

휨 및 비틀림 거동 및 전단변형 효과를 고려한 차량 - 현수교의 동적 상호작용 해석

Dynamic Interaction Analysis of Vehicle-Suspension Bridge Considering Flexural and Torsional Behaviors and Shear Deformation Effects

김 문 영† 임 명 훈* 권 순 덕** 김 호 경*** 김 남 일****
Kim, Moon-Young Lim, Myoung-Hun Kwon, Soon-Duck Kim, Ho-Kyung Kim, Nam-II
(논문접수일 : 2004년 8월 30일 ; 심사종료일 : 2005년 9월 7일)

요 지

본 저자의 이전연구(김문영 등, 2004)에서는 2차원 차량 모형과 전단변형 및 회전관성 효과가 고려된 현수교요소와의 상호작용을 고려한 2차원 수직응답에 대한 동적해석을 수행하였다. 본 연구에서는 전단변형 효과와 편심차량의 효과를 알아 보는데 목적을 두었다. 이를 위하여 전단변형 및 회전관성 효과가 고려된 3차원 현수교의 수직, 비틀에 대한 고유진동수와 모드형상, 그리고 교량-차량 에너지로부터 라그랑지안식을 이용하여 상호작용을 고려할 수 있는 3차원 운동방정식을 유도한다. 이후 모드중첩법을 이용하여 유도된 운동방정식을 Newmark method를 사용하여 동적해석을 수행한다. 마지막으로 본 연구에서 제시한 이론을 따라 수치해석예제를 수행하여 차량의 동적거동을 분석한다.

핵심용어 : 비틀진동, 이동하중, 현수교, 전단변형, 상호작용, 차량

Abstract

In the previous study(Kim 등, 2004), the finite element method was used for the vertical vibration analysis of suspension bridge with the effects of the shear deformation and the rotary inertia under moving load considering the bridge-vehicle interaction. The purpose of this study is to investigate the effect of an eccentric vehicle and shear deformation. So we firstly performs the eigenvalue analysis for the free vertical and the torsional vibration of suspension bridges using FEM analysis. Next the equations of motion considering interaction between suspension bridges and vehicles/trains are derived using the mode superposition method. And then dynamic analysis was performed using the Newmark method. Finally through the numerical examples, the dynamic responses of bridges are investigated according to the proposed procedure.

keywords : torsional vibration, moving load, suspension bridge, shear deformation, interaction, vehicle

1. 서 론

장경간의 현수교는 다른 교량에 비하여 동적하중에 매우 민감한 형식의 교량이다. 현수교가 편심 재하 된 차량하중을 받을 경우 현수교의 비틀 진동이 발생하게 되며, 양쪽 케이블의 상대적인 수직진동과 함께 교축방향에 대하여 모멘트를 발생시킨다. 그리고 다른 교량형식에 비하여 강성이 상대적으로

작으므로 동하중에 의한 현수교의 진동특성은 중요한 공학적 문제이다. 따라서 현수교의 정적 및 동적거동을 정확히 파악하기 위해서는 수직과 비틀 진동에 대하여 정확한 고유진동수와 형상을 결정해야 한다. 특히 컴퓨터의 성능과 해석 이론의 발달은 차량모형의 롤링 운동을 고려한 3차원 모형의 적용을 가능케 함으로써 2차원 모형에 비하여 차량하중의 공간적 분배를 보다 효과적으로 고려할 수 있는 단계에 이르고 있다.

† 책임저자, 정희원 · 성균관대학교 토목환경공학과 교수
전화: 031-290-7544 ; Fax: 031-290-7548

E-mail: kmye@skku.ac.kr

* 성균관대학교 토목환경공학과 석사과정

** 전북대학교 토목공학과 교수

*** 목포대학교 토목공학과 교수

**** 성균관대학교 토목환경공학과 박사

• 이 논문에 대한 토론을 2006년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2006년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

현수교 진동해석에서는 Abdel-Ghaffar(1980)가 수직 및 비틀림 진동, 횡 방향 진동에 대한 이론을 일반화시켰으며, Hayashikawa(Hayashikawa 등, 1982)는 이동하중을 받는 현수교의 전단변형 및 회전관성효과를 조사하였다. 그리고 김호경(1993)은 유한요소법을 이용하여 현수교의 이동하중 해석 기법을 개발하였다. 김문영(김문영 등, 1997), 김문영(김문영 등, 2001)은 해석적 및 수치적 방법을 사용하여 전단변형 및 회전관성효과를 고려하는 현수교의 수직 및 비틀림에 대한 자유진동이론을 제시하였다. 권순덕(1998), 서영국(서영국 등, 1998)은 단선교에 대하여 차량과 교량의 상호작용을 고려한 2차원 및 3차원 모드중첩법에 의한 동적해석을 하였다. 김문영(1997)은 차량의 하중을 집중하중으로 모델화하여 전단변형 효과를 고려한 현수교의 2차원 moving load해석을 수행하였다.

본 연구에서는 이전의 연구를 바탕으로 차량의 입체모형 및 편심재하가 현수교 거동에 미치는 효과를 평가해 보기 위하여 입체 차량모델을 사용한 3차원 차량-교량 상호작용 유한요소 해석기법을 제안하였다. 이를 위하여 편심트러스 거더의 회전관성 및 전단변형효과를 고려한 현수교요소에 대하여 수직과 비틀림에 대한 자유진동해석을 수행하였다. 예제를 통하여 전단변형 효과를 고려한 현수교의 교량-차량 상호작용 해석을 수행하고 응답특성을 분석하였다.

2. 현수교 모델

그림 1은 3경간 현수교의 형상 및 좌표계를 나타낸다. 주 케이블은 각 경간마다 포물선의 형상을 이루며 포물선 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y_i(x_i) = \frac{m_i g l_i}{2H_w} \left[\frac{x_i}{l_i} - \left(\frac{x_i}{l_i} \right)^2 \right] \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

여기서, m_i 는 케이블과 보강형의 사하중을 고려한 단위

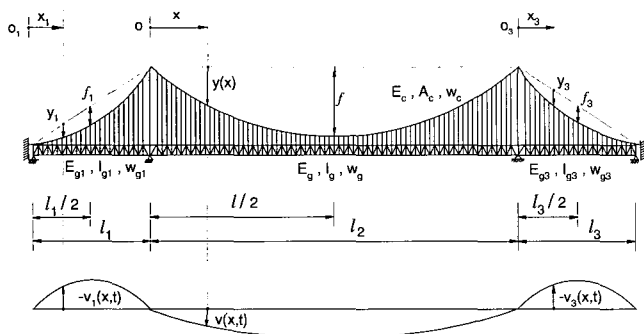


그림 1 3경간 연속 현수교의 형상 및 좌표계

길 이당 질량이고, H_w 는 케이블 장력의 초기 수평성분이다. g 는 중력가속도 그리고 l_i 은 각 경간의 길이를 나타낸다. 운동방정식을 유도하기 위하여 아래와 같이 Hamilton의 원리를 적용한다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (2)$$

2.1 현수교의 수직변위에 대한 에너지

여기서 T 와 V 는 각각 현수교에 작용하는 운동에너지와 포텐셜에너지를 나타낸다. 회전관성과 전단변형 효과를 고려하는 경우, 외력 $P_i(x_i, t)$ 을 받는 현수교의 운동에너지와 포텐셜에너지는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} (m_i v_i^2 dx_i + \rho_{gi} I_{gi} \dot{\beta}_i^2) dx_i \quad (3a)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \left[E_{gi} I_{gi} \beta_i^2 + \frac{G A_{gi}}{f_{si}} (v_i' - \beta_i)^2 + H_w v_i^2 \right] dx_i \quad (3b)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{H^p(t) L_E}{E_c A_c}$$

여기서, $L_E = \sum_{i=1}^3 L_{ei} = \sum_{i=1}^3 l_i [1 + 8(\frac{f_i}{l_i})^2]$ (3c)

식 (3)에서 v_i 와 β_i 는 각각 수직 및 회전변위를 나타내고, ρ , A 와 I 는 각각 밀도, 단면적 그리고 단면 2차 모멘트, E , G 와 f_s 는 탄성 및 전단 탄성계수와 전단계수(shear coefficient)를 표시한다. 이때, 아래첨자 g 와 c 는 각각 보강형과 주 케이블에 대한 값을 나타낸다. 위첨자 ($\dot{\quad}$)와 ($'$)는 각각 시간 t 및 거리 x 에 대한 편미분을 나타낸다. $H(t)$ 는 케이블 장력의 추가적인 수평증분을 나타내고, 아래의 식으로 표시할 수 있다.

$$H(t) = \frac{E_c A_c}{L_E} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{m_i g}{H_w} \int_0^{l_i} v_i dx_i + \frac{1}{2} \int_0^{l_i} v_i'^2 dx_i \right) \quad (4)$$

식 (3a), (3b)를 식 (2)에 대입하여 Hamilton원리를 적용하여 운동방정식을 유도할 수 있다.

2.2 현수교의 비틀림 변위에 대한 에너지

그림 2는 폭 b , 높이 d 인 트러스 보강형을 등가의 박벽

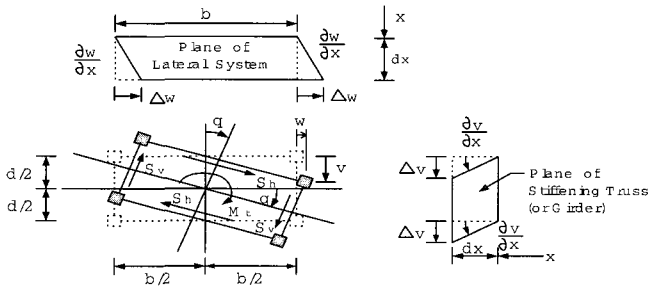


그림 2a 현수교의 비틀 변형형상

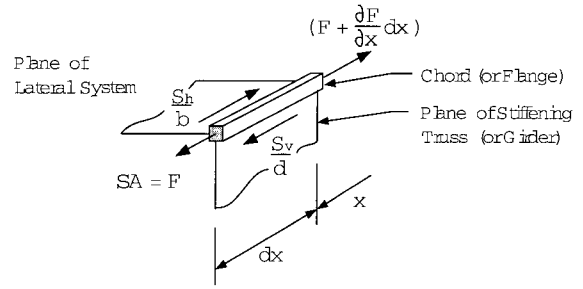


그림 2c 트러스요소의 자유물체도

보로 치환하기 위하여 Abdel-Ghaffar(1979)에 의해서 도입된 변형형상을 나타낸다. 그림 2(a)는 비틀각 θ 에 의한 변형형상, (b)는 뒹(warping) 변위 u 로 인한 네 개 상하현재의 축방향 변형, 그리고 (c)는 현재의 축방향력 F 와 사재와 수직재의 전단력 S_v, S_h 에 의한 평형을 표시한 자유물체도를 나타낸다. 이후 식들에서 G 는 트러스거더의 전단탄성계수이며, μ_v, μ_h 는 각각 수직 및 수평 트러스 구조의 전단저항계수이며, E_g, A 는 각각 상하현재의 탄성계수 및 등가 단면적을 나타낸다. I_w, J 그리고 C_t 은 각각 뒹상수 및 비틀상수, 그리고 비틀전단상수를 나타낸다. 이후의 식들에서 아래 첨자 g 와 c 는 각각 트러스 보강형과 주 케이블을 나타낸다.

일반적으로 비틀 진동을 일으키는 현수교에 발생하는 운동에너지는 보강형과 케이블에 의하여 발생하는 운동에너지의 합으로 표현하며, 총 포텐셜에너지는 상하현재와 수직, 수평브레이싱에 작용하는 탄성변형에너지와 케이블에 의하여 발생하는 포텐셜에너지의 합으로 구성할 수 있다. 따라서 전단변형을 고려한 보강형에 작용하는 운동에너지와 케이블에 작용하는 운동에너지를 포함한 전체 현수교의 운동에너지는 식 (5)과 같이 표현할 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^l I_{mi} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 dx_i \quad (5)$$

여기서, $I_{mi} = \left(I_{\pi} + \frac{w_c b_i^2}{g} \right)$ 는 i 번째 경간의 전체 단면

에 대한 등가 질량관성 모멘트를 나타내고, I_{pi}, w_c, g 는 각각 i 번째 경간의 보강형의 질량 극관성 모멘트, 케이블의 단위 길이당 자중, 중력가속도를 나타낸다.

다음으로 트러스 보강형 및 비틀 진동을 일으키는 현수교의 양쪽 케이블에 저장된 변형에너지 V 는 식 (6)과 같다.

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^l \left[E_{gi} I_{wi} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{G_i J_i}{C_{ti}} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} + f_i \right)^2 + \left(G_i J_i + H_w \frac{b_i^2}{2} \right) \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} \right)^2 + H(t) b_i \left(\frac{\partial u_c}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} \right) \right] dx_i \quad (6)$$

여기서 $E_{gi} I_{wi}, G_i J_i, C_{ti}$ 는 각각 i 번째 경간 보강형의 뒹강성, 비틀강성, 비틀전단계수를 나타낸다. 그리고 dy_c/dx_i 는 i 번째 경간 케이블의 사하중 경사, m_i 는 케이블과 보강형의 사하중을 고려한 단위길이 당 질량, H_w 는 케이블 장력의 초기 수평성분, $H(t)$ 는 추가적인 수평장력증분, $E_c A_c$ 는 케이블의 축강성, L_E 는 케이블의 가상길이를 나타낸다. 케이블의 추가수평장력은 식 (7)과 같다.

$$H(t) = \frac{E_c A_c}{L_E} \sum_{i=1}^3 \frac{m_i g b_i}{2 H_w} \int_0^l \theta_i dx_i \quad (7)$$

그림 2(a)에서 볼 수 있듯이 현수교가 비틀 진동이 일어나는 동안 단면은 전단중심에 대하여 대칭을 이루게 된다. 이러한 경우 비틀 변위에 의하여 보강형의 자중효과가 행어에

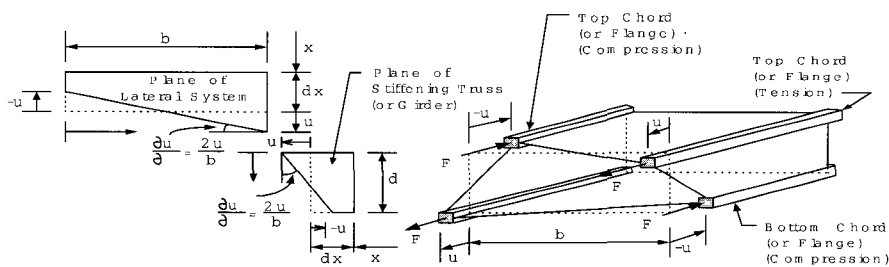


그림 2b 현수교의 뒹 변형형상

서로 다른 인장력을 발생시키고 이는 단면의 전단중심을 중심으로 모멘트를 발생시킨다. 따라서 현수교의 비틀림 진동 해석시 보강형의 자중에 의하여 발생하는 중력강성(gravitational stiffness)의 효과를 고려할 필요(Hayashikawa, 1997)가 있다. Hamilton의 원리를 적용하여 중력강성효과를 포함시키면 운동방정식을 유도할 수 있다.

2.3 현수교요소를 이용한 현수교의 자유진동해석

전단변형의 영향이 고려된 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하는 현수교 요소를 이용하여 수직과 비틀림 진동에 대한 현수교 전체의 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다. 식 (2)에 Hamilton의 원리를 적용하면, 현수교 교량전체의 운동방정식을 다음과 같이 얻는다.

$$M_b \ddot{V} + K_b V = 0 \tag{8a}$$

$$M_{tb} \ddot{\Theta} + K_{tb} \Theta = 0 \tag{8b}$$

여기서, $K_b = K_{EG} + K_{CG} + K_{CE}$

$$K_{tb} = K_{FL} + K_{WE} + K_{CG} + K_{CE}$$

식 (8)에서 M_b , K_{EG} 는 각각 전체구조물의 수직 자유도에 대하여 정의된 질량행렬, 보강형의 탄성강도 및 케이블의 처짐에 따른 강도행렬 그리고 케이블의 탄성강도행렬을 나타내며, M_{tb} , K_{FL} , K_{WE} 는 각각 전체구조물의 비틀림 자유도에 대하여 정의된 질량행렬, 보강형의 플랜지와 탄성강성행렬과 웨브의 탄성강성행렬을 나타낸다. K_{CG} , K_{CE} 는 각각 케이블장력에 의한 요소의 강성행렬과 케이블의 탄성강성행렬을 나타낸다. K_{CE} 은 banded가 아닌 full matrix형태가 된다. 이는 주 케이블의 특정 절점의 연직변위가 장력증분을 통하여 교량전체의 강성에 직접적으로 영향을 준다는 것을 의미한다.

모드중첩법을 이용하여 운동방정식을 풀기 위하여 다자유도계의 연성운동방정식의 집합을 비연성운동방정식의 집합으로 바꾸는 정규좌표계 변환을 이용한다. 이 방법은 변위가 n

개의 개별적인 좌표집합으로 표현되고 감쇠가 모드 감쇠비 ξ 로 나타내지는 선형구조물의 동적응답을 구하는데 사용한다. 교량의 수직과 비틀림 변위 (v, θ)는 모드진폭 (q_i, w_i)에 모드형상벡터 (ϕ_i, ϕ_{ti})를 곱함으로써 구할 수 있다. 현수교의 동적응답을 구하기 위해서는 비감쇠 자유진동 해석으로부터 구한 모드형상행렬(Mode Shape Matrix)를 이용하여 선형 좌표 변환을 하여야 한다. 따라서 모드형상의 직교성을 적용하여 비례감쇠를 사용하면 식 (8)은 식 (9)과 같이 선형화된다.

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \tag{9a}$$

$$\ddot{w}_i + 2\xi_{ti} \omega_{ti} \dot{w}_i + \omega_{ti}^2 w_i = 0 \tag{9b}$$

여기서, $i = 1, 2, \dots, n$

3. 차량 모델 및 에너지

차량모델은 그림 3과 같이 3차원 차량모델을 사용하였으며, 차체 중심에 대하여 1개의 수직자유도와 2개의 회전자유도를 가지고 있다. 차량의 3차원 모형은 2차원 모형에 비하여 차량의 바운싱, 피칭 운동뿐만 아니라 롤링 운동까지 고려할 수 있다. 따라서 작용하는 차륜하중의 공간적 분배를 보다 실제상황에 근사하게 나타낼 수 있는 장점이 있다. 차량 중심에서의 연직, 피칭 그리고 롤링에 대한 자유도는 각 차륜에 대한 수직 자유도로 관계 되며, 따라서 차량의 자유도는 각 차륜에 대한 4개의 자유도로 표현할 수 있다. 최종 3차원 운동방정식은 총 6개의 자유도로 나타내어진다.

차량 모형화는 크게 질량, 강성과 감쇠, 기하학적 구속 조건 등으로 구분할 수 있으며, 차량은 다음과 같은 가정에서 그림 3a와 같은 운동을 한다.

- 모든 질량은 강체이며, 질량은 차체에 집중되어 있다.
- 차체는 바운싱, 피칭, 그리고 롤링 운동을 하며, 차체의 중심에 대하여 발생한다.
- 교량위에서 차량은 일정한 속도로 주행한다.
- 차륜은 노면과 하나의 점에서 접촉한다.
- 현가장치의 스프링 상수와 감쇠는 선형이다.

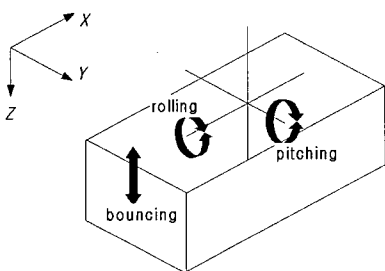


그림3a 3차원 차량의 운동

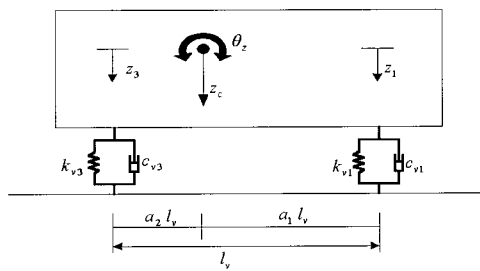


그림3b 3차원 차량의 모형화(측면도)

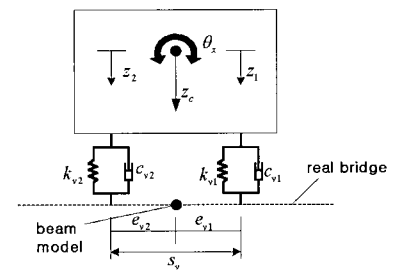


그림3c 3차원 차량의 모형화(정면도)

그림 3에 사용한 기호는 다음과 같다.

z_c, m_v : 차체의 무게중심에서의 수직변위와 질량

θ_x, I_{mx} : 차체의 롤링 변위와 회전 관성모멘트

θ_z, I_{mz} : 차체의 피칭 변위와 회전 관성모멘트

z_k, k_{vk}, c_{vk} : 각 차륜위치에서의 변위 및 현가장치에서의 강성과 감쇠계수($k = 1 \sim 4$)

그림 3과 같은 차량에서 차체에서의 각 바운싱, 피칭 및 롤링 세 개의 변위와 차축에서의 변위와의 관계는 다음과 같다.

$$z_c = \frac{1}{2}(z_{c1} + z_{c2}) \quad (10a)$$

$$\theta_z = \frac{1}{2}(\theta_{z1} + \theta_{z2}) \quad (10b)$$

$$\theta_x = a_3(\theta_{x1} - \theta_{x2}) + \theta_{x2} \quad (10c)$$

여기서, $z_{c1} = a_3(z_1 - z_3) + z_3$, $z_{c2} = a_4(z_2 - z_4) + z_4$

$$\theta_{z1} = \frac{z_1 - z_3}{l_v}, \quad \theta_{z2} = \frac{z_2 - z_4}{l_v}$$

$$\theta_{x1} = \frac{z_1 - z_2}{s_v}, \quad \theta_{x2} = \frac{z_3 - z_4}{s_v}$$

교량의 에너지는 차량과 비연계적이지만, 차량의 에너지는 교량의 수직 및 비틀 변위와 연계성을 갖는다. 따라서 교량의 자유진동해석에 따른 교량의 모드형상과 차량의 에너지로부터 라그랑지안 식을 이용하여 교량과 차량의 상호 관련된 교량의 운동방정식을 유도할 수 있다.

교량의 수직변위와 회전변위를 $v(x,t)$, $\theta(x,t)$ 라 할 때, 변위는 모드 형상 $\Phi_i(x)$, $\Phi_{ti}(x)$ 과 일반화 좌표계의 변위 $q_i(t)$, $w_i(t)$ 의 곱으로 표현할 수 있으며, 차량이 속도를 가지므로 차량의 위치는 시간에 대한 함수가 되어 모드 형상은 공간만이 아닌 시간의 함수도 된다. 따라서 교량의 수직 및 회전변위 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v(x(t),t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x(t))q_i(t) \quad (11a)$$

$$\theta(x(t),t) = \sum_{i=1}^n \Phi_{ti}(x(t))w_i(t) \quad (11b)$$

식 (11a)의 시간에 대한 미분 항은 다음과 같다.

$$\dot{v}(x(t),t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i'(x)v_i q_i(t) + \sum_{i=1}^n \Phi_i(x)\dot{q}_i(t) \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{v}(x(t),t) &= \sum_{i=1}^n \Phi_i(x)\ddot{q}_i(t) + 2\sum_{i=1}^n \Phi_i'(x)v_i \dot{q}_i(t) \\ &+ \sum_{i=1}^n \Phi_i''(x)v_i^2 q_i(t) \end{aligned} \quad (12b)$$

비틀 변위의 미분 항 또한 위와 같은 형태로 나타낼 수 있다.

차량의 차축이 x_k 지점에 있을 때, 차축에 작용하는 변위량은 차량의 변위와 그 지점의 교량의 변위로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{상대변위}(s_k) &= z_k - \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_{vk})q_i(t) \\ &- e_k \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_{vk})w_i(t) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서, $k = 1 \sim 4$

차량의 운동에너지(T_v), 위치에너지(V_v), 분산에너지(D_v)는 다음과 같다.

$$T_v = \frac{1}{2} m_v \dot{z}_c^2 + \frac{1}{2} I_{mx} \dot{\theta}_x^2 + \frac{1}{2} I_{mz} \dot{\theta}_z^2 + \frac{1}{2} m_v v_i^2 \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} V_v &= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2} k_{vk} \left(z_k - v(x_k,t) - e_k w(x_k,t) + \frac{m_{vk} g}{k_{vk}} \right)^2 \\ &- m_{vk} g \end{aligned} \quad (14b)$$

$$D_v = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2} c_{vk} \left(\dot{z}_k - \dot{v}(x_k,t) - e_k \dot{w}(x_k,t) \right)^2 \quad (14c)$$

4. 현수교와 차량의 상호작용을 고려한 운동방정식

교량의 에너지와 차량의 에너지로부터 교량과 차량의 운동방정식을 유도하기 위하여 다음과 같은 Lagrange식을 이용할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_k} \right) + \frac{\partial L}{\partial p_k} + \frac{\partial D}{\partial p_k} = Q_k \quad (15)$$

여기서, $L = T - V$

식 (17)을 각 에너지 식에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial p_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{p}_k} \right) + \frac{\partial V}{\partial p_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{p}_k} &= Q_k \\ & \quad (16) \end{aligned}$$

식 (16)식에서 T 와 V 와 그리고 D 는 각각 운동에너지, 위치에너지 그리고 분산에너지를 나타내며, 여기서 p_k 는 일

반화 된 좌표로써 교량의 변위와 차량의 변위인 $q_i(t)$, $w_i(t)$ 와 z_k 을 적용한다.

먼저, 교량의 수직과 비틀에 대한 운동방정식을 구하기 위해서 교량의 에너지에 대하여 일반좌표 $q_i, w_i(t)$ 를 적용하면 교량의 운동방정식은 2장에서 구한 선형화 된 교량의 자유진동 운동방정식인 식 (9)와 같다. 차량과 교량의 상호작용을 고려한 교량의 운동방정식을 구하기 위하여 차량의 에너지 식을 식 (16)에서 $p_k = q_i, w_i$ 인 경우에 대하여 각각 Lagrange의 식을 적용하면 차량과 교량의 상호 관련된 교량의 운동방정식을 구할 수 있다.

그리고 각각 두개의 전륜과 후륜에 대한 차량의 운동방정식 또한 교량의 유도과정과 동일한 방법으로 라그랑지안 식 (16)에 각각 교량과 차량의 에너지식을 대입하고 이를 차량의 자유도인 z_k , 여기서 ($k=1 \sim 4$)에 대하여 변분을 취하면 차량의 수직자유도에 대한 각각의 운동방정식을 유도할 수 있다. 이 과정에서 유도된 교량과 차량의 운동방정식은 절대변위(z_k)에 대한 운동방정식이다. 실제적으로는 물리적으로 이해하기 쉬운 값은 절대변위가 아닌 상대변위이므로 절대좌표관계에서 유도된 식은 좌표변환을 통해 바꿔줄 필요가 있다. 절대변위와 상대변위의 관계식을 대입하여 교량과 차량의 상대변위(s_k)에 대한 운동방정식으로 최종 나타낼 수 있다. 교량과 차량의 운동방정식은 부록에 수록하였으며, 교량의 수직과 비틀에 대하여 n개의 자유도를 고려한 행렬 형태의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M_b & 0 \\ M_{vb} & M_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_b \\ \ddot{U}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_b & C_{bv} \\ C_{vb} & C_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_b \\ \dot{U}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_b & K_{bv} \\ K_{vb} & K_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_b \\ U_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_b \\ F_v \end{Bmatrix} \quad (17)$$

표 1 3경간 트러스 현수교의 고유진동수 (rad/sec)

모드	수직		비틀	
	전단무시	전단고려	전단무시	전단고려
1	1.9560	1.9426	2.4613	2.4610
2	2.8822	2.8458	3.5932	3.5736
3	3.6773	3.6283	4.9139	4.8400
4	4.2967	4.2268	5.0529	5.0294
5	7.0026	6.8024	5.5826	5.5055
6	7.0562	6.9949	7.3189	7.2515
7	10.2870	9.9401	9.2280	9.1448
8	13.3511	12.8053	10.3417	10.0940
9	14.8569	14.1030	10.4378	10.1167
10	16.1429	15.1335	11.3437	11.1029

여기서,

$$U = \begin{Bmatrix} U_b \\ U_v \end{Bmatrix} = \{q_1 \cdots q_n \ w_1 \cdots w_n \ s_1 \cdots s_4\}^T$$

식 (17)에서 질량, 강성, 감쇠 행렬에 대한 아래첨자 기호 b는 교량의 수직과 비틀, 그리고 v는 차량만의 운동방정식을 나타내며, 이는 증분 시간에 대하여 변하지 않으며 일정한 값을 나타낸다. 그리고 vb와 bv의 행렬 값은 교량과 차량의 상호관련 된 항으로써 차량위치에 대하여 형상함수가 변하므로 각 증분시간에 대하여 값은 변하게 된다.

5. 수치예제

김문영(1997)의 논문을 참조하여 예제 교량을 선택하였다. 교량의 감쇠비는 전 모드 0.5%를 가정하였으며, 노면조도의 영향은 고려하지 않았다. 제원은 아래와 같다.

보강형 : $L_1 = L_3 = 250 \text{ m}$, $L_2 = 770 \text{ m}$, $b = 26 \text{ m}$,
 $d = 0.45 \text{ m}$, $w_{s1} = w_{s3} = 1.597 \times 10^5 \text{ N/m}$, $w_{s2} = 1.555 \times 10^5 \text{ N/m}$, $I_{m1} = I_{m3} = 393.2 \text{ m}^6$, $I_{w2} = 324.4 \text{ m}^6$, $J_1 = J_3 = 2.901 \text{ m}^4$, $J_2 = 4.169 \text{ m}^4$, $I_{m1} = I_{m3} = 2.170 \times 10^6$
 $I_{m1} = I_{m3} = 2.170 \times 10^6 \text{ N s}^2$, $I_{m2} = 2.136 \times 10^6 \text{ N s}^2$, $E = 2.06 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $G = 7.95 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$,

주 케이블 : $f_2 = 76 \text{ m}$, $A_c = 0.2281 \text{ m}^2$, $H_w = 1.943 \times 10^8 \text{ N}$,
 $w_c = 4.724 \times 10^4 \text{ N/m}$, $E_c = 1.962 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$,
 $L_E = \sum_{i=1}^3 L_{ei} = 2814.04 \text{ m}$

표 2 차량의 제원

특성	기호	제원	
중축간 길이	l_v	3.85 m	
횡축간 길이	s_v	1.8 m	
축간 비율	앞축	a_1	0.779
	뒤축	a_2	0.221
피칭모멘트	I_{mz}	570.94 $\text{kN} \cdot \text{m}^2$	
롤링모멘트	I_{mx}	139.11 $\text{kN} \cdot \text{m}^2$	
질량	m_v	223.67 kN	
스프링상수	앞축	k_{v1}, k_{v2}	549.6 kN/m
	뒤축	k_{v3}, k_{v4}	3144.0 kN/m
감쇠계수	앞축	c_{v1}, c_{v2}	13.7 kN-s/m
	뒤축	c_{v3}, c_{v4}	68.4 kN-s/m

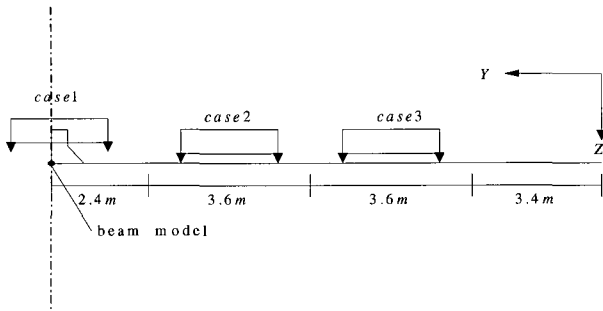


그림 4 하중재하

교량의 수직과 비틀에 대한 고유진동수는 표 1과 같다. 차량 모델은 권순덕(1998) 논문을 참조하였으며 제원은 표 2와 같다. 본 연구에서 개발한 프로그램을 사용하여 주행속도 100 km/h인 경우에 대하여 시간이력해석을 수행하였다. 그림 4는 본 수치 해석에서 고려된 하중 재하 조건이며, case1은 교량 모델의 중심을 따라 진행하는 경우이고, case2와 3은 각각 추월선과 주행선을 진행하는 경우이다. 그림 5는 해석에 고려한 모드 수에 따른 중앙경간 처짐을 도시하였다. 모드 수 20개 이상에서 응답의 값은 거의 일정하였으며, 이를 고려하여 본 해석에서는 30개의 모드를 사용하였다. 본 수치예제에서는 모두 교량의 중앙경간 중앙의 거동에 대한 특성을 예시하였으며, (1)2차원과 3차원 해석에 따른 (L)하중재하 조건에 따른 (c)상호작용 고려 여부에 따른 (v)전단변형 효과

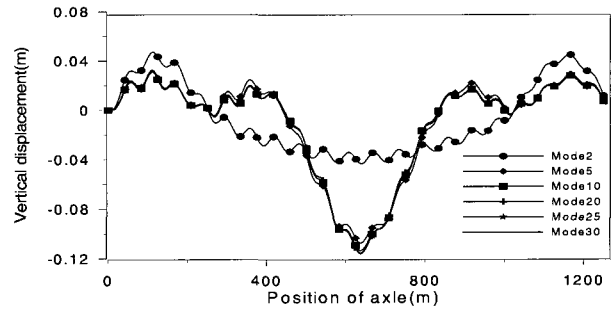


그림 5 모드 수에 따른 중앙경간 중앙 수직변위응답

과 여부에 따라 교량 및 차량의 거동특성을 분석하였다. 2차원 차량모델과 3차원 차량모델에 대하여 상호 동일한 조건으로 수치해석을 수행한 결과 교량의 수직과 비틀 응답은 동일한 값을 나타내었으며, 차량의 응답 또한 값이 크게 차이를 보이지 않았다. 하중재하 조건과 전단변형 효과의 경우를 달리 하였을 경우에도 위와 같은 경향을 보여주었다. 3차원 차량의 롤링운동 고려 여부는 교량과 차량의 거동특성에 거의 영향을 주지 않음을 알 수 있다. 그림 6~9는 하중재하 조건 case3의 경우에 대하여 도시하였다. 그림 10~14는 3차원 차량모델에 대하여 상호 동일한 조건하에 하중 재하를 달리하여 수치해석을 수행한 결과를 도시하였다. 교량의 수직응답의 경우 하중 재하조건에 대한 응답이 같은 값을 나타내었다. 그리고 교량의 비틀 응답과 차량의 수직과 두개의 회전변위는 편심이 클수록 상대적으로

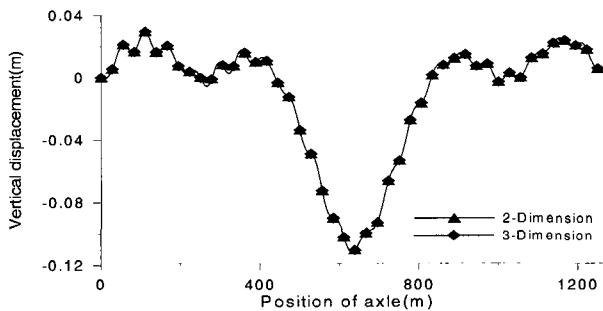


그림 6 중앙경간 중앙 수직변위 응답(case3,전단무시)

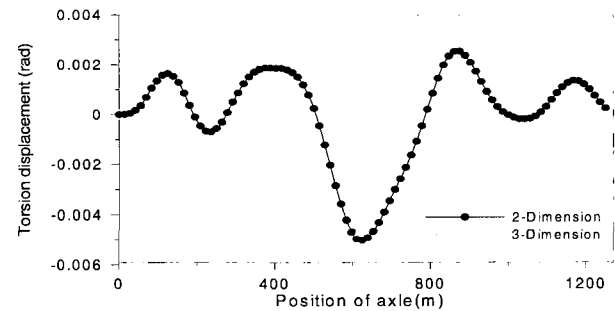


그림 7 중앙경간 중앙 비틀 변위 응답(case3,전단무시)

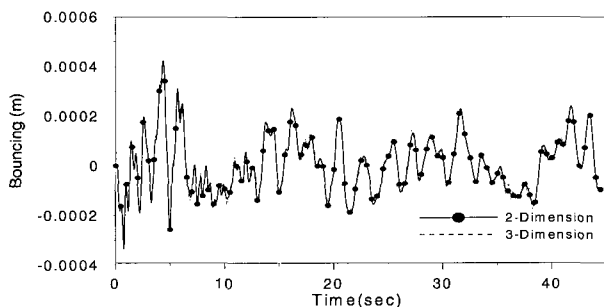


그림 8 차량의 bouncing(case3,전단무시)

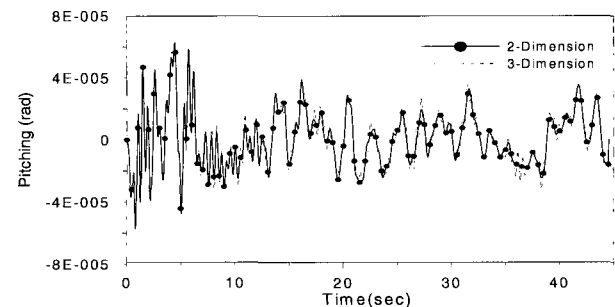


그림 9 차량의 Pitching(case3,전단무시)

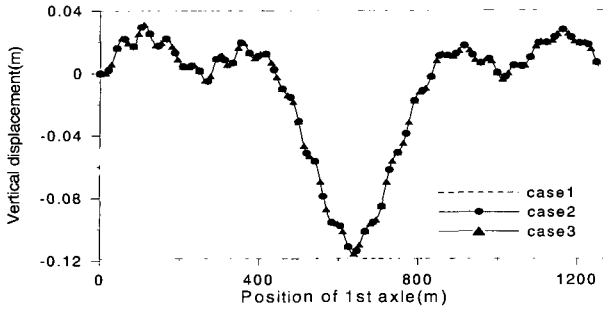


그림 10 중앙경간 중앙 수직변위응답(전단고려)

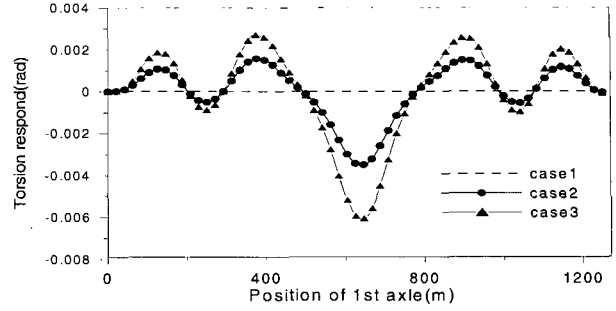


그림 11 중앙경간 중앙 비틀변위응답(전단고려)

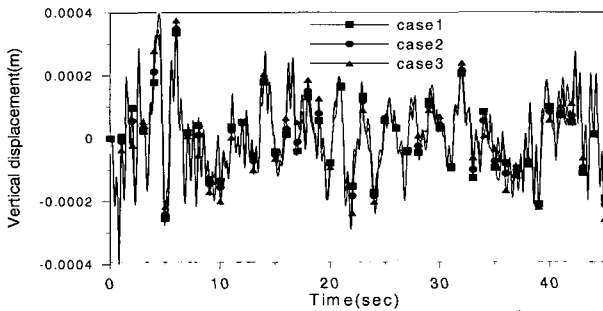


그림 12 차량의 Bouncing응답(전단고려)

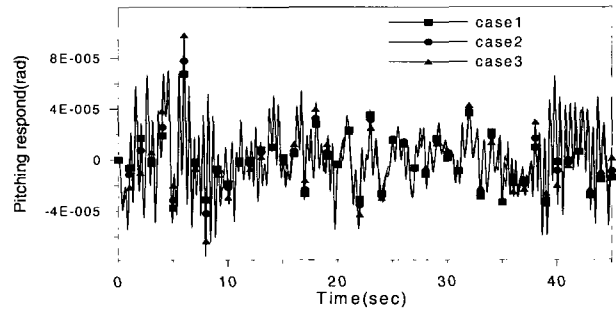


그림 13 차량의 Pitching응답(전단고려)

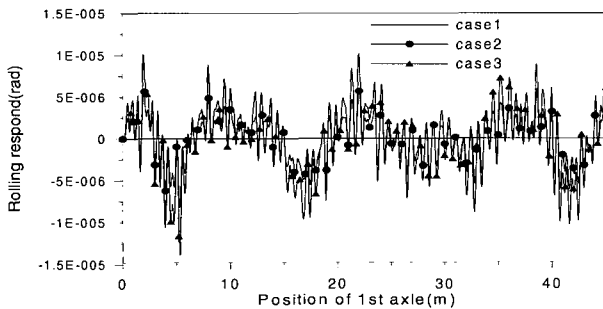


그림 14 차량의 Rolling응답(전단고려)

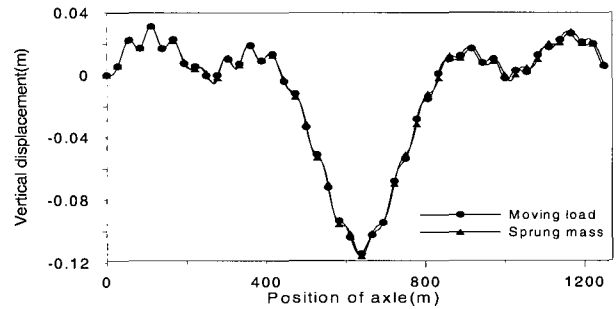


그림 15 중앙경간 중앙 수직 변위 응답 (전단고려)

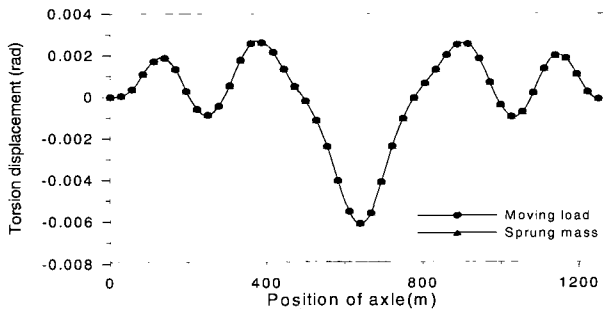


그림 16 중앙경간 중앙 비틀 변위 응답 (전단고려)

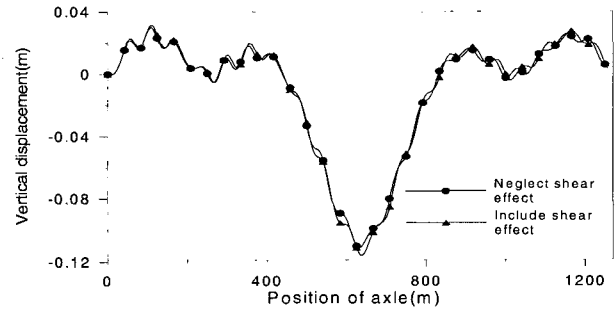


그림 17 중앙경간 중앙 수직변위응답(case3)

큰 응답의 특성을 보이고 있다. 전단변형 효과를 무시하였을 경우에도 이와 같은 경향을 보여주었다. 그림 10의 결과에 따라 차량의 편심주행에 따라 교량의 비틀 변위와 차량의 응답은 크게 영향을 받지만, 교량의 수직응답에는 영향이 미미함을 알 수 있다.

차량과 교량의 상호작용의 고려 유·무에 따른 수치해석을 수행하였다. 해석 수행결과 전단 변형효과 및 하중재하

조건에 따른 결과는 같은 경향을 나타내었으며, 그림 15와 16은 전단변형 효과를 고려한 경우, 하중재하 조건 case3에 대한 조건하에 각각 교량의 수직과 비틀에 관한 응답을 비교 도시하여 나타내었다.

교량의 수직, 비틀 변위 모두 상호작용 효과에 따른 영향이 거의 없는 경향을 보여주었다.

그림 17~21은 3차원 차량 하중에 대하여 전단변형효과

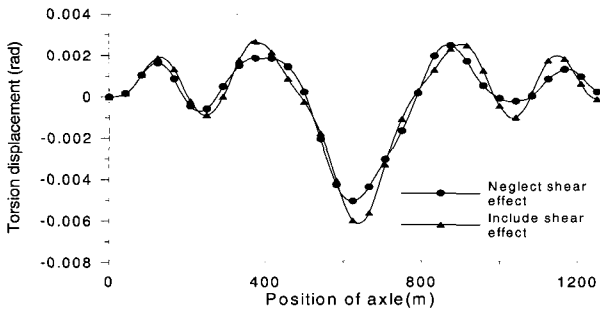


그림 18 중앙경간 중앙 비틀변위응답(case3)

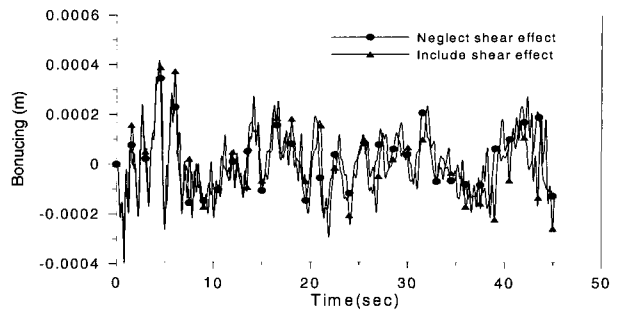


그림 19 차량의 Bouncing응답(case3)

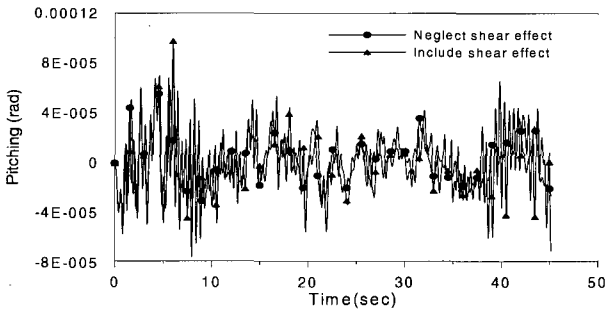


그림 20 차량의 Pitching응답(case3)

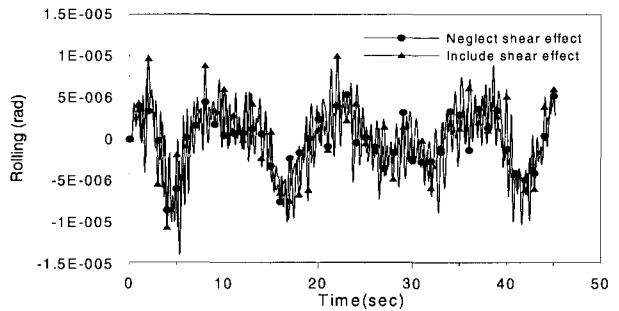


그림 21 차량의 Rolling응답(case3)

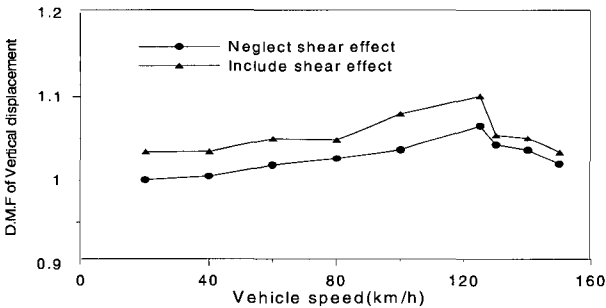


그림 22 차량의 속도에 따른 교량의 수직 D.M.F

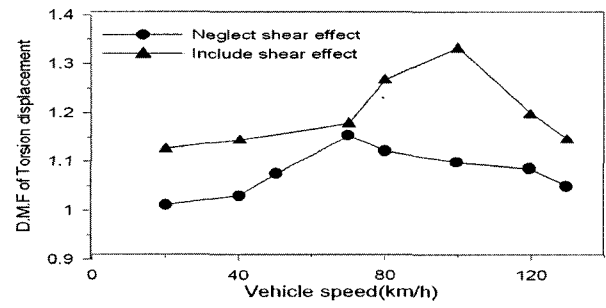


그림 23 차량의 속도에 따른 교량의 비틀 D.M.F

를 나타내었다. 하중재하 조건에 따른 해석 결과 또한 이와 같은 경향을 나타내어 case3의 경우에 대하여 도시하였다. 전단변형을 고려하였을 경우 최대 처짐에 대하여 교량의 수직 변위의 경우 3%, 비틀 변위에 대하여는 7%의 증가를 보였다. 차량의 수직과 두개의 회전 변위 또한 증가된 응답을 나타내었다. 본 수치예제를 통하여 볼 때 전단변형을 고려하였을 경우 다소 응답의 증가를 보여주지만 교량의 자유진동에 대한 전단변형 효과에 비교하여 이동하중에 따른 거동 효과는 크지 않음을 알 수 있다.

그림 22~23은 속도의 변화에 따른 수직과 비틀 변위에 대하여 전단변형 고려 여부에 따른 동적증폭계수를 나타내었으며 전단변형을 고려한 경우 모두 더 큰 값의 결과를 보여준다. 동적증폭계수(D.M.F)식은 아래와 같은 식을 사용하였다.

$$I = \frac{R_d(x) - R_s(x)}{R_s(x)} \quad (18)$$

여기서, $R_d(x)$, $R_s(x)$: 최대 동적, 정적 응답을 나타낸다.

6. 결 론

본 연구는 전단변형이 고려된 Hamilton 다항식을 사용하는 현수교요소를 이용하여 현수교의 수직과 비틀 진동에 대한 고유치 해석을 수행한 후, 차량의 에너지로부터 lagrange equation을 이용하여 현수교와 차량의 상호작용을 고려할 수 있는 운동방정식을 유도하였다. 예제를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 편심제하 경로를 갖는 교량 및 차량의 2차원 및 3차원 상호작용해석을 수행한 결과 교량의 수직변위에 대한 차량의 롤링운동효과를 고려 여부는 크게 영향을 주지 않았다.
- 차량의 편심하중에 대하여 교량의 비틀림과 차량의 거동의 경우에는 차량의 편심제하가 클수록 응답의 증가를 나타내었지만, 교량의 수직변위 응답은 영향을 받지 않음을 알 수 있었다. 이는 교량의 비틀림과 차량의 운동은 서로 연계되어 있지만, 교량의 수직과 비틀림에 대한 운동에너지가 비연계성을 가지기 때문에 차량의 편심하중이 주는 교량의 수직거동의 영향은 미미하다 판단된다.
- 전단변형 효과를 고려한 경우, 고려하지 않은 경우보다 교량의 수직과 비틀림 응답이 다소 커짐을 보여주었으나, 효과가 크지는 않았다. 이는 트러스 보강형 자체의 전단변형 효과는 작지 않지만 현수교가 장경간의 교량인 것에 기인한다고 볼 수 있다. 또한 교량의 수직 및 비틀림에 대한 변위 응답은 일반적으로 저차 모드에서 지배적이거나 전단변형 효과는 고차 모다모드에 영향을 미치지 때문이라고 판단된다.
- 차량과 교량의 상호작용 효과에 따른 교량의 거동특성은 영향이 거의 없음을 보여주었다. 현수교는 비록 강성이 큰 구조물은 아니지만, 이에 비하여 하중이 작은 차량은 상대적으로 현수교에 비해 질량이 미미하여 상호작용 효과는 크지 않음을 알 수 있다. 본 연구 결과를 볼 때 향후 연구 방향은 교량에 대한 질량비가 큰 병행 혹은 연행 차량하중 또는 열차하중에 대한 교량의 진동영향을 둘 수 있다.

감사의 글

이 연구는 한국과학재단의 목적기초사업비(과제번호: R01-2002-000-00265-0)와 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업에 의하여 수행되었습니다. 연구지원에 감사드립니다.

참고 문헌

- 권순덕(1998) 차량하중을 받는 교량의 진동 제어를 위한 TMD의 효과, *대한토목학회논문집*, 18(I-4) pp.457~467.
- 김문영, 노범준(1997) 전단변형 및 회전관성을 고려한 현수교의 수직 자유진동해석 : I. 해석적 방법, *대한토목학회논문집*, 17(I-5), pp.715~726.
- 김문영, 이병주, 노범준(1997) 전단변형 및 회전관성을 고려한 현수교의 수직 자유진동해석 : II. 수 치적 방법, *대한토목학회논문집*, 17(I-5), pp.727~737
- 김문영, 김남일(2001) 전단변형을 고려한 현수교의 비틀림 자유진동해석, *학술발표회논문집*, *대한토목학회* pp.1069~1071.
- 김문영, 임명훈, 권순덕, 김호경(2004) 전단변형효과를 고려한 현수교의 교량-차량 상호작용 해석, *한국지진공학회 논문집*, 8(6), 2004, pp.1~11.
- 김호경 (1993) 시공상태를 고려한 현수교의 3차원 해석 서울대학교 박사논문
- 서영국, 권순덕 (1998) 차량과의 상호작용을 고려한 교량의 동적 모델링, *학술발표회논문집*, *대한토목학회*, 1, pp. 451~454.
- 윤희택, 노범준, 김문영(1997) 이동하중을 받는 현수교의 비선형 수직진동해석, *한국강구조학회지*, 9(3), p.135.
- Abdel-Ghaffar, A. M., (1980) Vertical Vibration Analysis of Suspension Bridges, *J. of Struct. Div., ASCE*, 106(ST10) pp. 2053~2075.
- Hayashikawa, T., Watanabe, N., (1982) Suspension Bridge Response to Moving Loads, *J. of Engng. Mech., ASCE*, 108(EM6), pp.1051~1065.

부 록

◆ 교량의 운동방정식

a) 수직변위 운동방정식

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i - c_{i1} \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_1) \dot{s}_1 - c_{i2} \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_2) \dot{s}_2 - c_{i3} \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_3) \dot{s}_3 - c_{i4} \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_4) \dot{s}_4 \\ & - k_{i1} \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_1) s_1 - k_{i2} \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_2) s_2 - k_{i3} \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_3) s_3 - k_{i4} \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_4) s_4 \\ & = \sum_{i=1}^n \left[\frac{a_2 m_b}{2} g \Phi_i(x_1) + \frac{a_2 m_b}{2} g \Phi_i(x_2) + \frac{a_1 m_b}{2} g \Phi_i(x_3) + \frac{a_1 m_b}{2} g \Phi_i(x_4) \right] \end{aligned}$$

b) 비틀림변위 운동방정식

$$\begin{aligned} & \ddot{w}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{w}_i + \omega_i^2 w_i - c_{i1} \sum_{i=1}^n e_1 \Phi_{ti}(x_1) \dot{s}_1 - c_{i2} \sum_{i=1}^n e_2 \Phi_{ti}(x_2) \dot{s}_2 - c_{i3} \sum_{i=1}^n e_3 \Phi_{ti}(x_3) \dot{s}_3 - c_{i4} \sum_{i=1}^n e_4 \Phi_{ti}(x_4) \dot{s}_4 \\ & - k_{i1} \sum_{i=1}^n e_1 \Phi_{ti}(x_1) s_1 - k_{i2} \sum_{i=1}^n e_2 \Phi_{ti}(x_2) s_2 - k_{i3} \sum_{i=1}^n e_3 \Phi_{ti}(x_3) s_3 \\ & = \sum_{i=1}^n \left[e_1 \frac{a_2 m_b}{2} g \Phi_i(x_1) + e_2 \frac{a_2 m_b}{2} g \Phi_i(x_2) + e_3 \frac{a_1 m_b}{2} g \Phi_i(x_3) + e_4 \frac{a_1 m_b}{2} g \Phi_i(x_4) \right] \end{aligned}$$

◆ 차량의 운동방정식

a) s_1 상대변위 운동방정식

$$\begin{aligned} & H_1 \ddot{s}_1 + H_2 \ddot{s}_2 + H_3 \ddot{s}_3 + H_4 \ddot{s}_4 + c_{i1} \dot{s}_1 + k_{i1} s_1 + \sum_{i=1}^n [H_1 \Phi_i(x_1) + H_2 \Phi_i(x_2) + H_3 \Phi_i(x_3) + H_4 \Phi_i(x_4)] \ddot{q}_i \\ & + \sum_{i=1}^n [e_1 H_1 \Phi_{ti}(x_1) + e_2 H_2 \Phi_{ti}(x_2) + e_3 H_3 \Phi_{ti}(x_3) + e_4 H_4 \Phi_{ti}(x_4)] \ddot{w}_i + \sum_{i=1}^n 2v [H_1 \Phi_i'(x_1) \\ & + \sum_{i=1}^n 2v [e_1 H_1 \Phi_{ti}'(x_1) + e_2 H_2 \Phi_{ti}'(x_2) + e_3 H_3 \Phi_{ti}'(x_3) + e_4 H_4 \Phi_{ti}'(x_4)] \dot{w}_i \\ & + \sum_{i=1}^n v^2 [H_1 \Phi_i''(x_1) + H_2 \Phi_i''(x_2) + H_3 \Phi_i''(x_3) + H_4 \Phi_i''(x_4)] q_i \\ & + \sum_{i=1}^n v^2 [e_1 H_1 \Phi_{ti}''(x_1) + e_2 H_2 \Phi_{ti}''(x_2) + e_3 H_3 \Phi_{ti}''(x_3) + e_4 H_4 \Phi_{ti}''(x_4)] w_i = 0 \end{aligned}$$

b) s_2 상변위 운동방정식

$$\begin{aligned} & H_2 \ddot{s}_1 + H_1 \ddot{s}_2 + H_4 \ddot{s}_3 + H_3 \ddot{s}_4 + c_{i2} \dot{s}_2 + k_{i2} s_2 + \sum_{i=1}^n [H_2 \Phi_i(x_1) + H_1 \Phi_i(x_2) + H_4 \Phi_i(x_3) + H_3 \Phi_i(x_4)] \ddot{q}_i \\ & + \sum_{i=1}^n [e_1 H_2 \Phi_{ti}(x_1) + e_2 H_1 \Phi_{ti}(x_2) + e_3 H_4 \Phi_{ti}(x_3) + e_4 H_3 \Phi_{ti}(x_4)] \ddot{w}_i \\ & + \sum_{i=1}^n 2v [H_2 \Phi_i'(x_1) + H_1 \Phi_i'(x_2) + H_4 \Phi_i'(x_3) + H_3 \Phi_i'(x_4)] \dot{q}_i \\ & + \sum_{i=1}^n 2v [e_1 H_2 \Phi_{ti}'(x_1) + e_2 H_1 \Phi_{ti}'(x_2) + e_3 H_4 \Phi_{ti}'(x_3) + e_4 H_3 \Phi_{ti}'(x_4)] \dot{w}_i \\ & + \sum_{i=1}^n v^2 [H_2 \Phi_i''(x_1) + H_1 \Phi_i''(x_2) + H_4 \Phi_i''(x_3) + H_3 \Phi_i''(x_4)] q_i \\ & + \sum_{i=1}^n v^2 [e_1 H_2 \Phi_{ti}''(x_1) + e_2 H_1 \Phi_{ti}''(x_2) + e_3 H_4 \Phi_{ti}''(x_3) + e_4 H_3 \Phi_{ti}''(x_4)] w_i = 0 \end{aligned}$$

c) s_3 상대변위 운동방정식

$$\begin{aligned}
 & H_3 \ddot{s}_1 + H_4 \ddot{s}_2 + H_5 \ddot{s}_3 + H_6 \ddot{s}_4 + c_{v3} \dot{s}_3 + k_{v3} s_3 + \sum_{i=1}^n [H_3 \Phi_i(x_1) + H_4 \Phi_i(x_2) + H_5 \Phi_i(x_3) + H_6 \Phi_i(x_4)] \ddot{q}_i \\
 & + \sum_{i=1}^n [e_1 H_3 \Phi_{ti}(x_1) + e_2 H_4 \Phi_{ti}(x_2) + e_3 H_5 \Phi_{ti}(x_3) + e_4 H_6 \Phi_{ti}(x_4)] \ddot{w}_i \\
 & + \sum_{i=1}^n 2v [H_3 \Phi_i'(x_1) + H_4 \Phi_i'(x_2) + H_5 \Phi_i'(x_3) + H_6 \Phi_i'(x_4)] \dot{q}_i \\
 & + \sum_{i=1}^n 2v [e_1 H_3 \Phi_{ti}'(x_1) + e_2 H_4 \Phi_{ti}'(x_2) + e_3 H_5 \Phi_{ti}'(x_3) + e_4 H_6 \Phi_{ti}'(x_4)] \dot{w}_i \\
 & + \sum_{i=1}^n v^2 [H_3 \Phi_i''(x_1) + H_4 \Phi_i''(x_2) + H_5 \Phi_i''(x_3) + H_6 \Phi_i''(x_4)] q_i \\
 & + \sum_{i=1}^n v^2 [e_1 H_3 \Phi_{ti}''(x_1) + e_2 H_4 \Phi_{ti}''(x_2) + e_3 H_5 \Phi_{ti}''(x_3) + e_4 H_6 \Phi_{ti}''(x_4)] w_i = 0
 \end{aligned}$$

d) s_4 상대변위 운동방정식

$$\begin{aligned}
 & H_4 \ddot{s}_1 + H_3 \ddot{s}_2 + H_6 \ddot{s}_3 + H_5 \ddot{s}_4 + c_{v4} \dot{s}_4 + k_{v4} s_4 + \sum_{i=1}^n [H_4 \Phi_i(x_1) + H_3 \Phi_i(x_2) + H_6 \Phi_i(x_3) + H_5 \Phi_i(x_4)] \ddot{q}_i \\
 & + \sum_{i=1}^n [e_1 H_4 \Phi_{ti}(x_1) + e_2 H_3 \Phi_{ti}(x_2) + e_3 H_6 \Phi_{ti}(x_3) + e_4 H_5 \Phi_{ti}(x_4)] \ddot{w}_i \\
 & + \sum_{i=1}^n 2v [H_4 \Phi_i'(x_1) + H_3 \Phi_i'(x_2) + H_6 \Phi_i'(x_3) + H_5 \Phi_i'(x_4)] \dot{q}_i \\
 & + \sum_{i=1}^n 2v [e_1 H_4 \Phi_{ti}'(x_1) + e_2 H_3 \Phi_{ti}'(x_2) + e_3 H_6 \Phi_{ti}'(x_3) + e_4 H_5 \Phi_{ti}'(x_4)] \dot{w}_i \\
 & + \sum_{i=1}^n v^2 [H_4 \Phi_i''(x_1) + H_3 \Phi_i''(x_2) + H_6 \Phi_i''(x_3) + H_5 \Phi_i''(x_4)] q_i \\
 & + \sum_{i=1}^n v^2 [e_1 H_4 \Phi_{ti}''(x_1) + e_2 H_3 \Phi_{ti}''(x_2) + e_3 H_6 \Phi_{ti}''(x_3) + e_4 H_5 \Phi_{ti}''(x_4)] w_i = 0
 \end{aligned}$$

여기서, 운동방정식에 사용된 기호는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{I_{mz}}{4l_v^2} + \frac{m_v}{4} a_2^2 + \frac{I_{mx}}{s_v^2} a_2^2 & H_2 &= \frac{I_{mz}}{4l_v^2} + \frac{m_v}{4} a_2^2 - \frac{I_{mx}}{s_v^2} a_1^2 \\
 H_3 &= -\frac{I_{mz}}{4l_v^2} + \frac{m_v}{4} a_1 a_2 + \frac{I_{mx}}{s_v^2} a_1 a_2 & H_4 &= -\frac{I_{mz}}{4l_v^2} + \frac{m_v}{4} a_1 a_2 - \frac{I_{mx}}{s_v^2} a_1 a_2 \\
 H_5 &= \frac{I_{mz}}{4l_v^2} + \frac{m_v}{4} a_1^2 + \frac{I_{mx}}{s_v^2} a_1^2 & H_6 &= \frac{I_{mz}}{4l_v^2} + \frac{m_v}{4} a_1^2 - \frac{I_{mx}}{s_v^2} a_1^2
 \end{aligned}$$