

海鏡細艸解 概觀

群山大學校 名譽教授 柳寅永

群山大學校 大學院
koseungj@kunsan.ac.kr 高承駿

하늘을 원으로 제한하거나 한정하는 것은 원시대의 리치에 의해서 리유와 함께 새로운 네 가지의 법칙으로는 풀지 못하였다. 조선 시대의 남병철은 해경에서의 원 측정 문제와 그의 동생인 남병길에 의해서 서문에 쓰여졌다.

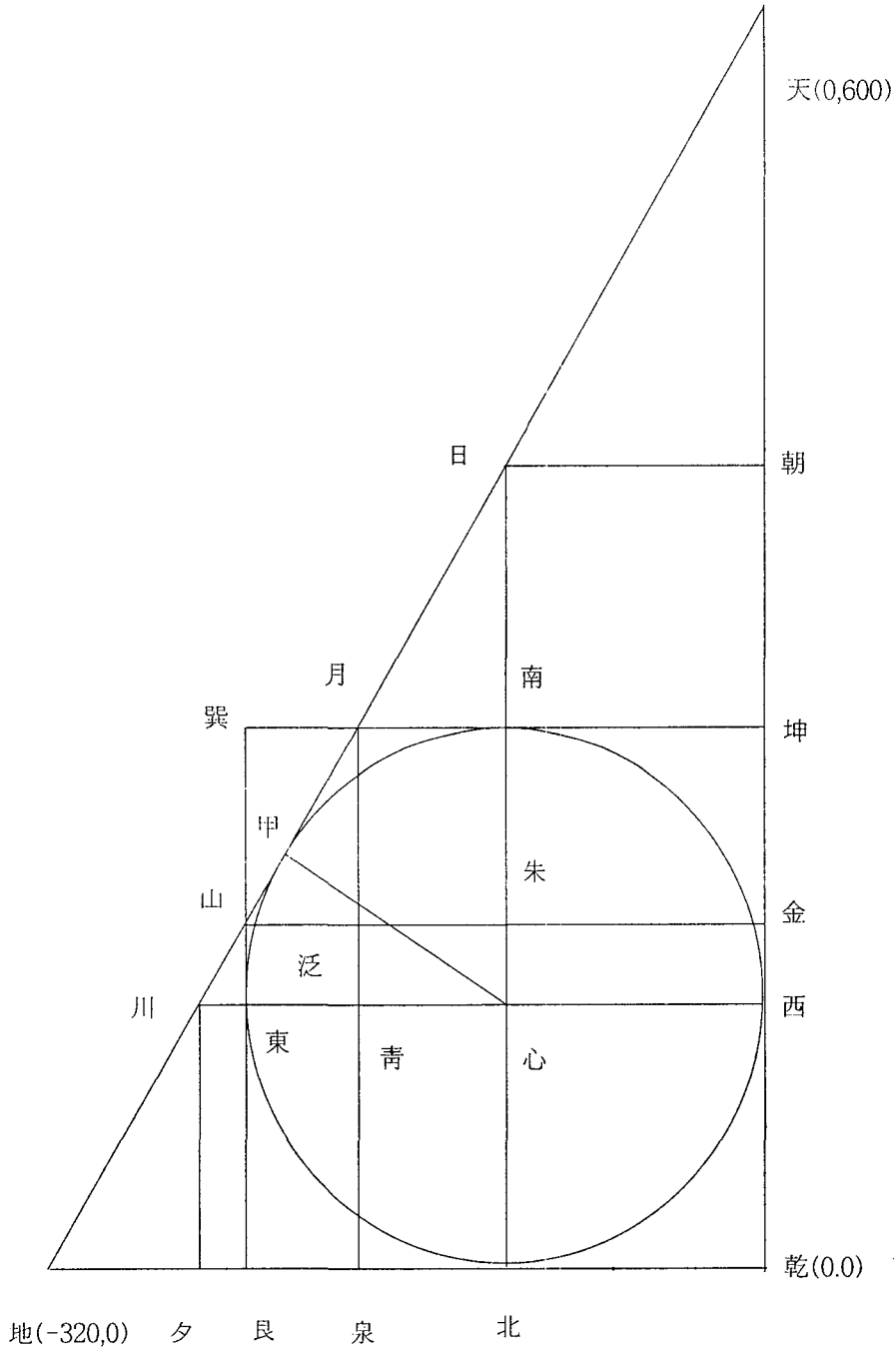
이 논문에서는 해경에서의 문제의 개념과 그것의 세 가지 문제를 소개할 것이다.

주제어 : 해경, 해경세초해

0. 순서

1. 원성도식
 2. 점의 좌표화
 3. 점의 좌표
 4. 17개의 닳은 삼각형과 구, 고, 현을 각각 x_i , y_i , z_i 라고 하면
 5. 근사값을 갖는 삼각형의 변의 비교
 6. 海鏡細艸解의 안내
 7. 李銳의 신설 4개 율의 비교
 8. 그 중의 3문 풀이
 9. 결론
- 참고 문헌

1. 원성도식



2. 점의 좌표화

(1) 기본 3점; 天(0, 600), 乾(0, 0), 地(-320, 0)

(2) 3직선의 식; 天乾식; $x=0$ ……(a)

地乾식; $y=0$ ……(b)

天地식; $y = \frac{15}{8}x + 600$ ……(c)

△天地乾에서 구고현을 각각 x, y, z 라고 하면 $x=320, y=600, z=680$

內接圓의 지름을 $2r$ 이라고 하면

$$2r = 東西 = 南北 = 艮乾 = 坤乾 = 巽艮 = 巽坤 = x + y - z = 320 + 600 - 680 = 240$$

(3) 巽坤직선식; $y=240$ ……(d)

巽艮직선식; $x = -240$ ……(e)

日北직선식; $x = -120$ ……(f)

川西직선식; $y=120$ ……(g)

(4) 山 = (c) ∩ (e) = (-240, 150); 山金직선식; $y=150$ ……(h)

月 = (c) ∩ (d) = (-192, 240); 月泉직선식; $x = -192$ ……(i)

日 = (c) ∩ (f) = (-120, 375); 日朝직선식; $y=375$ ……(j)

川 = (c) ∩ (g) = (-256, 120); 川夕직선식; $x = -256$ ……(k)

*心甲직선식; $y = -\frac{8}{15}x + 56$ ……(l)

甲 = (c) ∩ (l) = (-225.88235, 176.47058)

甲地 = 200 = 北地 (地에서의 接線)

3. 点의 座標

天(0, 600), 乾(0, 0), 地(-320, 0),

朝(0, 375), 日(-120, 375),

坤(0, 240), 南(-120, 240), 月(-192, 240), 巽(-240, 240),

*甲(-225.88235, 176.47058),

金(0, 150), 朱(-120, 150), 泛(-192, 150), 山(-240, 150),

西(0, 120), 心(-120, 120), 靑(-192, 120), 東(-240, 120), 川(-256, 120),

乾(0, 0), 北(-120, 0), 泉(-192, 0), 艮(-240, 0), 夕(-256, 0), 泉(-192, 0),

地(-320, 0)

4. 17개의 닦은 삼각형과 구, 고, 현을 각각 x_i, y_i, z_i 라고 하면

- (1) 통구고; \triangle 天地乾, $x=320, y=600, z=630$
- (2) 변구고; \triangle 天川西, $x_1=256, y_1=480, z_1=544$
- (3) 저구고; \triangle 日地北, $x_2=200, y_2=375, z_2=425$
- (4) 황광구고; \triangle 天山金, $x_3=240, y_3=450, z_3=510$
- (5) 황장구고; \triangle 月地泉, $x_4=128, y_4=240, z_4=272$
- (6) 상고구고; \triangle 天日朝, $x_5=120, y_5=225, z_5=255$
- (7) 하고구고; \triangle 日山朱, $x_6=120, y_6=225, z_6=255$
- (8) 대칭고구고; \triangle 日心甲, $x_7=120, y_7=225, z_7=255$
- (9) 상평구고; \triangle 月川靑, $x_8=64, y_8=120, z_8=136$
- (10) 하평구고; \triangle 川地夕, $x_9=64, y_9=120, z_9=136$
- (11) 대칭평구고; \triangle 心川甲, $x_{10}=64, y_{10}=120, z_{10}=136$
- (12) 대차구고; \triangle 天月坤, $x_{11}=192, y_{11}=360, z_{11}=408$
- (13) 소차구고; \triangle 山地艮, $x_{12}=80, y_{12}=150, z_{12}=170$
- (14) 황극구고; \triangle 日川心, $x_{13}=236, y_{13}=255, z_{13}=289$
- (15) 태허구고; \triangle 月山泛, $x_{14}=48, y_{14}=90, z_{14}=102$
- (16) 명구고; \triangle 日月南, $x_{15}=72, y_{15}=135, z_{15}=153$
- (17) 예구고; \triangle 山川東, $x_{16}=16, y_{16}=30, z_{16}=34$

* $x_5 = x_6 = x_7 = 120, y_5 = y_6 = y_7 = 225, z_5 = z_6 = z_7 = 255$
 $\therefore \triangle$ 天日朝 $\equiv \triangle$ 日山朱 $\equiv \triangle$ 日心甲

* $x_8 = x_9 = x_{10} = 64, y_8 = y_9 = y_{10} = 120, z_8 = z_9 = z_{10} = 136$
 $\therefore \triangle$ 月川靑 $\equiv \triangle$ 川地夕 $\equiv \triangle$ 心川甲

5. 근사값을 갖는 삼각형의 변의 비교

(1) \triangle 日心甲; 日(-120, 375), 心(-120, 120), 甲(-225.88235, 176.47058)

日心; $z_7 = 255$

$$\begin{aligned} \text{心甲; } x_7 = r &= \sqrt{(-225.88235 + 120)^2 + (176.47058 - 120)^2} = \sqrt{14,399.998} \\ &= 119.99999 \doteq 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{日甲; } y_7 &= \sqrt{(-225.88235 + 120)^2 + (176.47058 - 375)^2} = \sqrt{50,625.002} \\ &\doteq 225 \end{aligned}$$

(2) \triangle 心川甲; 心(-120, 120), 川(-256, 120), 甲(-225.88235, 176.47058)

心川; $z_{10} = 136$

心甲; $y_{10} = r \doteq 120$

$$\begin{aligned} \text{甲川; } x_{10} &= \sqrt{(-256 + 225.88235)^2 + (120 - 176.47058)^2} = \sqrt{4,095.992} \\ &= 63.99994 \doteq 64 \end{aligned}$$

6. 海鏡細艸解의 안내

南乘哲편의 해경세초해는 동생인 南乘吉(1820~1869)이 해경세초해서(序)에서 元(1271~1368)대의 학사 이경재가 지은 測圓海鏡으로 원의 내외의 15구고형을 분해하고 변화와 결합하여 170개의 문제를 만들어 자세히 초를 달았다고 하고 中國歷代算學集成 上の 측원해경간술에서 측원해경 12권은 金(1115~1234) 元시대 李治가 지어 서기 1248년 가을에 책이 되었다고 한다. 이 책에서 李治는 직각삼각형을 나누어서 14개의 닦은 작은 삼각형을 만들어 692개의 식별잡기를 써서 9종의 원과 닦은 직각삼각형에 접하는 공식을 얻고 692개의 식별잡기는 692개의 기하공식에 해당한다고 했다.

李治(1192~1279)의 자는 인경(仁卿), 호는 경재(敬齋)이다. 금·원 시기 란성인(蘭城人)으로 대흥성(北京)에서 낳다. 18~19세기에 측원해경은 이예(李銳)가 해설하고 4개의 신률을 첨가 정돈한다. 이예(李銳, 1768~1817, 中國歷代算學集成 中)에는 자가 상지(尙之), 호가 사향(四香), 다른 이름이 이향(李向)으로 원화인이다. 저서는 천원구고세초가 있다.

해경세초해에 해설된 문제는 170문이다. 이예의 신설 1률은 같은(합동) 구고가 4쌍이 있다. 그러나 남은 2률 3률과 4률은 같은 작은 닦은 도형은 없다. 그러므로 $170 \times 5 = 850$ 문보다는 적은 문제이다.

7. 李銳의 신설 4개 율의 비교

제1율	제2율	제3율	제4율
天(0, 480)	天(0, 720)	天(0, 1344)	天(0, 3600)
乾(0, 0)	乾(0, 0)	乾(0, 0)	乾(0, 0)
地(-360, 0)	地(-300, 0)	地(-392, 0)	地(-810, 0)
天乾式; $x=0$	天乾式; $x=0$	天乾式; $x=0$	天乾式; $x=0$ …①
地乾式; $y=0$	地乾式; $y=0$	地乾式; $y=0$	地乾式; $y=0$ …②
天地式;			
$y=4x/3+480$	$y=12x/5+720$	$y=24x/7+1344$	$y=40x/9+3600$ …③
天地乾의 구고현	天地乾의 구고현	天地乾의 구고현	天地乾의 구고현
$x=360, y=480,$ $z=600$	$x=300, y=720,$ $z=780$	$x=392, y=1344,$ $z=1400$	$x=810, y=3600,$ $z=3690$
황방			
$2r=x+y-z=240$	$2r=x+y-z=240$	$2r=x+y-z=336$	$2r=x+y-z=720$
巽坤직선식; $y=240$	巽坤직선식; $y=240$	巽坤직선식; $y=336$	巽坤직선식; $y=720$ …④
巽艮式; $x=-240$	巽艮式; $x=-240$	巽艮式; $x=-336$	巽艮式; $x=-720$ …⑤
日北式; $x=-120$	日北式; $x=-120$	日北式; $x=-168$	日北式; $x=-360$ …⑥
川西式; $y=120$	川西式; $y=120$	川西式; $y=168$	川西式; $y=360$ …⑦
山(-240, 160)	山(-240, 144)	山(-336, 192)	山(-720, 400)
山金直線; $y=160$	山金直線; $y=144$	山金直線; $y=192$	山金直線; $y=400$ …⑧
月(-180, 240)	月(-200, 240)	月(-294, 336)	月(-648, 720)
月川直線; $x=-180$	月川直線; $x=-200$	月川直線; $x=-294$	月川直線; $x=-648$ …⑨
日朝直線; $y=320$	日朝直線; $y=432$	日朝直線; $y=768$	日朝直線; $y=2000$ …⑩
川夕直線; $x=-270$	川夕直線; $x=-250$	川夕直線; $x=-343$	川夕直線; $x=-729$ …⑪
心甲;	心甲;	心甲;	心甲;
$y=-3x/4+30$	$y=-5x/12+70$	$y=-7x/24+119$	$y=-9x/40+279$ …⑫
甲(-216, 192)	(-230.76923, 166.15384)	(-329.28, 215.04)	(-711.21951, 439.0238)
甲地 $\leq 240 =$ 北地	甲地 $\leq 180 =$ 北地	甲地 $\leq 224 =$ 北地	甲地 $\leq 450 =$ 北地
他座標; 朝(0, 320)	他座標; 朝(0, 432)	他座標; 朝(0, 768)	他座標; 朝(0, 2000)
日(-120, 320)	日(-120, 432)	日(-168, 768)	日(-360, 2000)
坤(0, 240)	坤(0, 240)	坤(0, 336)	坤(0, 720)
南(-120, 240)	南(-120, 240)	南(-168, 336)	南(-360, 720)
巽(-240, 240)	巽(-240, 240)	巽(-336, 336)	巽(-720, 720)
金(0, 160)	金(0, 144)	金(0, 192)	金(0, 400)

(제1울)	(제2울)	(제3울)	(제4울)
朱 (-120, 160)	朱 (-120, 144)	朱 (-168, 192)	朱 (-360, 400)
泛 (-180, 120)	泛 (-200, 144)	泛 (-294, 192)	泛 (-648, 400)
西 (0, 120)	西 (0, 120)	西 (0, 168)	西 (0, 360)
心 (-120, 120)	心 (-120, 120)	心 (-168, 168)	心 (-360, 360)
青 (-180, 120)	青 (-200, 120)	青 (-294, 168)	青 (-648, 360)
東 (-240, 120)	東 (-240, 120)	東 (-336, 168)	東 (-720, 360)
川 (-270, 120)	川 (-250, 120)	川 (-343, 168)	川 (-729, 360)
北 (-120, 0)	北 (-120, 0)	北 (-168, 0)	北 (-360, 0)
泉 (-180, 0)	泉 (-200, 0)	泉 (-294, 0)	泉 (-648, 0)
艮 (-240, 0)	艮 (-240, 0)	艮 (-336, 0)	艮 (-720, 0)
夕 (-270, 0)	夕 (-250, 0)	夕 (-343, 0)	夕 (-729, 0)
△天地乾(通勾股)	△天地乾(通勾股)	△天地乾(通勾股)	△天地乾(通勾股)
			변의 비교
360;480;600	300;720;780	392;1344;1400	810;3600;3690
△天川西(邊勾股)	△天川西(邊勾股)	△天川西(邊勾股)	△天川西(邊勾股)
270;360;450	250;600;650	343;1176;1225	729;3240;3321
△日地北(底勾股)	△日地北(底勾股)	△日地北(底勾股)	△日地北(底勾股)
240;320;400	180;432;468	224;768;800	450;2000;2050
△天山金(黃廣勾股)	△天山金(黃廣勾股)	△天山金(黃廣勾股)	△天山金(黃廣勾股)
240;320;400	240;576;624	336;1152;1200	720;3200;3280
△月地泉(黃長勾股)	△月地泉(黃長勾股)	△月地泉(黃長勾股)	△月地泉(黃長勾股)
180;240;300	100;240;260	98;336;350	162;720;738
△天日朝(高勾股)≡ △日山朱≡△日心甲	△天日朝(高勾股)≡ △日山朱≡△日心甲	△天日朝(高勾股)≡ △日山朱≡△日心甲	△天日朝(高勾股)≡ △日山朱≡△日心甲
120;160;200	120;288;312	168;576;600	360;1600;1640
△月川青(平勾股)≡ △川地夕≡△心川甲	△月川青(平勾股)≡ △川地夕≡△心川甲	△月川青(平勾股)≡ △川地夕≡△心川甲	△月川青(平勾股)≡ △川地夕≡△心川甲
90;120;150	50;120;130	49;168;175	81;360;369
△天月坤(大差勾股)	△天月坤(大差勾股)	△天月坤(大差勾股)	△天月坤(大差勾股)
180;240;300	200;480;520	294;1008;1050	648;2880;2952
△山地艮(小差勾股)	△山地艮(小差勾股)	△山地艮(小差勾股)	△山地艮(小差勾股)
120;160;200	60;144;156	56;192;200	90;400;410
△日川心(皇極勾股)	△日川心(皇極勾股)	△日川心(皇極勾股)	△日川心(皇極勾股)
150;200;250	130;312;338	175;600;625	369;1640;1681

(제1을)	(제2을)	(제3을)	(제4을)
△月山泛(太虛勾股) 60;80;100	△月山泛(太虛勾股) 40;96;104	△月山泛(太虛勾股) 42;144;150	△月山泛(太虛勾股) 72;320;328
△日月南(明勾股) 60;80;100	△日月南(明勾股) 80;192;208	△日月南(明勾股) 126;432;450	△日月南(明勾股) 288;1280;1312
△山川東(예勾股) 30;40;50	△山川東(예勾股) 10;24;26	△山川東(예勾股) 7;24;25	△山川東(예勾股) 9;40;41

8. 그 중의 3문 풀이

第一; 甲乙俱在乾 乙東行三百二十步 甲南行六百步 望見乙與城參直 問城徑幾何 下諸條問皆倣此 句股容圓法

해 1) 현화교 = $2r = x + y - z = 320 + 600 - 680 = 240$ ($z^2 = x^2 + y^2$)

해 2) △天地乾 = △天心地 + △天心乾 + △乾心地
 $\therefore 1/2 \times 600 \times 320 = 1/2 \times (680r + 600r + 320r), \quad 2r = 240$

第八; 甲乙俱在巽 乙西行四十八步 甲北行九十步 弦外容圓法

해 1) 太虛구고 △月山泛 ≡ △山月巽이고 구고현을 각 x_{14} y_{14} z_{14} 라고 하면
 $z_{14} =$ 月甲(=月南= b) + 甲山(=山東= a) = $b + a$, $y_{14} =$ 月青 - 泛青 = $r - a$,
 $x_{14} =$ 山朱 - 泛朱 = $r - b$,
 太虛三事和 = 太虛弦和和 = $x_{14} + y_{14} + z_{14} = r - a + r - b + a + b = 2r = 240$
 $[(a + b)^2 = (r - a)^2 + (r - b)^2 = 48^2 + 90^2 = 10404 \quad \therefore a + b = 102]$

해 2) △巽月山 = △巽山心 + △巽月心 - △月山心
 $\therefore 1/2 \times 48 \times 90 = 1/2 \times (90r + 48r - 102r), \quad 2r = 240$

卷五第十六; 南門外有槐 東門外有柳 二樹相去 二百八十九步 有人從乾南行 六百步 草云

해 1) △天山金에서 天西 = 天甲; $600 - r$, 天山 = $600 + a - r$, 天金 = $600 - r - a$, 山金 = $2r$

$$a = \frac{r^2}{600 - r} \dots\dots ①$$

△日山朱 ∞ △天山金, 山朱 = r, 山金 = 2r, 日朱 = 日甲 = 289 - a - z(山川),
 天金 = 600 - r - a

$$z = \frac{r - a - 22}{2} \dots\dots ②$$

△山川東 ∞ △日山朱, 山川 = z, 日山 = 289 - z, 山東 = a, 日朱 = 289 - a - z,
 $a(289 - z) = z(289 - a - z) \dots\dots ③ \leftarrow ②$

$$622r - r^2 - 13200 = (1778 + a - 2r)a \dots\dots ④ \leftarrow ①$$

$$(622r - r^2 - 13200)(600 - r)^2 = r^2[r^2 + (2r - 1778)(r - 600)],$$

$$H(r) = r^4 - 1200r^3 + 544,600r^2 - 59,940,000r + 1,188,000,000 = 0,$$

$$H(120) = 0, r = 120, 2r = 240$$

해 2) 해 1의 ①과 ②를 이용하고

△日川心에서 東川 = x라고 하면 日川 = 289, 日心 = 289 - z, 川心 = x + r,

$$289^2 = (x + r)^2 + (289 - z)^2,$$

$$289(r - a) = 6358 + r^2 + 2rx + 2x^2 + a^2 \dots\dots ③$$

여기서 $z^2 = x^2 + a^2$ 이다.

$$\triangle 月山泛에서 r^2 = ra + (r + a)b \dots\dots ④$$

△山川東 ∞ △月山泛에서 $x/a = r - b/r - a, x = a(r - b)/r - a \dots\dots ⑤ \leftarrow ④$

$$x = \frac{2ra^2}{r^2 - a^2} \dots\dots ⑥ \leftarrow ①$$

$$x = \frac{r^3}{600(300 - r)} \dots\dots ⑦, ① \rightarrow ③$$

$$289 \times \left(r - \frac{r^2}{600 - r} \right) = 6358 + r^2 + 2r \times \frac{r^3}{600(300 - r)}$$

$$+ 2 \times \left(\frac{r^3}{600(300 - r)} \right)^2 + \left(\frac{r^2}{600 - r} \right)^2,$$

$$\frac{578r(300 - r)}{600 - r} = 6358 + r^2 + \frac{r^4}{300(300 - r)} + \frac{r^6}{180,000(300 - r)^2} + \frac{r^4}{(600 - r)^2},$$

$$LCM = 180,000(600 - r)^2(300 - r)^2,$$

$$H(r) = r^8 - 1,800r^7 + 1,620,000r^6 - 968,040,000r^5 + 448,804,440,000r^4$$

$$- 144,652,392,000,000r^3 + 26,834,554,800,000,000r^2$$

$$- 2,056,246,560,000,000,000r + 37,079,856,000,000,000,000 = 0,$$

$$H(120) = 0, r = 120, 2r = 240$$

9. 결론

해경은 취급 대상은 단순해도 사고방법과 과정이 다양하다. 님은 직각삼각형에서 비를 달리하면 이예가 만든 신륵처럼 또 다른 신륵을 얼마든지 만들 수 있을 것이다.

참고 문헌

1. 韓國科學技術史資料大系
2. 中國歷代算學集成

Introduction to the Concepts of the Problems in the *Sea Mirror*

Kunsan National University **In-Yeong Yoo**

Kunsan National University **Seung-Jun Ko**

Sea Mirror, reflecting the heaven of the circles circumscribed or inscribed, by Li Zhi of Yuan Dynasy(1271~1368) was resolved by Li Rui(1773~1817) and added by the new four rules not solved. In the Chosun Dynasty, Nam Byung Churl resolved the problems of the *Sea Mirror* of the circle measurement and the preface was written by his younger brother Nam Byung Gil(1820~1869).

In this paper, the concepts of the problems in the *Sea Mirror* and its three problems will be introduced.

Key words: the concepts of the problems in the *Sea Mirror*

2000 Mathematics Subject Classification: 01A25

논문 접수: 2004년 11월 25일, 심사 완료: 2005년 1월