

유한요소를 이용한 유연보의 동역학적 정식화 및 해석

Dynamic Formulation Using Finite Element and Its Analysis for Flexible Beam

윤 성 호†

Yun, Seong-Ho

엄 기 상*

Eom, Ki-Sang

(논문접수일 : 2004년 10월 12일 ; 심사종료일 : 2005년 10월 11일)

요 지

본 논문에서는 기하학적으로 비선형인 유연한 Timoshenko 보의 대변위 운동방정식에 유한요소를 사용하여 정식화하였다. 비선형 구속방정식은 라그랑지 상수를 이용하여 운동방정식에 통합되었다. 정식화하는 과정과 수치해석에서 선형과 비선형 영향을 파악하였고, 코리올리스(Coriolis)힘과 회전자(Gyroscopic)힘의 효과는 관성력과 감쇠력과는 달리 일반적인 외력으로 간주하여 해석할 수 있었다. Newmark의 시간적분과 Newton-Raphson 반복법을 사용한 수치예제를 통해 정식화의 효용성을 보여주었다.

핵심용어 : 유한요소정식화, 유연보, Coriolis 힘, Gyroscopic 힘, Newmark 적분법, Newton-Raphson 반복법

Abstract

This paper established the dynamic model of a flexible Timoshenko beam capable of geometrical nonlinearities subject to large overall motions by using the finite element method. Equations of motion are derived by using Hamilton principle and are formulated in terms of finite elements in which the nonlinear constraint equations are adjoined to the system using Lagrange multipliers. The Newmark direct integration method and the Newton-Raphson iteration are employed here for the numerical study which is to demonstrate the efficiency of the proposed formulation.

keywords : finite element formulation, flexible beam, Coriolis force, Gyroscopic force, Newmark integration method Newton-Raphson method

1. 서 론

유연 다물체의 동적해석에 대한 연구는 많은 분야에 응용되고 있다. 대표적인 분야로는 우주 및 항공 구조물, 로봇, 고속운동 기구 등이며, 초기의 연구는 작동시스템에 대한 강체 모델에 집중 되어왔다. 구조물의 작동속도가 고속화되고 경량재료를 사용함에 따라 유연체 모델을 기본으로 한 연구가 많이 이루어지고 있다.

이러한 공학적인 문제를 해결하는데 있어 운동방정식을 해석적으로 풀거나 유한요소를 이용하여 대수적으로 풀어왔다. 그러나 구조물이 복잡하고 대형화됨에 따라 운동방정식을 직접 푸는 방법은 많은 제약을 가지고 있어 유한요소를 이용하는 것이 더욱 유리하다(Bathe, 1996; Reddy, 1993).

구조물의 기본요소가 고속운동을 하면서 변형을 일으킬 때 통상적으로 운동방정식은 비선형적이다. 특히 요소가 회전하면 관성력, 코리올리스(Coriolis) 힘, 회전자(Gyroscopic) 힘의 효과가 고도로 혼합된 형태로 운동방정식에 표현된다(Meriam 등, 1998). 이를 위해 유동좌표계 방법(Floating frame method)과 관성좌표계 방법(Inertial frame method)에 다양한 유한회전(Finite rotation) 표현들이 적용되어 왔다(Yoo 등, 1995; Geradin 등, 2000).

유연체의 운동을 표현할 때 상기의 2개의 좌표계가 사용되는데, 하나는 관성좌표계로서 이는 강체의 대변위(Large displacement)인 병진운동과 회전운동을 표현하고 다른 하나는 유동좌표계로서 운동할 때 재료의 탄성에 의한 변형을 나타내는 것이다(Pal 등, 1996; Liu 등, 2003). 즉, 물체

† 책임저자, 정회원 · 금오공과대학교 기계공학부 부교수

전화: 054-478-7324 ; Fax: 054-478-7319

E-mail: shyun@kumoh.ac.kr

* 금오공과대학교 자동차공학과 석사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2006년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2006년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

에서 절점(Nodal point)에 존재하는 미소체적 안에서 상대적 병진변위와 회전변위를 고려해야 한다. 요소안의 모든 미소체적의 위치 변화와 변형은 관성좌표계와 유한요소 정식화 과정에서 도입된 형상함수(Shape function)로서 표현할 수 있다.

본 논문에서는 대변위 운동에 의한 기하학적 비선형성과 축변형, 굽힘변형, 전단변형을 포함하는 부재인 티모셴코(Timoshenko) 보(Glo1 등, 2002)의 요소에 대하여 에너지 방정식과 가정된 형상함수를 이용하여 유한요소 방정식을 유도할 것이다. 또한 이웃하고 있는 물체사이에 주어진 구속조건을 라그랑지 상수를 도입하여(Lagrange multiplier) 운동방정식에 포함시킬 것이다(Geradin 등, 2000). 아울러 수치해석의 예를 들어 상기의 유한요소 정식화의 적용성 및 효율성을 보여줄 것이다.

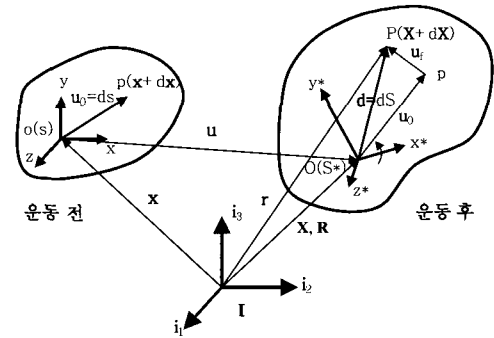


그림 1 유연체의 운동 전과 후의 위치 변화 및 변형

2. 유연체 운동표현

2.1 유연체의 위치 및 변형

그림 1에서 보는 바와 같이 운동 전 물체의 위치벡터 x 가 운동 후 X 로 이동하였을 때, 변위 $u (= X - x)$ 가 발생한다. 라그랑지 관점에서 재료좌표가 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 으로 주어지면, 관성좌표계(Inertia frame) I 에서는 위치벡터가 $x(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_i i_i$, ($i=1, 2, 3$)으로 표현될 수 있다. 변형 전후에서 재료선(Material line)의 기본벡터 g_i 와 G_i 로 각각 정의할 수 있으며, 변위들도 다음과 같이 표현된다.

$$g_i = \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} = i_i; G_i = \frac{\partial X}{\partial \alpha_i} \quad (1a,b)$$

$$u = u_i g_i; x = x_i g_i; X = (x_i + u_i) g_i \quad (2a,b,c)$$

또한, 벡터 d 와 u_0 는 각각 운동 전후의 미소길이이고, 이 변위량 ΔS 를 식 (3a)로 정의하면, 식 (3b)의 Green-Lagrange 변형을 텐서 ϵ_{ij} 와 동일한 표현이 된다(Baazant 등, 1996).

$$\frac{\partial \Delta S}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{d^T d - u_0^T u_0}{2 \partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{1}{2} (G_{ij} - g_{ij}) \quad (3a)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ki} + u_{k,i}) (\delta_{kj} + u_{k,j}) - g_{ij} \quad (3b)$$

R 은 관성좌표계 $I(i_1, i_2, i_3)$ 에 대하여 물체에 부착된 유동좌표계 $S^*(x^*, y^*, z^*)$ 의 오일러 회전각 φ 에 대한 행렬을 의미한다. 그리고 탄성변형 후의 물체상의 위치 P 의 좌표를 q_f , 강체운동에 대한 좌표를 q_r 라고 할때, 좌표계의 집합을 q 로 표현할 수 있다.

$$q = \begin{matrix} q_r \\ q_f \end{matrix}; q_r = [X^T \varphi^T]^T \quad (4a,b)$$

탄성변위 u_f 를 형상함수 N 으로 표현하면, 미소길이 d 와 위치벡터 r 을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u_f = Nq_f \quad (5a)$$

$$d = u_0 + u_f = u_0 + Nq_f \quad (5b)$$

$$r = X + Rd = X + Ru_0 + RNq_f \quad (5c)$$

2.2 에너지 표현식

속도 벡터는 위치 벡터 식 (5c)를 시간에 대하여 미분을 함으로써 다음과 같이 구할 수가 있다(Geradin 등, 2000).

$$\dot{r} = \dot{X} + \dot{R}d + RN\dot{q}_f \quad (6)$$

여기서 둘째 항은 체인룰(Chain rule)를 적용하면 $R_\varphi \dot{\varphi} d$ 로 되며 식 (5)는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{r} = \dot{X} + H\dot{\varphi} + RN\dot{q}_f \quad (7)$$

여기서 $H = R_\varphi d$ 이고 식 (6)을 다음의 행렬식으로 표현한다.

$$\dot{r} = [1 \ H \ RN] X^T \varphi^T q_f^T \quad (8)$$

속도 벡터를 이용하여 요소의 부피 V^e 와 밀도 ρ^e 를 가지는 n 개의 요소로 구성된 물체의 운동에너지 T 는 다음과 같다.

$$T = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \int_{V^e} \rho^e \dot{r}^T \dot{r} dV^e \quad (9)$$

식 (9)에 식 (8)을 대입하여 정리하면 질량행렬과 속도벡

터로 이루어진 운동에너지를 얻을 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (10)$$

여기서, 질량행렬은 아래와 같다.

$$M(q) = \sum_{e=1}^n \int_V \rho^e \begin{bmatrix} 1 & H & RN \\ H^T & H^T H & H^T RN \\ (RN)^T & (RN)^T H & N^T N \end{bmatrix} dV^e \quad (11)$$

변형에너지 V 는 탄성계수행렬 E 와 변형률 벡터 ϵ 으로 표현 할 수 있다.

$$V = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T E \epsilon dV^e \quad (12)$$

식 (5a)을 식 (3b)에 대입시키고, 이를 다시 식 (12)에 대입하여 정리하면 변형에너지 식을 얻을 수 있다.

$$V = \frac{1}{2} q_f^T (K_l + K_n) q_f \quad (13)$$

전체 강성행렬 KK_l 는 선형 강성행렬 K_l 과 대변위에 대한 비선형 강성행렬 K_n 의 합으로 표현됨을 알 수 있다.

2.3 운동방정식

해밀턴 정리에 의해서 다음과 같은 운동방정식을 유도할 수 있다(Fung 등, 1998).

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_i}^{t_f} (V - T) dt \\ = \int_{t_i}^{t_f} \delta W_{ext} dt - \left[\int_V \hat{p}^T \delta q dV \right]_{t_i}^{t_f} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 W_{ext} 는 외력에 의한 일이고, 우변 둘째 항은 외부에서 작용된 초기와 나중시간의 모멘텀 \hat{p} 에 의한 가상일이다. 요소의 표면 S 전체에 작용한 외력 \hat{t} 와 중력 b 에 의한 일은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \int_{t_i}^{t_f} \left[\int_V b^T \delta q dV + \int_S \hat{t}^T \delta q dS \right] dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} Q^T \delta q dt \end{aligned} \quad (15)$$

$$\delta W_{ext} = - \int_{t_i}^{t_f} \delta \phi(q) dt \quad (16)$$

여기서 $\phi(q)$ 는 작용된 외력 Q 에 의한 전체 포텐셜이다.

식 (14)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} (V - T + \phi) dt = 0 \quad (17)$$

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} - \frac{1}{2} q_f^T K q_f + q^T Q + \phi^T \lambda \right] dt = 0 \quad (18)$$

마지막 항은 구속조건에 의해 의한 구속력이다. 부분적분을 수행하고 δq 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$M \ddot{q} + K q_f = Q - \dot{M} \dot{q} + \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + \phi^T \lambda \right] \quad (19)$$

우변의 두 번째와 세 번째 항은 속도의 제곱형태로 되어 있으며, 각각 코리올리스(Coriolis) 힘과 회전자(Gyroscopic) 힘을 의미한다.

3. 2차원 Timoshenko 보의 유한요소 정식화

3.1 요소 표현

일반적인 보와는 달리 전단변형을 고려하기 위하여 Timoshenko 보를 고려하였다. 이에 따른 굽힘변형, 축변형, 전단변형을 고려한 요소 절점에서의 자유도를 그림 2에 나타냈다.

물리좌표계(Physical coordinate) x 와 자연좌표계(Natural coordinate) ξ 에 대하여 보의 길이방향에 대한 자코비안 J 는 다음과 같다.

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad J = \frac{dx}{d\xi} = l \quad (20)$$

i 번째 요소 e 의 중립축 위치에서 변형은 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & \theta_z \end{bmatrix}^T = N^e q^e \quad (21)$$

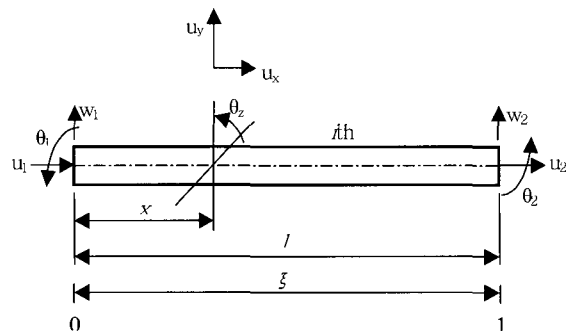


그림 2 Timoshenko 보의 절점 자유도

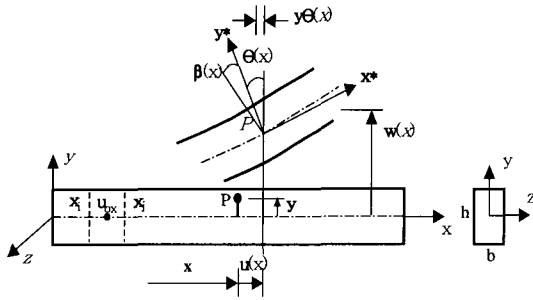


그림 3 Timoshenko 보의 변형

$$N^e = [N_1^e \ N_2^e \ N_3^e]^T \tag{22}$$

여기서 사용되는 형상함수들은 C^0 요소를 적용하기 위하여 모두 선형으로 하였다.

3.2 강성행렬

그림 3은 단면이 균일한 보의 변형을 보여 주고 있다. 중립축 상의 위치 x 에서 보의 횡변형 u_y 는 2개의 효과를 포함하고 있는데, 하나는 굽힘에 의한 것과 전단에 의한 것이다. 중립축으로부터 y 방향의 임의의 점 P 에서 처짐곡선의 기울기는 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \theta(x) + \beta(x) \tag{23}$$

여기서 $\theta(x)$ 는 굽힘에 의한 변형 각이고, $\beta(x)$ 는 전단에 의한 변형각이다. 보에서의 위치 (x, y) 에서 축방향 변형 u_x 과 횡변형 u_y 는 다음과 같다.

$$u_x(x, y) \approx u(x) - y\theta(x) \tag{24}$$

$$u_y(x, y) = w(x, y) \approx w(x) \tag{25}$$

따라서 $u(x)$ 는 점 x 위치의 단면에서 동일한 축변형을 나타낸다. 식 (24)와 식 (25)를 다음의 행렬식으로 할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ \theta \end{bmatrix} \tag{26}$$

식 (21)을 식 (26)에 대입하고 정리하면 아래와 같은 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \end{bmatrix} q_f^e = Nq_f^e \tag{27}$$

고로 형상함수 N 은 다음과 같이 새로이 정의된다.

$$N = \begin{bmatrix} N_1^e - yN_3^e \\ N_2^e \end{bmatrix} \tag{28}$$

식 (3b)에 사용한 Green-Lagrange 변형률 벡터를 2차 원상에서 생각하면 요소 절점 i 와 j 에서 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\epsilon^e = [\epsilon_{xx}^i \ \epsilon_{yy}^i \ \epsilon_{xy}^i \ \epsilon_{xx}^j \ \epsilon_{yy}^j \ \epsilon_{xy}^j]^T \tag{29}$$

상기의 식을 1개 절점에서 선형과 비선형 부분의 미분 연산자인 D_l 과 D_{nl} 로 표현할 수 있다.

$$\epsilon^e = Du_f = (D_l + D_{nl})Nq_f^e \tag{30a}$$

$$D_l^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{30b}$$

$$D_{nl}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{x,x} \frac{\partial}{\partial x} & u_{x,y} \frac{\partial}{\partial y} & 2u_{x,x} \frac{\partial}{\partial y} \\ u_{y,x} \frac{\partial}{\partial x} & u_{y,y} \frac{\partial}{\partial y} & 2u_{y,x} \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{30c}$$

여기서 $(\)_{,x}$ 는 x 에 대한 미분이고, 변형에너지 V 는 식 (12)에 의해서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_{V^e} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy}) dV^e \\ &= \frac{1}{2} \int_{V^e} (E\epsilon_x^2 + kG\gamma_{xy}^2) dV^e \end{aligned} \tag{31}$$

여기서 E 는 탄성계수, G 는 전단계수, k 는 단면의 형상에 따른 전단계수(Shear coefficient)이다. 식 (13)에서 강성행렬 $K(=K_l + K_{nl})$ 는 식 (30)을 식 (12)에 대입한 후 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} K &= \sum_{e=1}^n \int_{V^e} N^T D_l^T E D_l N dV^e \\ &+ \int_{V^e} N^T [D_{nl}^T E D_{nl} + 2D_l^T E D_{nl}] N dV^e \end{aligned} \tag{32}$$

윗 식의 첫째 항은 선형탄성 강성행렬 K_l 이고, 둘째 항은 대변위를 고려한 기하학적인 비선형 강성행렬 K_{nl} 이다.

또한 축방향 변형률 ϵ_x 와 전단 변형률 γ_{xy} 는 변형에너지를 계산하는데 있어서 다음의 공학 변형률을 이용한다.

$$\left\{ \begin{matrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \epsilon_{11} \\ 2\epsilon_{12} \end{matrix} \right\} \tag{33}$$

식 (24)와 (25)을 (33)에 대입하고 식 (30)의 미분 연산자를 이용하여 정리하면 다음의 변형률이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right\}; \\ \gamma_{xy} &= \left(-\theta + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)(-\theta) \end{aligned} \quad (34a,b)$$

식 (34a)는 축방향 변형률 ϵ_a 와 굽힘 변형률 ϵ_b 가 함께 공존하고 있다.

$$\epsilon_a = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \quad (35a)$$

$$\epsilon_b = -y\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(-y\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \quad (35b)$$

식 (34a,b)와 식 (35a)의 첫째 항은 선형이고 나머지 항들은 비선형이다. 식 (34a,b)를 식 (31)의 변형에너지 식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}EA \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] dx \\ &\quad + \frac{1}{2}EI_z \int_0^l \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 \right] dx \\ &\quad + \frac{1}{2}EI_5 \int_0^l \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^4 dx \\ &\quad + \frac{1}{2}kGA \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta\right)^2 + \theta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2\theta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \right\} dx \end{aligned} \quad (36)$$

여기서 I_z 는 z축에 대한 2차 단면모멘트이고, I_5 는 z축에 대한 5차 단면모멘트이다. 선형 변형에 대한 변형에너지를 정리하게 되면 식 (36)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{1}{2}EA \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}EI_z \int_0^l \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2}kGA \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta\right)^2 dx \end{aligned} \quad (37)$$

비선형 변형에 대한 변형에너지는 변형에 큰 영향을 줄 일부 비선형항을 포함하여 다음과 같이 표현하였다.

$$\begin{aligned} V_{nl} &= \frac{1}{2}EA \int_0^l \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4 dx \\ &\quad + \frac{1}{2}E \int_V \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 dV^e \\ &\quad + \frac{1}{2}kGA \int_V 4\theta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 dV^e \end{aligned} \quad (38)$$

자코비안 J 와 함께 식 (21)을 이용하면 다음의 관계식 (39)가 얻어지고, 대표적인 예로서 굽힘강성은 식 (40)로 표현된다.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{J} N_{,\xi}^e q_f^e \quad (39)$$

$$K_{bending} = EI \int_0^1 \frac{1}{J} N_{3,\xi}^T N_{3,\xi} d\xi \quad (40)$$

식 (39)를 식 (37)과 (38)에 대입하고 정리하면 축방향, 굽힘, 전단 강성행렬을 포함하는 전체 변형에너지를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} V &= V_i + V_{nl} \\ &= \frac{1}{2}q_f^T (K_{axial} + K_{bending} + K_{shear}) q_f \end{aligned} \quad (41)$$

상기의 식에서 강성행렬은 식 (32)에 나타난 강성행렬과 동일한 표현이다.

$$K_{axial} + K_{bending} + K_{shear} = K_i + K_{nl} \quad (42)$$

3.3 질량행렬

식 (11)에서 유도된 질량 행렬식에서의 H 행렬은 다음과 같다.

$$H = R_{\varphi} d = \frac{\partial R}{\partial \varphi} (u_0 + Nq_f) \quad (43)$$

i 와 j 절점을 갖는 요소에서 축방향 초기변위 u_0 는 다음과 같이 자연좌표계 ξ 와 물리좌표계 x 로 표현할 수 있다.

$$u_0 = \begin{matrix} u_{0x} \\ u_{0y} \end{matrix} = \begin{matrix} 1-\xi & \xi \\ 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} x_i \\ x_j \end{matrix} \quad (44)$$

식 (44)를 식 (43)에 대입하면 다음 식이 유도된다.

$$H = \left\{ \begin{matrix} -\sin\varphi [(1-\xi)(x_i + u_i - y\theta_i) \\ + \xi(x_j + u_j - y\theta_j)] - \cos\varphi [(1-\xi)w_i + \xi w_j] \\ \cos\varphi [(1-\xi)(x_i + u_i - y\theta_i) \\ + \xi(x_j + u_j - y\theta_j)] - \sin\varphi [(1-\xi)w_i + \xi w_j] \end{matrix} \right\} \quad (45)$$

식 (11)에서 다른 행렬요소도 H, R, N 을 이용하여 구할 수 있다.

3.4 힘 벡터

3.4.1 일반력

일반적인 힘 Q 는 요소의 외력에 의해 물체의 무게 중심에 작용하여 운동을 발생시키는 힘 Q_r 과 물체의 절점에서 변형을 발생시키는 힘 Q_f 로 나눌 수 있다.

$$Q = \begin{bmatrix} Q_x(t) \\ Q_y(t) \\ Q_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_r(t) \\ Q_f(t) \end{bmatrix} \quad (46)$$

힘 Q_f 에 의하여 수행한 일 W_f 는 다음과 같이 표현된다.

$$W_f = \int_0^1 f u_x dx + h [u_x]_{\xi=\xi_h} + \int_0^1 p u_y dx + Q[u_y \theta_z]_{\xi=\xi_Q} + M[\theta_z]_{\xi=\xi_M} \quad (47)$$

여기서 f 는 길이방향의 단위 길이당 힘이고, h 는 ξ_h 에 작용한 길이방향의 집중력, p 는 단위 길이당 횡력, Q 는 ξ_Q 에 작용한 횡방향 집중력, M 은 ξ_M 에 작용한 집중 모멘트이다.

식 (21)을 이용하여 식 (47)의 첫째와 둘째 항의 가상일은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \delta \int_0^1 f (N_1 - y N_3) q_f l d\xi + h [(N_1 - y N_3) q_f]_{\xi=1} \\ & = \left[\frac{1}{2} f l \ 0 - \frac{1}{2} f l y \ \frac{1}{2} f l + h \ 0 - \left(\frac{1}{2} f l + h \right) y \right] \delta q_f \end{aligned} \quad (48)$$

식 (47)의 나머지 항들의 가상일은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \delta \int_0^1 p N_2 q_f l d\xi + Q [N_2 q_f]_{\xi=1} + M [N_3 q_f]_{\xi=1} \\ & = 0 \ \frac{1}{2} p l \ 0 \ 0 \ \frac{1}{2} p l + Q \ M \ \delta q_f \end{aligned} \quad (49)$$

요소의 절점에 대한 일반화된 힘 Q_f 은 다음과 같다.

$$Q_f^{T local} = [Q_{f \ u_i} \ Q_{f \ w_i} \ Q_{f \ \theta_i} \ Q_{f \ u_j} \ Q_{f \ w_j} \ Q_{f \ \theta_j}] \quad (50)$$

유동좌표계로 표현된 힘 Q 를 관성좌표계로 표현하려면 좌표변환 행렬 R 을 곱함으로써 얻을 수 있다.

$$Q_f^{T global} = R Q_f^{T local} \quad (51)$$

3.4.2 코리올리스(Corilolis)힘과 회전자 (Gyroscopic)힘

식 (19)의 운동방정식에서 코리올리스(Corilolis)와 회전

자(Gyroscopic)힘이 소개되었고, 이 힘들을 각각 F_1 과 F_2 로 정의하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F = F_1 + F_2 \quad (52)$$

$$F_1 = - \dot{M} \dot{q} \quad (53)$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T M \dot{q}) \quad (54)$$

3.4.3 기하학적 구속방정식

식 (5c)에서 유연체가 변형한 후의 위치벡터 r 을 이용하여 기하학적 구속방정식을 구할 수 있다.

$$\Phi(q) = r - X - R u_0 - R N q_f = 0 \quad (55)$$

4. 시간 적분 절차

Newton-Raphson의 반복법(김철 등, 2001)을 이용하여 동적시스템을 해석하기 위하여 운동방정식과 구속방정식을 다음과 같이 재정리 하였다.

$$\gamma(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = M \ddot{q} + K q - Q - F = 0 \quad (56)$$

$$\Phi(q) = 0 \quad (57)$$

여기서 γ 는 나머지 벡터이고, 구속방정식을 포함하는 동적문제를 라그랑지 상수 λ 를 이용하여 다음과 같이 비구속화시킬 수가 있다.

$$\gamma(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) - \Phi_q^T(q, t) \lambda = 0 \quad (58)$$

$$\Phi(q) = 0 \quad (59)$$

상기의 동적 평형 방정식과 구속방정식에 대하여 테일러 1차 확장을 수행하여 시간 t^* 일 때 다음과 같이 선형방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} -\gamma^* &= \left[\frac{\partial \gamma}{\partial q} \right]_q \Delta q + \left[\frac{\partial \gamma}{\partial \dot{q}} \right]_{\dot{q}} \Delta \dot{q} + \left[\frac{\partial \gamma}{\partial \ddot{q}} \right]_{\ddot{q}} \Delta \ddot{q} \\ & - \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial q^2} \Big|_q \lambda^* \Delta q - \frac{\partial \Phi^T}{\partial q} \Big|_q \Delta \lambda \end{aligned} \quad (60)$$

$$-\Phi^* = \frac{\partial \Phi}{\partial q} \Big|_q = B \Delta q \quad (61)$$

시스템의 운동방정식과 구속방정식에 대한 시간적분을 적용하기 위한 Newmark의 차분공식(Bathe, 1996)은 다음과 같다.

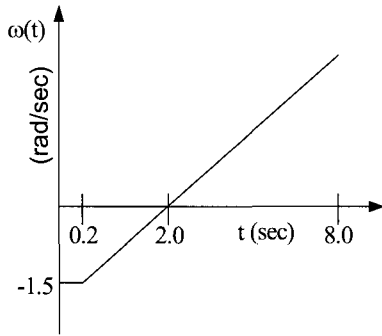


그림 5a 오일러 보와 비교하기 위하여 주어진 회전속도의 시간함수

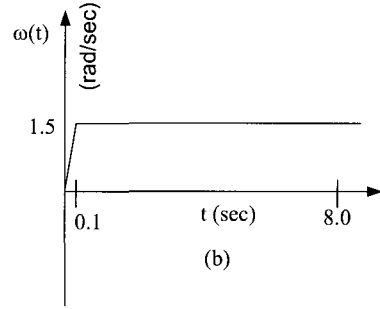


그림 5b 선형과 비선형성을 비교하기 위하여 주어진 회전속도의 시간함수

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + (1 - \gamma)h\ddot{q}_n + \gamma h\ddot{q}_{n+1} \quad (62)$$

$$q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + \frac{1}{2}(1 - 2\beta)h^2\ddot{q}_n + \beta h^2\ddot{q}_{n+1} \quad (63)$$

여기서 h 는 시간 간격이고 β 와 γ 는 상수이다. 위의 식 (62)과 (63)로부터 Δq 와 $\Delta \dot{q}$, $\Delta \ddot{q}$ 사이의 관계식을 얻을 수가 있으며, 식 (60)를 Δq 와 $\Delta \lambda$ 의 항으로 정리된 행렬식으로 만들 수 있다. 이 때, 접선강성행렬(Tangent stiffness matrix) K_T 는 식 (65)로 표현하였고 기하학적인 비선형 탄성효과를 포함하고 있다.

$$-\gamma^* = \left(\frac{\partial M}{\partial q} + K_T \right) \Delta q + B^T \Delta \lambda \quad (64)$$

$$K_T = \frac{M}{\beta h^2} + \frac{\partial K}{\partial q} + K - \frac{\partial F}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\gamma}{\beta h} - \left[\frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial q} \right]_q \lambda^* \quad (65)$$

상기의 식과 식 (61)를 통합한 행렬식에서 Δq 와 $\Delta \lambda$ 를 변수로 하는 대수방정식을 얻을 수 있다.

우선 시간 t_{n+1} 에서의 가속도 예측자(Predictor)는 식 (58)로부터 얻은 \ddot{q}_n 을 사용하고, 식 (66a)에 입력된다. 이 예측자로부터 속도와 변위의 예측자를 식 (66b,c)로부터 차례로 구할 수 있다. 또한 라그랑지 상수 λ_{n+1} 의 예측자 초기값으로 λ_n 으로 식 (66d)와 같이 설정한다.

$$\ddot{q}_{n+1}^i = \ddot{q}_n \quad (66a)$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + (1 - \gamma)h\ddot{q}_n + \gamma h\ddot{q}_{n+1} \quad (66b)$$

$$q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + \frac{1}{2}(1 - 2\beta)h^2\ddot{q}_n + \beta h^2\ddot{q}_{n+1} \quad (66c)$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n \quad (66d)$$

시간 t_{n+1} 에서의 예측값을 이용하여 평형방정식과 구속방정식에 대입하여 나머지 벡터 γ^* 와 Φ^* 를 구한 후에 나머지 벡터가 수렴하지 않을 경우, 식 (60)과 식 (61)로 구성된 통합행렬식을 이용하여 증분값인 Δq 와 $\Delta \lambda$ 를 구한다. 그 다음 이 값을 이용하여 다음의 식 (67a,b,c,d)인 수정자(Corrector)들을 얻는다. 이 수정자들을 다시 평형방정식과 구속방정식에 대입시켜 나머지 벡터가 수렴할 때까지 반복계산을 수행하게 된다. 여기서 본 알고리즘을 구현하기 위하여 포트란 언어를 사용하였다.

$$\ddot{q}_{n+1}^{k+1} = \ddot{q}_{n+1}^k + \Delta \ddot{q} = \ddot{q}_{n+1}^k + \frac{1}{\beta h^2} \Delta q \quad (67a)$$

$$\dot{q}_{n+1}^{k+1} = \dot{q}_{n+1}^k + \Delta \dot{q} = \dot{q}_{n+1}^k + \frac{\gamma}{\beta h} \Delta q \quad (67b)$$

$$q_{n+1}^{k+1} = q_{n+1}^k + \Delta q \quad (67c)$$

$$\lambda_{n+1}^{k+1} = \lambda_{n+1}^k + \Delta \lambda \quad (67d)$$

5. 수치해석 예

유연체의 모델은 한 끝단에서 회전만 가능한 보가 그림 4와 같이 중력가속도가 $g = -9.81m/sec^2$ 작용하고 있다. 그림 5a는 오일러 보와의 비교를 위하여, 그림 5b는 선형과 비선형성을 비교하기 위하여 시간에 따른 각속도에 대한 함수를 보여주고 있다. 이 때 동적거동으로부터 발생하는 재료의 변



그림 4 단일요소의 유연체 모델

형을 보고자 한다. 재료의 밀도 $\rho = 7.82 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 탄성 계수 $E = 2.068 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, 단면의 폭 $b = 0.01 \text{ m}$, 단면의 높이 $h = 0.04 \text{ m}$, 길이 $l = 1 \text{ m}$, 시간간격 $\Delta t = 0.01 \text{ sec}$, $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$ 로 정했다. 중력이 작용하는 상태에서 그림 5a와 5b와 같이 회전속도 $\omega(t)$ 로 구동한다.

그림 6은 모델에서 길이에 대하여 폭과 높이의 비가 각각 100과 25인 보의 끝단에서 축변위, 굽힘변위, 회전각을 관찰한 것이다. 오일러 보와 비교하였을 때 거의 동일한 변위량을 가진다. 모델의 형상비가 비교적 크게 채택한 오일러 보와 같이 거동함을 알 수 있어 해석의 신뢰도를 얻을 수 있었다. 그림 7은 끝단에서의 축변형을 보여주는데, 선형의 경우 초기 회전시 변형량의 변화가 급격하지만 비선형인 경우는 비교적 안정된 변형량을 가진다. 그러나 비선형의 경우 부가된 비선형 항이 축강성의 감소를 초래하여 변형량이 상대적으로 크게 관찰되었다. 그림 7과 8은 요소 끝단에서의 굽힘변형과 전단변형을 보여주고 있다. 비선형의 경우 모든 시간영역에서 변형량이 무시할 정도로 매우 작은 값을 알 수 있다. 형상비가 큰 보에서는 전단변형은 거의 무시될 수 있으므로 해석치는 타당하다고 판단된다. 그러나 선형의 경우 전단변형량은 주기적으로 심하게 변하고 있다. 그러나 비선형 항을 추가함으로써 선형의 경우로부터 야기되는 전단변형의 오차가 거의 제거되었음을 알 수 있다. 굽힘변형

의 경우도 비선형 항을 추가함으로써 굽힘강성의 증가를 초래하여 변형량은 매우 작게 관측되었다. 3개 변형량에 대한 관찰에서 비선형의 경우 축강성은 감소하며 굽힘강성과 전단강성은 증가시킨다. 따라서 변형량을 측정시 비선형의 항을 얼마나 많이 추가하느냐에 따라서 선형의 경우와의 차이도 이에 의존될 것으로 예측된다. 또한, 중력방향과 그 반대방향으로 회전할 때 변형량의 차이를 보면, 중력 방향으로 회전할 때 변형량이 상대적으로 크게 나타난다. 선형의 경우 주기적으로 제로이하의 큰 값이 나타나므로 그 현상을 잘 설명해 주고 있다.

6. 결 론

본 논문은 대변위 운동시 회전운동으로 인한 운동방정식에 유한요소 정식화를 수행하였다. 유연체에서 대변위의 동적 거동을 해석하고자 유한요소를 이용하여 다음과 같은 결과를 도출 할 수 있었다.

- 1) 유연체로서 2차원 Timoshenko 보를 선택하여 C^0 요소를 사용하고 구속조건을 통합하는 운동방정식에 대하여 유한요소를 이용하여 정식화하는 과정과 수치해석에서 선형과 비선형 경우의 영향을 파악하였다.
- 2) 유한요소 방정식의 코리올리스(Coriolis) 힘과 회전자(Gyroscopic) 힘의 효과는 관성력과 감쇠력과는 달

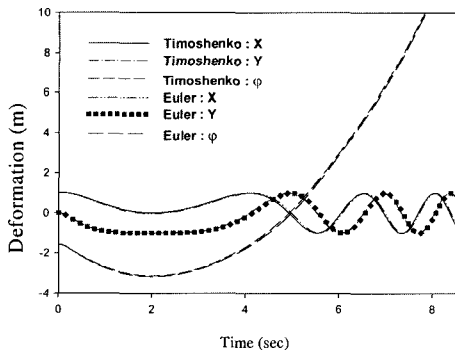


그림 6 오일러 보와의 비교를 위한 요소 끝단에서의 변위

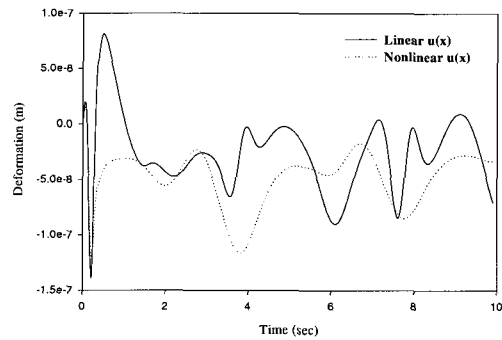


그림 7 요소의 끝단에서의 축변형

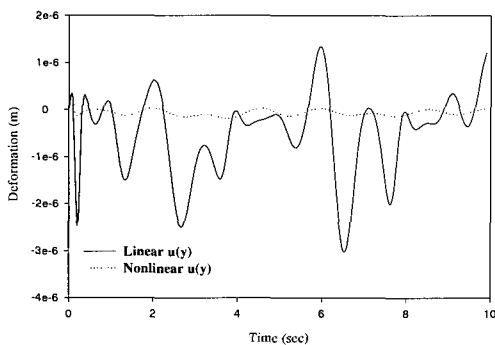


그림 8 요소의 끝단에서의 굽힘변형

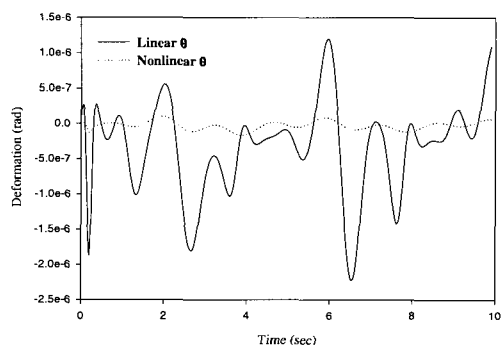


그림 9 요소의 끝단에서의 전단변형

리 일반적인 외력으로 간주하여 해석할 수 있었다.

- 3) 수치해석을 수행하고자 Newmark 적분법과 Newton-Raphson 반복법에 예측자와 수정자를 도입하여 상기의 유한요소 방정식을 적용하고 Euler 보와 비교하여 양호한 결과를 얻었다.
- 4) 해석의 정확성을 높이기 위해서는 강성행렬의 비선형항을 더욱 추가하고 변형에 대한 고차원의 형상함수를 적용하여 그 영향을 관찰할 필요성이 있다.
- 5) 회전에 대한 적절한 유한회전 텐서와 모든 방향 변형에 대한 자유도를 고려함으로써 3차원 보에 대한 해석의 틀을 마련하였다.

후 기

본 연구는 2004년도 금오공과대학교 학술연구비에 지원에 의하여 연구된 논문임.

참 고 문 헌

- 김철, 김태국, 신동신, 이승배 공학도를 위한 수치해석, 3판, 한국맥그로힐, pp.153~158.
- Baazant Zdenk P.(1996) Finite strain generalization of small strain constitutive relations for any finite strain tensor and additive volumetric-deviatoric split, *International J. of Solids and Structures*, 33, pp.2887~2897.
- Bathe, K.J. (1996) Finite Element Procedures, Prentice Hall, Inc., pp.148~212, pp.768~784.

- Fung, R. F., Chang, H. C.(1999) Dynamics Modeling of a nonlinearly constrained flexible manipulator with a tip mass by Hamilton's principle, *J. of Sound and Vibration*, 216, pp.751~769
- Geradin, M., Cardona, A.(2000) Flexible Multi-body Dynamics, *Jhon Wiley & Sons, Ltd.*, pp.44~65, pp.67~88.
- Golo, G. V., Talasila, A. J., Schaft V. D.(2002) A Hamiltonian formulation of the Timoshenko beam model, Proc. of Mechatronics, University of Twente, The Netherlands, pp.24~26.
- Liu, J.Y., Hong, J.E.,(2003) Geometric stiffening of flexible link system with large overall motion, *J. of Computers & Structures*, 81, pp.2829~2841.
- Meriam, J. L., Kraige, L. G.(1998) Engineering Mechanics Dynamics, 4th ed., *John Wiley & Sons, Inc.* p.395, p.581.
- Michel Geradin, and Alberto Cardona, (2000) Flexible Multibody Dynamics, *Jhon Wiley & Sons, Ltd.*, pp.144~150.
- Pal, P. F., Palazotto, A. N.(1996) Large deformation analysis of flexible beams, *International J. of Solids and Structures*, 33, pp.1335~1353.
- Reddy, J. N.(1993) Finite Element Method, 2nd ed., *McGRAW-HILL, Inc.*, pp.143~166.
- Yoo H. H., Ryan R. R., Scott R. A.(1995) Dynamics of flexible beams undergoing overall motions, *Journal of Sound and Vibration*, 181(2), pp.261~278.