이 아니므로, 중선의 의미는 물체의 평형과 관계된 일반적인 물리적 성질의 고려 하에 올바르게 이해될 수 있다.

또한, 다각형 무게중심에 대한 수학적 탐구는 일반화와 특수화, 해의 존재성과 유일성, 실세계의 수학적 모델링 등과 관련된 많은 수학적 논의를 유발시킨다는 점에서 교육적 가치가 있을 것으로 보인다.

본 연구는 도형의 무게중심에 대한 분석적인 논의로, 삼각형 무게중심에 대한 오개념의 명확한 파악과 해소를 위한 수학적 분석을 제시하고, 다각형 무게중심의 수학적 탐구과정에서 제기될 수 있는 논리적 문제를 밝히고 해결하는데 그 목적이 있다. 이를 위해, 먼저 삼각형 중선의 수학적 성질을 물체의 평형과 관련된 일반적인 물리법칙에 비추어 해석한다. 또, 다각형의 무게중심을 구하기 위한 학생들의 전략을 검증하고, 그 검증 방법 자체의 유효성에 대한 문제를 제기하고 논한다. 마지막으로, 무게중심 작도법의 논리적 기반에 대한 의문을 제기하고 아르키메데스의 공리적 방법에 비추어 그 답을 제시한다. 부록에는 이 논의와 관련된 수학적인 사실들의 증명을 제시한다.

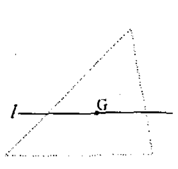
* 서울대학교 대학원(gapdol@empal.com)

II. 삼각형의 무게중심과 오개념

1. 삼각형 중선의 의미

삼각형이 세 중선의 교점 위에서 평형을 이루는 이유에 대해, 교실수업에서는 흔히 중선 양쪽 영역의 넓이에 착안한 설명이 이루어진다. 즉, 삼각형의 중선은 그 삼각형의 넓이를 이등분하므로, 중선 양쪽의 무게는 같고 삼각형은 그 위에서 평형을 이룬다. 그런데, 세 중선 각각에 대해 이러한 사실이 성립하므로, 삼각형은 세 중선의 교점 위에서 평형을 이룬다는 것이다.

삼각형의 넓이를 이등분한다는 것은 중선이 가진 중요한 기하학적 성질이며, 무게가 넓이에 비례한다는 것도 옳다. 무게를 '아래로 누르는 힘'으로 받아들일 때 이 설명은 매우 그럴듯해 보인다. 그러나 중선이 삼각형의 넓이를 이등분하는 것이 중선 위에서 삼각형이 평형을 이루는 원인은 아니다. 무게중심은 넓이를 이등분하는 직선의 교점이라는 것은 일종의 오개념이다. 그림 [II-1]의 직선 l과 같이 삼각형의 한 변에 평행하면서 무게중심을 지나는 직선의 예를 통해 이 사실을 알 수 있다. l은 삼각형의 넓이를 4:5로 분할하지만, 그 위에서 삼각형은 평형을 이룬다.[1] 따라서 l에 평행하고 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선은 삼각형의 무게중심을 지나지 않는다.



[그림 II-1]

물체의 평형은 실세계의 물리적 현상이며, 또한 삼각형에 한정된 개념이 아니므로, 삼각형의 중선이 가지는 진정한 의미는 물체의 평형과 관계된 일반적인 물리법칙을 통해 해석되어야 한다. 그것은 '지레의 법칙'이다. 받침점에서 떨어져 매달린 물체가 만드는 힘, 회전력의 크기는 단지 그 물체의 질량에 비례하는 것이 아니라, 받침점부터의 거리와 질량의 곱에 비례한다. 지레의 법칙은 받침점 양쪽에 매달린 물체가 만드는 회전력의 크기가 일치할 때 지레가 평형을 이룬다는 것이다(Hecht, 1996: 203- 204).

다각형을 포함한 일반적인 도형의 무게중심은 자신의 양쪽 영역이 만드는 회전력의 크기를 일치시키는 두 직선의 교점으로 결정되며, 이때 회전력의 크기는 그 영역 위에서의 정적분을 통해 구한다(Finney, 2001: 987-992). 삼각형의 평형에 대해, 중선의 의미는 여기서 선택된 두 직선의 방향과 상관없이 무게중심이 유일하게 결정된다는 사실(부록 2)로부터 드러난다. 즉, 모든 방향에 대해, 자신의 양쪽 영역이 만드는 회전력의 크기를 일치하게 만드는 직선이 존재하며, 이 직선들은 한 점에서 만난다. 중선은 바로 이 직선들 중 하나이다.

중선은 작도가 용이하므로, 물리적인 의미의 삼각형 무게중심을 찾는데 중선을 이용하면 편리하다. 그러나 이때, 세 중선의 작도는 무게중심의 위치를 찾는 편리한 수학적 방법일 뿐이며, 중선의 의미는 그 물리적인 의미를 통해 해석되어야 한다.

2. 교과서에 대한 제언

일반적으로, <수학 8-나> 교과서에는 종이

1) 무게중심 위에서 이미 평형을 이루고 있는 도형이 그 점을 지나며 지면에 나란한 직선을 도형 아래에 추가로 받친다고 해서 한 쪽으로 기울어질 리는 없기 때문이다. 또한 이 예로부터, 넓이를 이등분하는 직선들이 한 점에서 만난다는 것조차 사실이 아님을 알 수 있다. 사실, 삼각형의 넓이를 이등분하면서 무게중심을 지나는 직선은 세 중선 밖에 없음을 증명할 수 있다(부록 1).

삼각형이 세 중선의 교점 위에서 평형을 이룬다는 사실을 관찰하는 실험활동이 제시된다. 그러나 그 활동에서 중선 이외의 직선은 고려하지 않는다(강행고 외, 2002: 108; 이준열 외, 2003: 124-125; 최용준, 2002: 108). 무게중심은 넓이를 이등분하는 직선의 교점이라는 오개념이 있는 학생이 삼각형의 무게중심을 구하는 과정에서 오직 중선만 고려하게 된다면, 그 오개념은 더욱 고착화 될 수 있을 것이다. 앞 절에서 살펴본 바와 같이, 중선이 아니면서 무게중심을 지나는 직선에 대한 고찰을 통해, 학생들에게 스스로의 오개념을 인식하고 무게중심의 올바른 성질에 대한 의문을 갖는 계기를 마련해 줄 필요가 있다.

또한, 어떤 교과서는 종이 삼각형의 중선 아래에 연필을 받히면 그 삼각형은 평형을 이룬다는 사실을 관찰하여 삼각형의 넓이는 중선에 의해 이등분된다는 사실을 추론하도록 유도한다(이준열 외, 2003: 124-125). 그러나 평형을 이루는 모든 직선이 삼각형의 넓이를 이등분하는 것은 아니므로 이러한 추론은 잘못된 것이며, 정정되어야 할 부분이다.

3. 대칭의 원리에 의한 삼각형 무게중심의 설명

삼각형 무게중심의 위치는 지레의 법칙을 언급하지 않고, 다음과 같이 설명할 수 있다(Serra, 2003: 184).

> 기다란 막대는 그 중심을 받침점으로 할 때 평형을 이룬다. 삼각형을 한 변에 평행한 막대가 모여 이루어진 것으로 볼 때, 그 삼각형은 막대들의 중심을 연결하는 직선 위에서 평형을 이룰 것이다. 이러한 직선은 다름 아닌 삼각형의 중선이며, 같은 원리가 삼각형의 다른 변에 대해서도 성립하므로, 무게중심은 세 중선의 교점이다.

이 논법이 가진 강한 설득력은 대칭에 대한 사람의 직관에서 비롯되는 것으로 보인다. 좌우 대칭인 막대가 그 중심에서 받침점 위에 놓일 때 평형한 상태, 즉 기울어짐이란 현상에 있어서 대칭적인 상태를 이루게 될 것임은 자명하게 여겨진다. 더욱이, 삼각형 무게중심의 유일성 또한 이 논법을 응용하여 설명할 수 있다는 점에서(부록3), 이 논법은 삼각형의 무게중심에 대해 수학적으로 완전한 설명을 해 준다. 이 논법은 직관적으로 자명한 원리를 통해 무게중심에 대해 충분히 정확한 설명을 하고 있으므로, 학교수학에서 물리적인 의미의 삼각형 무게중심 위치를 설명하기 위한 좋은 대안이 될 것으로 생각된다.

그러나 한편, 이 논법에서 쓰인 대칭의 원리에 대해 고찰할 때 무게중심 탐구의 논리적 기반에 대한 어떤 의문이 제기된다. 4장에서 이에 대해 논의한다.

III. 다각형의 무게중심을 구하는 전략

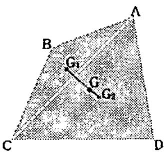
이 장에서는 다각형의 무게중심을 구하기 위한 학생들의 전략을 설문하고, 그 분석을 통해 교육적인 시사점을 얻고자 한다. 이를 위해 먼저 일반적인 다각형의 무게중심 위치를 결정하는 올바른 방법을 모색한다.

1. 다각형의 무게중심을 구하는 일반적인 방법

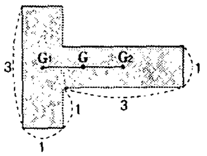
원, 혹은 평행사변형과 같은 도형에 대해서는 대칭성에 의해 직관적으로 그 무게중심을 찾을 수 있다. 본 연구의 설문에서 학생들에게 제시하고자 하는 다각형은 이러한 직관을 사

용할 수 없는, 일반적인 사각형(그림 III-1)과 T자형 다각형(그림 III-2)이다. 이 다각형들의 무게중심을 찾기 위해서는 무게중심에 대한 기존 지식에 근거한 수학적 탐구가 필요하게 된다.

일반적인 도형의 무게중심을 구하기 위해서는 정적분이 필요하지만, 다각형의 무게중심은 그 다각형을 삼각형이나 평행사변형으로 분해하고, 분해된 각 조각의 무게중심을 점질량으로 간주하여 지레의 법칙을 적용하는, 초등적인 방법으로 구할 수 있다(정상권, 최영기, 최홍원, 홍갑주, 2004: 113-119). 이 방법에 의하면 설문에 사용할 두 다각형의 무게중심은 다음과 같이 결정된다.



[그림 III-1] G는 선분 G_1G_2를 (CDA의 넓이) : (ABC의 넓이) 로 내분하는 점이다



[그림 III-2] G는 선분 G_1G_2를 1: 1 로 내분하는 점이다

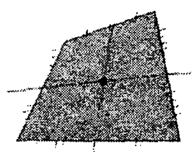
그러나 이 방법은 일반적으로 구체적인 치수가 주어진 다각형에 대해 적용되는 것이다. 삼각형에서처럼, 다각형에 대해서도 그 무게중심을 구하는 작도법이 존재한다면 구체적인 치수가 주어지지 않은 경우에도 그 무게중심을 구할 수 있게 된다.

실제로, 그러한 작도법이 존재한다(Shilgalis & Benson, 2001). [그림 III-1]에 대해서, 사각형 ABCD는 대각선 AC 뿐 아니라 BD에 의해서도 두 삼각형으로 분할된다. 대각선 BD에 의한 두 삼각형 ABD와 BCD의 무게중심을 각각 G_3, G_4라고 할 때, 이 사각형의 무게중심은 선분 G_1G_2와 G_3G_4의 교점으로 구한다. 이 방법은 일반적인 다각형에 대해서도 사용할 수 있다. n각형은 2가지 이상의 방법으로 $n-1$각형과 삼각형으로 분할되므로, 그 무게중심은 귀납적으로 결정된다.

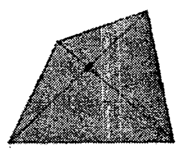
2. 대표적인 세 전략과 그 검증

2005년 5월, 모 교육대학의 교양수학 강의를 듣는 1학년 학생들을 대상으로 [그림 III-1], [그림 III-2]의 두 다각형에 대해 무게중심을 표기하고, 그 위치를 어떻게 구했는지 쓰게 하였다. 대부분의 학생들은 잘못된 전략을 제시하였다. 이 중 대표적인 세 전략을 다음과 같이 '중선 전략', '넓이 이등분 전략', '산술평균 전략'으로 정리하였다.

중선 전략은, [그림 III-3]과 같이 사각형의 마주보는 변의 중점을 연결한 두 선분의 교점을 구하거나, [그림 III-4]와 같이 사각형의 마주보는 꼭지점끼리 연결한 두 선분의 교점을 구한 경우이다. 여기서 선택된 선분들은 삼각형 중선의 한 끝점이 갖고 있는 성질을 양 끝점 모두 갖고 있다.

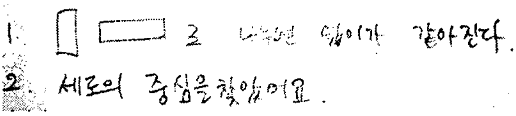


[그림 III-3] 중선 전략 1



[그림 III-4] 중선 전략 2

넓이 이등분 전략은, 사각형에 대해 넓이를 이등분하는 두 직선을 어림하여 그린 후 그 교점을 구하거나, T자형 다각형에 대해 수직과 수평 방향으로 넓이를 이등분하는 두 직선을 그린 후 그 교점을 구한 경우이다. 이 전략은 삼각형의 중선을 '넓이를 이등분하는 직선'으로 잘못 해석하는 오개념의 연장선상에 있는 것으로 볼 수 있다.



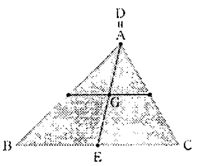
[그림 Ⅲ-5] 넓이 이등분 전략을 사용한 어떤 학생의 설명

산술평균 전략은, 사각형에 대해 꼭지점 좌표의 산술평균을 구한 경우이다. 이 전략은 삼각형 무게중심 좌표의 대수적 형태를 확장한 것으로 볼 수 있다.

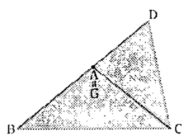
이 세 가지 전략은 나름대로 합리적인 추측을 사용하고 있지만 모두 실패로 돌아갔다. 앞 절에서 살펴본 '정답'과 비교함으로써 이것을 알 수 있으나, 이 절에서는 무게중심과 관련된 일반적인 이론을 모르고 있는 전략의 제안자 입장에서, 스스로의 전략을 검증할 수 있는 수학적 방법을 모색하고자 한다. 이 방법은 삼각형은 어떤 관점에서 사각형의 특별한 경우로 볼 수 있다는 착상에 주로 기초한다.

중선 전략의 검증

[그림 Ⅲ-6]은 중선 전략의 첫 번째 경우에 대한 검증으로서, 사각형 ABCD에서 한 변 AD가 퇴화하여 만들어진 삼각형이다. [그림 Ⅲ-7]은 두 번째 경우의 검증으로서, 같은 사각형에서 꼭지점 A가 대각선 BD 위로 이동하여 만들어진 삼각형이다. 두 전략 모두 이렇게 만들어진 삼각형에 대해 올바른 무게중심을 찾아주고 있지 않다. 따라서 중선 전략의 두 경우 모두 옳지 않다.



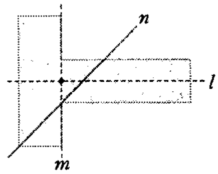
[그림 Ⅲ-6] 중선 전략 1에 의한 무게중심 G는 AE의 중점이다



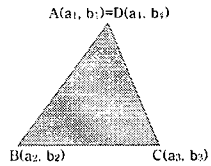
[그림 Ⅲ-7] 중선 전략 2에 의한 무게중심 G는 BD 위에 위치한다

넓이 이등분 전략의 검증

[그림 Ⅲ-8]과 같이 학생이 고려한 두 직선 l, m에 직선 n을 추가로 고려한다. n 또한 주어진 도형의 넓이를 이등분 하지만 l과 m의 교점을 지나지 않는다. 즉, 넓이 이등분 전략은 무게중심의 위치를 유일하게 결정하지 않으며, 따라서 옳지 않다.



[그림 Ⅲ-8] 넓이 이등분 전략의 검증



[그림 Ⅲ-9] 산술평균 전략의 검증

산술평균 전략의 검증

[그림 Ⅲ-9]와 같이 변 AD가 퇴화된 사각형을 고려한다. $a_1 = a_4$, $b_1 = b_4$ 이므로, G의 좌표는 $\left(\frac{2a_1+a_2+a_3}{4}, \frac{2b_1+b_2+b_3}{4}\right)$ 이다. 이것은 삼각형 ABC의 무게중심, $\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)$ 과 일치하지 않는다. 따라서 산술평균 전략도 옳지 않다.

3. 물리적인 현상의 수학적 탐구

나름대로의 합리성에도 불구하고, 세 전략들은 모두 실패로 돌아갔다. 그 근본적인 원인은 학생들의 의도와 실제로 그들이 사용한 방법 사이의 차이를 조사함으로써 발견할 수 있다. 중선전략에서, 학생들은 삼각형 중선의 기하학적인 성질을 확장하여 중선에 대응하는 사각형에서의 개념을 찾았다. 넓이 이등분 전략에서, 학생들은 넓이라는 기하학적 성질에 의존해 무게중심을 찾았다. 산술평균 전략에서, 학생들은 산술평균의 대수적 형식으로 표현된 삼각형 무

게중심의 좌표를 곧바로 사각형에 대한 것으로 확장하였다.

학생들은 물체의 평형과 관계된 물리적인 개념으로서의 도형의 무게중심을 찾으려고 의도하였고, 따라서 그 위치를 구하기 위해서는 무게중심과 관련된 실세계의 경험적 원리를 고려해야 한다. 그러나 학생들은 스스로의 의도와 달리 어떠한 경험적인 원리도 고려하지 않았다. 학생들의 전략들이 무게중심의 위치를 결정하는 올바른 절차를 포함하지 못한 근본적인 원인은 여기에서 찾을 수 있다.

한편, 앞에서 제시한 세 전략의 검증방법 자체를 다시 고찰할 때 어떤 논리상의 문제가 제기된다. 여기서는 도형의 무게중심 위치에 대한 어떤 주장을 단지 수학적인 추론을 통해 검증했다. 어떻게 수학적인 고찰만으로 물리적인 현상에 대한 검증을 할 수 있었는가?

이 검증방법 역시 물리적인 현상의 수학적 탐구라는 관점에서 이해해야 한다. 이 검증에는 암묵적으로 가정된 어떤 사실이 이용되었다. 중선전략과 산술평균 전략의 검증에서는 사각형이 연속적으로 변해서 삼각형이 될 때, 사각형의 무게중심은 삼각형의 무게중심 위치로 연속적으로 옮겨간다는 가정을 하고 있다. 또한, 넓이 이등분 전략의 검증에서는 하나의 도형에 대해 그 무게중심은 유일하다는 가정을 하고 있다. 이 두 가지 사실은 물체의 평형과 관련된 몇 차례의 경험에 비추어 직관적으로 받아들여지므로 의식하기 힘들다. 그러나 무게중심의 위치에 대한 수학적 검증이 가능했던 것은 바로 이 암묵적인 가정들 때문이었다.

결국, 이 검증은 어떤 물리적인 원리도 고려하지 않는다는 의미에서의 '순수한' 수학적 검증은 아니었다. 물리적인 현상으로부터 직관적으로 추상된 원리가 무게중심의 위치를 규정하는 수학적인 조건으로서 받아들여졌던 것이다.

IV. 대칭의 원리와 아르키메데스의 공리적 방법

다각형 무게중심의 작도법을 고찰할 때, 다음과 같은 논리상의 의문이 제기될 수 있다. 그 작도법은 지레의 법칙을 전혀 언급하지 않고, 단지 삼각형 무게중심의 위치와 그 유일성에 의존해서 일반적인 다각형의 무게중심을 결정하였다. 삼각형 무게중심의 위치와 유일성은 단지 대칭에 의한 자명한 원리에 기반 하여 설명할 수 있었으므로, 결국 일반적인 다각형의 무게중심 위치가 그 자명한 원리로부터 결정된다는 말이 된다. 물체의 무게중심의 위치를 결정하는 실세계의 원리는 무게와 거리 사이의 역비례라는 구체적인 관계식으로 형식화되는 지레의 법칙임을 고려하면 어떻게 이러한 일이 가능한 것인지 의문시된다. 논리상으로, 대칭의 원리는 지레의 법칙과 같은 힘을 가지고 있는가?

도형의 무게중심에 대한 아르키메데스의 연구[2)]가 이 의문에 대한 대답을 제시한다. 아르키메데스는 무게와 거리 사이의 역비례식 $W_1 d_1 = W_2 d_2$를 출발점으로 한 것이 아니라, 이보다 더욱 근본적이라고 생각되는 몇 가지 원리를 공리로 삼아 이 식을 유도해 냈다. 그의 공리 중 지레의 원리를 유도하는데 사용된 것은 다음의 세 가지이다(Dijksterhuis, 1987: 286-306).

1. 같은 거리에 있는 같은 무게들은 평형 상태이다. 다른 거리에 있는 같은 무게들은 평형

2) 이 연구는 아르키메데스의 책 『평면의 평형 혹은 평면의 무게중심』에 실려 있다.

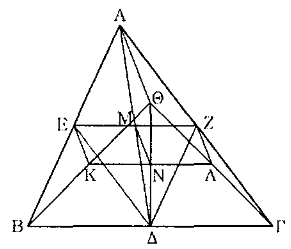
이 아니고 더 큰 거리의 무게 쪽으로 기운다.

2. 특정한 거리의 무게들이 평형을 이루고 있다고 하자. 그 무게 중 하나에 무게가 추가되면, 평형이 깨어지며 그 추가가 이루어진 쪽으로 기운다.
3. 비슷하게, 어떤 것을 덜어내면 평형이 깨어지며, 아무것도 행해지지 않은 쪽으로 기운다.

이 세 개의 공리는 결국 앞에서 언급한, 대칭에 의해 자명한 원리를 상술한 것에 지나지 않는 것으로 보인다. 하지만, 아르키메데스가 이 세 가지 공리로부터 얻은 여섯 번째와 일곱 번째의 명제가 바로 지레의 법칙이다.[3)]

또한, 아르키메데스는 도형의 모양, 그리고 배치에 대한 대칭성을 정교하게 이용하여 삼각형의 무게중심을 구하고, 이를 통해 다른 일반적인 도형의 무게중심을 구한다. 삼각형의 무게중심 위치를 구하는 명제 13에 대한 아르키메데스의 두 가지 증명 중 하나는 다음과 같다 (Dijksterhuis, 1987: 309-312).

삼각형 ΑΒΓ 의 무게중심 Θ가 중선 ΑΔ위에 있지 않다고 하자. Ε를 지나며 ΑΘ와 평행한 직선이 ΒΘ와 만나는 점을 Κ라 하고, Ζ를 지나며 ΑΘ와 평행한 직선이 ΘΓ와 만나는 점을 Λ라 하자 (그림 Ⅳ-1). 삼각형 ΑΒΓ와 닮은 삼각형 ΕΒΔ에서 Κ는 Θ와 닮은 위치에 있고 ΖΔΓ에서 Λ도 그러하다. 따라서 Κ와 Λ는 각각 삼각형 ΕΒΔ와 ΖΔΓ의 무게중심이다. 이 두 삼각형은 넓이가 같으므로, 그 전체의 무게중심은 ΚΛ의 중점, 즉 ΘΔ와의 교점 Ν이다. 평행사변형 ΑΕΔΖ의 무게중심은 두 대각선의 교점인 Μ이므로 삼각형 ΑΒΓ의 무게중심은 선분 ΜΝ 위에 있어야 하고, 따라서 Θ가 될 수 없다. 그러므로 Θ는 ΑΔ 위에 있어야 한다.



[그림 Ⅳ-1]

이 증명에서 사용된 대칭의 원리는 다음과 같다. 닮은 도형에 대해서 무게중심 역시 닮은 위치에 있다, 넓이가 같은 두 도형 전체의 무게중심이 두 도형 각각에 대한 무게중심을 연결한 선분의 중점에 있다, 평행사변형의 무게중심은 두 대각선의 교점에 있다[4)]. 이 원리들은 누구나 받아들일 수 있는 자명한 사실이다. 이 증명은, 삼각형 무게중심의 위치를 설명하는 앞의 논법과 비교할 때, 삼각형을 많은 막대가 모여 이루어진 것으로 간주하는 것과 같은 미묘한 가정을 하지 않는다는 점에서 더욱 논증적이다. 아르키메데스와 같이 엄밀하게 사용할 때, 대칭의 원리는 다각형 무게중심을 결정하는 논리적 근거가 된다.

물체의 평형에 대한 가장 단순한 관찰을 추상하여 만들어진 자명한 공리들로부터 지레의 법칙이라는 자명하지 않은 수치적 관계식이 유도되고, 도형의 무게중심 위치가 올바르게 구해지는 것은 놀라운 일이다. 무게중심의 수학적 탐구가 이 원리들만으로 충분하다는 것을 발견했다는 것에서 아르키메데스의 뛰어난 통찰력을 엿볼 수 있다.

한편, 아르키메데스의 공리들은 너무나 자명하여, 경험과 관계없는 직관적인 사실처럼 느

3) 통약 가능한 두 개의 무게에 대한 것은 여섯 번째 명제이고, 통약 불가능한 두 개의 무게에 대한 것은 일곱 번째 명제이다.
4) 각각, 그가 설정한 다섯 번째 공리, 처음의 세 공리로부터 유도되는 명제 4, 다섯 번째 공리로부터 유도되는 명제 10.

껴지기도 한다. 그러나 이 자명한 원리 역시 분명 물리적 현상을 추상하여 얻은 것이다. 예컨대, 같은 거리의 두 물체 중 무거운 쪽으로 지레가 기운다는 자명한 사실도 관찰 없이는 검증할 수 없는, 물체의 평형에 관한 하나의 경험적인 원리이다. 그러한 원리를 고려하지 않았던 학생들의 세 전략이 결국 실패로 돌아갈 수밖에 없었음에 비추어, 아르키메데스의 방법은 또 한편 교훈적이다.

V. 결 론

본 연구는 도형의 무게중심에 대한 분석적인 논의로, 삼각형 무게중심에 대한 오개념의 파악과 해소를 위한 수학적 분석을 제시하고, 다각형 무게중심의 수학적 탐구과정에서 제기되는 논리적 문제를 해결하고자 하였다.

삼각형에 대해서, 도형의 무게중심은 넓이를 이등분하는 직선의 교점이라는 오개념은 중선의 의미에 대한 잘못된 해석으로 인해 더욱 자연스럽게 받아들여질 수 있을 것으로 보인다. 삼각형의 중선이 가지는 진정한 의미는 물체의 평형과 관계된 일반적인 물리법칙을 통해 해석되어야 한다. 실제로 삼각형 중선의 의미는 그것이 삼각형의 넓이를 이등분한다는데 있는 것이 아니라, 그것이 양 쪽의 영역이 만드는 회전력의 크기를 일치시킨다는데 있다. 또한, 삼각형의 세 중선은 무게중심의 위치를 결정할 수 있는 유일한 직선이 아니다. 부록 2에서 증명한 바와 같이, 중선 뿐 아니라 도형의 평형을 찾아주는 모든 방향의 직선은 한 점에서 만나며, 바로 그 교점이 도형의 무게중심이다. 중선은 이 직선들 중 작도에 유리하다는 점에서 특별한 직선이었을 뿐이다.

다각형의 무게중심을 구하는 문제에 대한 학생들의 전략들이 실패로 돌아간 근본적인 원인은 물리적 현상의 수학적 탐구과정에 대한 이해의 결핍이라고 볼 수 있었다. 물리적 현상에 대한 수학적 이론은 그 현상으로부터 추상해낸 수학적인 원리를 바탕으로 비로소 전개해 나갈 수 있는 것이지만, 학생들은 그러한 원리를 고려하지 않았다.

한편, 학생들의 전략을 검증한 수학적 방법 자체를 다시 고찰할 때, "어떻게 수학적인 추론만으로 물리적인 현상에 대한 검증을 할 수 있었는가?" 하는 논리상의 문제가 제기된다. 수학적 방법에 의한 검증이 가능했던 것은 물리적인 현상으로부터 직관적으로 추상된 원리들이 무게중심의 위치를 규정하는 수학적인 조건으로서 암묵적으로 받아들여졌기 때문이었다. 물리적 현상에 대한 수학적 이론을 전개하기 위해서도, 검증하기 위해서도 그 현상에 대한 수학적 추상화는 필수적으로 개입되어야 한다. 물체의 평형에 관한 가장 단순한, 그러나 한편 가장 믿을 수 있는 관찰로부터 추상한 공리로부터 무게중심에 대해 수학적으로 이론을 전개했던 아르키메데스의 방법은 물리적 현상에 대한 수학적 탐구의 전형을 보여준다는 점에서 교육적 시사점이 있다.

대칭에 대한 직관적 원리를 통해 삼각형의 무게중심을 설명하는 논법과, 삼각형 무게중심의 위치를 토대로 일반적인 다각형의 무게중심을 구하는 작도법을 함께 고려하면, 대칭에 대한 자명한 원리가 일반적인 다각형의 무게중심을 결정하는 핵심적인 원리인 것으로 보인다. 아르키메데스의 방법은 이 의문에 대한 답이 긍정적임을 보여준다. 무게중심에 대한 아르키메데스의 공리들은 물체의 평형에 대한 대칭성을 표현하는 원리들이었다.

도형의 무게중심은 일반화와 특수화, 반례의 적절한 사용, 해의 존재성과 유일성, 실세계의

수학적 모델링, 공리적 방법론 등과 관련지어 많은 논의와 수학적 탐구를 유발시킬 수 있는 좋은 소재이다. 본 연구의 논의 주제와 결과는 이러한 탐구수업에 필요한 이론적 배경이 될 수 있을 것이다. 삼각형의 무게중심에 대한 교과서의 서술을 개선하고, 학생들과 교사들의 오개념을 바로잡음과 아울러, 무게중심의 탐구를 소재로 한 지도자료 및 수업안의 개발을 기대하는 바이다.

참고문헌

강행고 · 이화영 · 박진석 · 이용완 · 한경연 · 이준홍 · 이혜련 · 송미현 · 박정숙(2002). **중학교 수학 8-나**. 서울: 중앙교육진흥연구소

박윤범 · 박혜숙 · 권혁천 · 김홍섭 · 육인선 · 송상헌(2002). **고등학교 수학 10-나**. 서울: 대한교과서.

이준열 · 장훈 · 최부림 · 남호영 · 이상은(2003). **중학교 수학 8-나**. 서울: 디딤돌.

정상권 · 최영기 · 최홍원 · 홍갑주(2004). **수리과학 탐구수업 지도자료-함수와 추론**. 서울대학교 과학교육연구소.

최용준(2002). **중학교 수학 8-나**. 서울: 천재교육.

Dijksterhuis, E. J. (1987). *Archimedes*, New Jersey: Princeton university press.

Finney, R. L.; Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2001). *Thomas' calculus* (10th edition). New York: Addison Wesley.

Hecht, E. (1996). *Physics*, CA: Brooks/Cole.

Serra, M. (2003). *Discovering geometry-an investigative approach*, Key Curriculum Press.

Shilgalis, T. W., & Benson, C. T. (2001). Centroid of a polygon-three views. *Mathematics Teacher, 94*(4), 302-307.

Misunderstandings and Logical Problems Related to the Centroid of a Polygon

Hong, Gap Ju (Seoul National University Graduate School)

The purpose of this study is to resolve misunderstanding for centroid of a triangle and to clarify several logical problems in finding the centroid of a polygon. The conclusions are the followings.

For a triangle, the misunderstanding that the centroid of a figure is the intersection of two lines that divide the area of the figure into two equal part is more easily accepted caused by the misinterpretation of a median. Concerning the equilibrium of a triangle, the median of it has the meaning that it makes the torques of both regions it divides to be equal, not the areas.

The errors in students' strategies aiming for finding the centroid of a polygon fundamentally lie in the lack of their understanding of the mathematical investigation of physical phenomena. To investigate physical phenomena mathematically, we should abstract some mathematical principals from the phenomena which can provide the appropriate explanations for them. This abstraction is crucial because the development of mathematical theories for physical phenomena begins with those principals. However, the students weren't conscious of this process.

Generally, we use the law of lever, the reciprocal proportionality of mass and distance, to explain the equilibrium of an object. But some self-evident principles in symmetry may also be logically sufficient to fix the centroid of a polygon. One of the studies by Archimedes, the famous ancient Greek mathematician, gives a solution to this rather awkward situation. He had developed the general theory of a centroid from a few axioms which concerns symmetry. But it should be noticed that these axioms are achieved from the abstraction of physical phenomena as well.

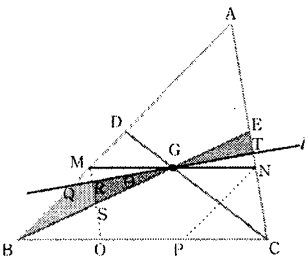
* key words : centroid(무게중심), centroid of a triangle(삼각형의 무게중심), centroid of a polygon(다각형의 무게중심), median of a triangle, misunderstandings(오개념), law of lever(지레의 원리), physical phenomena(물리적 현상), Archimedes(아르키메데스)

논문접수 : 2005. 10. 31
심사완료 : 2005. 12. 2

<부록1>

삼각형의 무게중심을 지나면서 넓이를 이등분하는 직선은 세 중선 밖에 없다. (또한, 삼각형의 무게중심을 지나는 직선이 삼각형을 두 부분으로 분할할 때, 그 넓이의 비는 1:1에서 4:5 사이의 값을 가진다.)

<증명> 다음 그림에서, D와 E는 각각 변 AB와 AC의 중점이고, G는 삼각형 ABC의 무게중심이다. M과 N은 각각 AB와 AC를 2:1로 내분하는 점이며, O와 P는 BC의 두 삼등분점이다. 직선 l이 삼각형의 무게중심 G를 지나면서 변 AB를 Q에서, 변 AC를 T에서 가로지를 때, 각 BGQ의 크기를 θ라고 하자. 특히, 각 BGM의 크기를 θ_1으로 두자.



$0 \le \theta \le \theta_1$ 일 때 삼각형 AQT의 넓이를 $S_1(\theta)$, 사각형 QBCT의 넓이를 $S_2(\theta)$라고 두면, 그림과 같이 결정되는 삼각형 GRS와 GTE가 합동이라는 사실로부터 $S_1(\theta)$는 θ에 대한 감소함수($S_2(\theta)$는 θ에 대한 증가함수)임을 알 수 있다.

그러므로 $\theta=0$ 이 $S_1(\theta)$의 유일한 최대점이며, 이 때 $S_1(\theta) : S_2(\theta) = 1:1$ 이다. 또, $\theta=\theta_1$ 이 $S_1(\theta)$의 유일한 최소점이며, 이때 $S_1(\theta) : S_2(\theta) = 4:5$ 이다. 삼각형의 대칭성에 의해 증명이 완결된다.

<부록2>

무게중심은 유일하다(즉, 양쪽의 회전력을 0으로 만드는 모든 직선은 한 점에서 만난다)

<증명> xy-평면 위에 놓인 도형 R의 무게중심을 (a, b)라고 하면 두 직선 $x=a$, $y=b$에 대한 회전력이 각각 0이라는 조건으로부터

$$dint_R\,(x-a)dxdy = 0,\quad dint_R\,(y-b)dxdy = 0.$$

따라서, R의 넓이 $dint_R 1\,dxdy$ 를 m 이라 둘 때,

$$a=\frac{dint_R\,x\,dxdy}{m},\quad b=\frac{dint_R\,y\,dxdy}{m}.$$

이제, 회전력을 0으로 만드는 모든 직선이 점 (a, b)를 지남을 보이면 된다.

원점을 기준으로 x축과 y축을 θ만큼 회전시킨 좌표축을 각각 u축, v축 라 하자. 즉,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

이 때 v축과 평행한 직선은 방정식 $u=k$ 로 나타낼 수 있다. 이 직선에 대한 도형의 회전력이 0이라면

$$dint_{R'}\ (u-k)dudv = 0.$$

(단, 여기서 R'은 위의 회전변환에 의한 R의 상.)

다변수 함수의 치환적분법에 의해

$$\begin{aligned} 0 &= dint_{R'}\ (u-k)dudv \\ &= dint_{R}\ (x\cos\theta + y\sin\theta - k)\cdot 1\,dxdy. \end{aligned}$$

이 식을 다시 쓰면

$$mk = \cos\theta dint_{R}\, xdxdy + \sin\theta dint_{R}\, ydxdy.$$

이므로,

$$k = a\cdot\cos\theta + b\cdot\sin\theta.$$

그러므로 직선 $u=k$는 xy-좌표계의 점 (a, b)를 지난다. 이 사실은 임의의 θ에 대해 성립하므로 증명이 끝났다.

<부록3>

대칭의 원리에 근거한 삼각형 무게중심의 유일성 설명

<설명> P가 주어진 삼각형의 세 중선의 교점이 아닌 어떤 점이라고 하자, 그러면 점 P와 삼각형의 꼭지점을 지나는 직선 세 개 중 적어도 두 개는 중선이 아니다. 이 직선 중 하나를 l이라고 하자. 주어진 삼각형을 l이 가로지르는 변에 나란한 막대들이 모여 이루어진 것으로 간주할 때, l은 모든 막대의 양쪽을 일정한 비율로 불균등하게 분할한다. 그러므로 이 삼각형은 l 위에서 한쪽으로 기울어져야 하고, P는 삼각형의 무게중심이 될 수 없다. 따라서 세 중선의 교점은 삼각형의 유일한 무게중심이다.