산대셈과 수판셈*

광운대학교 수학과 허 민
mher@kw.ac.kr

과거에 계산 도구의 주종을 이루었던 수판과 산대의 역사를 간략하게 알아본다. 그리고 산대셈과 수판셈의 원리와 방법을 곱셈과 나눗셈을 중심으로 구체적인 예를 통해 소개하고 비교한다. 이를 통해 수판셈의 원리는 산대셈으로부터 전승되었음을 확인하고, 수판의 교육적 가치를 모색한다.

주제어: 수판, 수판셈, 산대, 산대셈, 보승법, 인법, 유두승법, 상제법, 구귀법, 귀제법, 신외가법, 신외감법, 가승법, 감제법

0. 머리말

고대의 수 체계는 수를 효율적이고 경제적으로 표현하는 데 부족할 뿐만 아니라 그 자체를 조작해서 연산하기가 거의 불가능했다. 이에 따라 수의 표기와는 별도로 효율적인 계산을 위한 보조 도구가 필요했는데, 대표적인 것이 수판(주판, 산판)[1]이며 특히 동양에서는 산대(산가지, 산목)가 사용되었다.

0.1. 수판의 역사

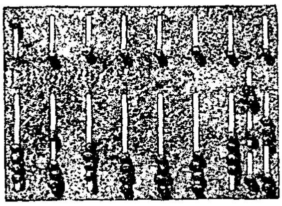
그리스 살라미스 섬에서 발견된 대리석 산판(기원전 4세기)

수판의 역사는 매우 오래되어 3000～4000년 전의 메소포타미아에서는 모래 또는 땅 위에 줄을 긋고 돌을 올려놓는 모래 산판을 이용했다. 2500년 전의 이집트, 그리스, 로마 등에서는 나무나 돌 판 위에 줄을 긋고 그 위에 뼈나 상아로 만든 작은 공을 놓고 계산하는 선 수판을 이용했다. 그 뒤 로마에서는 아래의 그림과 같이 청동 판 위에 홈을 파고 단추와 같은 공을 부착한 홈 수판을 이용했다[20, pp. 10～15]. 유럽에서 수판은 인도·아라비아 수 체계가 전래되고 널리 보급된 뒤인 18세기에는 자취를 감추게 된다. 그 뒤 19세기에 러시아의 수판이 퐁슬

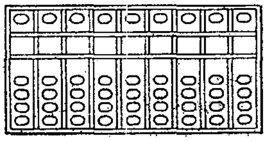
* 이 논문은 2003년도 광운대학교 교내학술연구비에 의하여 연구되었음.
1) 1970년대의 교과서에서는 '주판'과 '주산'을, 그 뒤에는 '수판'과 '수판셈'이라 하고 있다.

레(J.V. Poncelet, 1788~1867)에 의해 다시 도입되었다[21, p. 166]. 수판(abacus)에 관한 자세한 역사는 [22, pp. 156~192]를 참조하라.

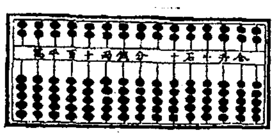
로마의 홈 수판이 비단길을 통해 중국으로 전해졌다고 하는 주장도 있지만, 그 진위는 확실치 않다. 어쨌든, 한나라의 서악(徐岳)이 지은 『수술기유』(數術記遺, 2세기)에 오늘날과 비슷한 형태의 수판 사용법이 기록되어 있고, 그 뒤에 『철경록』(輟耕錄, 1366년)과 『괴년대상사언잡자』(魁年對相四言雜字, 1371년)에도 수판이 언급되어 있다 [20, pp. 19~21]. 명나라 때 발간된 정대위(程大位)의 『산법통종』(算法統宗, 1592년)에도 수판의 사용법이 기록되어 있다. 중국에서는 명나라 때부터 상업의 발달과 함께 수판이 널리 이용되었다.



로마의 수판

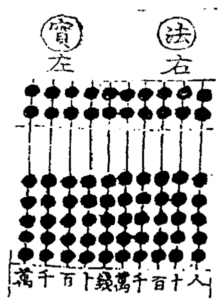


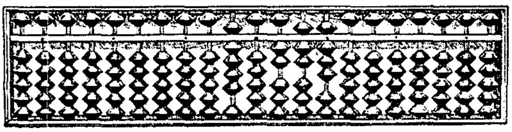
『수술기유』의 수판도



『산법통종』의 수판도

우리나라에는 고려 시대에 수판이 이용된 흔적이 있다고 한다. 최석정(1646~1715)의 『구수략』(九數略)에 주산에 대한 기록이 보인다[15, 곤, p. 146]. 우리나라에서 수판은 19세기에야 널리 이용되기 시작한 것으로 보인다.

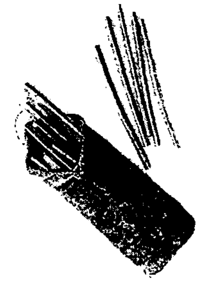




일본 수판

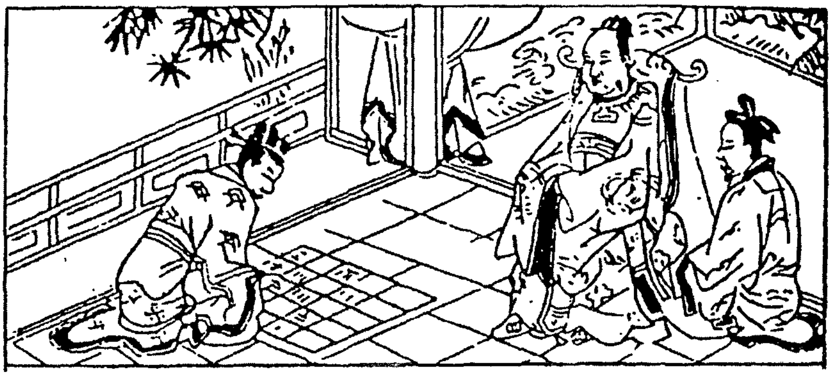
0.2. 산대의 역사

산대는 중국에서 기원전 1000년경부터 사용되었는데, 고대에는 대나무를 둥글게 깎아서 지름이 1푼(分)이고 길이가 6치(寸)로 [271개를 한 묶음으로] 만들었는데, 그 뒤 점차로 작아졌으며 나무를 세모꼴로 깎아 만들기도 하였다. 산대를 산(筭, 算) 또는 주(籌)라 하여, 해당하는 한자는 모두 대죽변(竹)에 속해있다. 수학을 중국인들은 산학 또는 주학이라고 하였다. (오른쪽 사진은

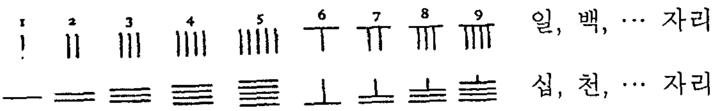


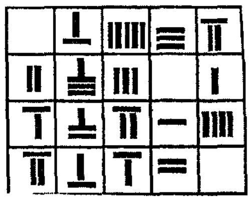
한양대학교 박물관에 소장되어 있는 산대이다.[2])

산대를 보자기에 싸 가지고 다니다가 수학 문제를 풀기 위해 계산을 하려면, 보자기를 풀어 펴고 그 위에 산대로 수를 표시하고 이리저리 산대를 옮기면서 계산하였기 때문에 이를 포산(布算)이라고 한다. (아래 사진은 일본의 한 산학 책에 있는 포산 장면을 보여주는 삽화이다[22, p. 173].)



산대로 수를 나타낼 때는 일, 백, 만…의 자리의 수는 아래 그림의 첫 행과 같이 세우고, 십, 천…의 자리의 수는 둘째 행과 같이 옆으로 뉘어서 표현했다. 그리고 6 이상은 편의를 위해 위쪽에 5를 나타내는 산대를 놓는다.[3]





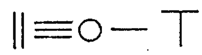
예를 들면, 오른쪽 그림의 산판에 나타낸 수는 위로부터 차례로 6537, 28301, 67714, 76620을 나타낸다. 여기서 알 수 있듯이, 0을 빈 자리로 나타낸다.

중국에서는 고대부터 음수를 사용했는데, 『구장산술』(九章算術)에도 음수가 등장한다. 양수와 음수를 구별하기 위해서, 양수는 빨간 산대로 음수는 검은 산대로 나타냈다. 또는 일의 자리를 나타내는 산대 위에 다른 산대를 비스듬히 올려놓는 방법으로 음수를 나타내기도 했다.

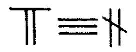
산대는 중국에서는 명나라의 15세기 중반까지 그리고 우리나라에서는 19세기에도 계산 수단의 대종을 이루었다.

2) 과학동아, 2000년 3월, p. 104.
3) 산대에 관한 일반적인 사항은 [5, pp. 23~28]을 참조했다.

한편, 송 · 원 시대(960~1367)에는 산대에 의한 수 표시를 그대로 옮겨 쓴 주식(籌式) 숫자가 등장했다. 오른쪽과 같이, 이 경우에 각 숫자 사이에 간격을 두지 않고 꼭 붙여 썼으며, 빈 자리는 기호 ○로 나타내고,[4] 음수는 마지막 숫자에 빗금을 그어 나타냈다. 이와 같은 수 표현이 송 · 원 대와 그 이후의 산학서에 매우 많이 등장한다.



23016



−732

이 글에서는 산대와 수판에서 곱셈과 나눗셈을 시행하는 방법을 구체적으로 예시하고자 한다.[5] 이를 통해 수판셈(주산)의 용어와 원리가 산대셈으로부터 전승되었음을 확인하고, 수판의 교육적 가치를 모색하고자 한다.

산대셈은 조선시대의 산학서에 나타난 바에 따라 소개하는데, 이 경우에 모든 수는 산대가 아니라 편의에 따라 인도 · 아라비아 숫자로 나타내겠다. 수판셈(주산)은 그동안 상업계 고등학교에서 사용한 교과서인 『상업 계산』에서 발췌한 예를 인용해서 예시하겠다.

산대셈에서는 법(곱수, 나눗수)의 형태에 따라 다양한 계산 방법을 이용했는데, 그 계산 방법의 명칭을 최석정의 『구수략』에 따라 정리하면 다음 표와 같다. [이 글에서는 법이 한 자리와 두 자리 수인 경우만 예시하겠다.]

	곱셈(乘) (양陽)	나눗셈(除) (음陰)
정수(正數) 삼격산(三格筭)	보승법＝승법＝영산＝이보법 곱셈 구구 이용	상제법 곱셈 구구 이용
변수(變數) 이격산(二格筭)	인법 곱수가 한 자리 수 곱셈 구구 이용	구귀법＝귀법 나눗수가 한 자리 수 나눗셈 구구 이용
	신외가법＝가법 곱수의 가장 큰 자리의 수가 1	신외감법＝감법＝정신제법 나눗수의 가장 큰 자리의 수가 1
	유두승법＝승법 곱수가 일반적인 경우 둘째로 큰 자리의 수부터 곱함	귀제법＝제법 나눗수가 일반적인 경우 구귀법과 당귀 · 기일법 활용

4) 남송 진구소(秦九昭)의 『수서구장』(數書九章, 1247)에 처음 등장했다.
5) 덧셈과 뺄셈 방법은 [11, pp. 8~9]를 참조하라.

1. 곱셈

1.1. 곱셈 구구

고대의 곱셈 구구는 9×9=81에서 시작해서 2×2=4에서 끝난다. 오른쪽 그림에 나타낸 한(漢)대의 죽간에서 알 수 있듯이[19, p. 14], 1~2세기까지도 이와 같았다. 곱셈 구구가 1×1=1까지 확장된 것은 5세기와 10세기 사이로, 4~5세기에 발간된 작자미상의 산학 책 『손자산경』(孫子算經)에 이와 같은 꼴이 있다.

송(宋)대의 13세기 또는 14세기에 이 순서가 역전되어 현재와 같이 1×1=1부터 시작해서 9×9=81로 끝나는 곱셈 구구로 바뀌었다. 예를 들면, 조선 시대의 법령집인 『경국대전』(經國大典)에 산학 채용고시의 출전으로 명시되어 있는 『양휘산법』(楊輝算法), 『산학계몽』(算學啓蒙), 『상명산법』(詳明算法)에는 모두 이와 같은 순서로 곱셈 구구가 나열되어 있다[1, p. 3].

1.2. 산대의 보승법과 수판의 두두승법

<산대의 보승법>

보승법은 곱셈 구구를 이용하는 정통적인 곱셈 방법으로, 상격에 법(法, 곱수, 승수)을 놓고 하격에 실(實, 곱하임수, 피승수)을 놓고 시작한다[5, pp. 31~32].6) 그리고 각 단계의 결과를 중격에 표시해서 최종적인 결과인 적(積, 곱)을 얻는 삼격산이다. 곱셈 78×46을 예를 들어 그 과정을 나타내면 다음과 같다[1, pp, 16~17].

(1) 4 6 7 8	(2) 4 6 7 8	(3) 4 6 3 1 2 7 8	(4) 6 3 1 2 7 8	(5) 6 3 5 4 7 8	(6) 6 3 5 8 8 7 8	(7) 3 5 8 8 7 8
상격에 법, 하격에 실을 놓는다.	법의 4 밑에 실의 8을 놓는다.	2 8 3 2 (+ 3 1 2	4를 지우고, 실을 한 자리 물린다.	3 1 2 4 2 (+ 3 5 4	3 5 4 4 8 (+ 3 5 8 8	

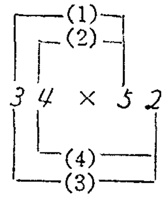
<수판의 두두승법>

수판셈에서도 산대셈의 경우와 같이 용어 법과 실을 사용한다. 산대의 보승법에서는 법의 가장 큰 자리의 수로 실의 가장 큰 자리의 수부터 곱하기 시작한다. 수판에

6) 법을 하격에, 실을 상격에 놓고 곱셈을 시행할 수 있다[11, pp. 9~10]. 곱셈에서는 교환 법칙이 성립하므로 그 결과는 같다.

서 이와 같이 곱셈을 시행하는 방법을 두두승법이라고 한다. [6, p. 27]의 설명과 예를 인용하면 다음과 같다.

> 무포수법[7]으로 가장 많이 쓰이고 있으며 신속한 방법으로 알려져 있다. 실의 머릿수[가장 큰 자리의 수]와 법의 머릿수부터 곱셈 구구를 외워 가며 답만을 주판 위에 놓는 방법이다.
>
> 예: 34×52=1,768
>
> ㄱㄴㄷㄹ
> (1) 1 5 「5・3…15」
> (2) 2 0 「5・4…20」
> (3) 0 6 「2・3…6」
> (4) 0 8 「2・4…8」
> 1 7 6 8



1.3. 산대의 인법・유두승법과 수판의 (파)두승법・신두승법

<산대의 인법>

인법은 법이 한 자리 수인 경우에 적용하는 곱셈 방법으로, 실의 가장 큰 자리의 수부터 작은 자리의 수로 곱하거나 이와 반대로 가장 작은 자리의 수부터 큰 자리의 수로 곱한다. 각 단계의 곱셈 결과로 실을 직접 수정하면서 진행하기 때문에 중격이 필요 없다[1, pp. 45~46].

4 6 2	→ 2×4 =8	8 6 2	→ 2×6 =12	9 2 2

또는

6 4 6	→ 6×4 =24	6 2 4 6	→	6 2 4 6	→ 6×6 =36	3 8 4 6

실의 작은 자리의 수부터 곱하는 방법은 수판셈의 (파)두승법에서 한 자리 수 곱하기와 일치한다([4, pp. 197~198], [6, p. 26]). 이 경우에는 위에서 알 수 있듯이, 어떤 자리와의 곱이 한 자리 수이면 그 자리는 0으로 바꾸고, 두 자리의 수가 되면 그 자리는 곱의 십의 자리의 수로 바꾼다.

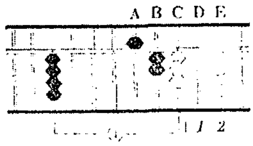
<수판의 신두승법에서 한 자리 수 곱하기>

법과 실의 가장 큰 자리의 수부터 곱하는 두두승법과 달리, 두미승법(=신두승법)에서는 법의 가장 큰 자리의 수로 실의 가장 작은 자리의 수부터 곱하기 시작한다. 한 자리 수를 곱하는 경우에는, 곱한 결과를 (파)두승법보다 한 자리 더 아래에 놓고 원

7) '포수'는 수판 위에 수를 놓는 것을 말한다. (포산에 대응하는 용어다.) 이에 따라 무포수법은 법과 실을 포수하지 않고 각 단계의 계산 결과만을 수판 위에 나타내는 일격산이다.

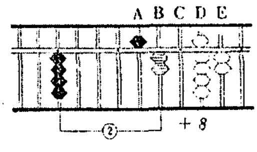
래 자리를 뗀다. 즉, 두승법에서는 곱의 십의 자리가 원래 자리에 위치하는데, 신두승법에서는 곱의 십의 자리가 원래보다 오른쪽으로 한 자리 아래에 위치한다.

[14. p. 32]에서 곱셈 523×4=2,092를 시행하는 과정을 인용하면 다음과 같다.



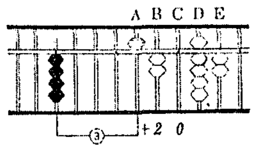
① 실의 끝수[가장 작은 자리의 수] 3과 법의 4를 곱하여 그 곱 12를, 실 3을 떨고 D 자리를 10위[십의 자리]로 DE 자리에 놓는다.

[주판면 52012]



② 실의 2와 법의 4를 곱하여 그 곱 8을, 실 2를 떨고 C 자리를 10위로 D 자리에 더한다.

[주판면 500092]



③ 실의 5와 법의 4를 곱하여 그 곱 20을, 실 5를 떨고 B 자리를 10위로 BC 자리에 놓는다.

<u>답 2,092</u>

수판셈에서는 법을 왼쪽에 실은 오른쪽에 포수한다. 그리고 각 단계의 계산 결과로 실을 수정해서 최종적인 답을 얻으므로, 포수하는 경우에는 이격산이다.

<산대의 유두승법>

[가장 큰 자리인 머리 자리의 수를 유보하고] 법에서 두 번째로 큰 자리의 수와 실의 가장 작은 자리의 수를 곱하고, 그 곱의 십의 자리를 실의 바로 아래 자리에 위치시키는 방법이다. 216×345=74520을 유두승법으로 계산하면 다음과 같다[1, pp. 60~62]. (단, 실의 십의 자리 1 및 백의 자리 2와 법의 곱셈은 결과만 제시했다.)

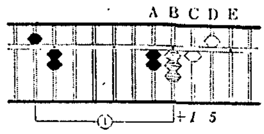
216 345	→ 6×4 =24	21624 345	→ 6×5 =30	216270 345	→ 6×3 =18	211270 + 8 345	→ 2+8 =10	212070 345

→ 1×345 =345	202070 +++ 345 345	→ 2+3=5 0+4=4 7+5=12	205520 345	→ 2×345 =690	005520 +++ 690 345	→ 0+6=6 5+9=14 5+0=5	074520 345

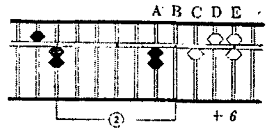
<수판의 신두승법(=두미승법)>

법의 가장 큰 자리의 수부터 곱하고, 그 결과의 십의 자리를 실의 바로 아래 자리에 위치시킨다. 예를 들어 23×52를 신두승법으로 계산하면 다음과 같다[14, p. 33].

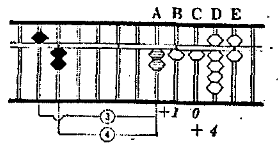
① 실의 끝수 3과 법의 머릿수 5와 곱하여 그 곱 12를, 실 3을 기억하여 둔 후 떨고, C 자리를 10위로 CD 자리에 놓는다.
[주판면 2015]



② 기억한 실의 3을 법의 끝수 2와 곱하여 그 곱 6을, ①에서보다 1자리 오른쪽 D 자리를 10위로 E 자리에 놓는다.
[주판면 20156]



③ 실의 2와 법의 머릿수 5와 곱하여 그 곱 10을, 실 2를 기억하여 둔 후 떨고, B 자리를 10위로 BC 자리에 더한 다음, 계속 법의 끝 수 2와 곱하여 그 곱 4를 C 자리를 10위로 D 자리에 더한다.



답 1,196

2. 나눗셈

2.1. 산대와 수판의 상제법

<산대의 상제법>

상제법은 곱셈 구구 곱셈을 이용하는 정통적인 방법으로, 법(法, 나눗수, 제수)을 하격, 실(實, 나뉨수, 피제수)을 중격, 상(商, 몫)을 상격에 위치시킨다[5, pp. 33~34].

나눗셈 3588÷78=46의 과정을 예로 들어 설명하면 다음과 같다[1, pp. 17~18].

 3 5 8 8 7 8	 3 5 8 8 7 8	4 3 5 8 8 7 8	4 4 6 8 7 8	4 6 4 6 8 7 8	4 6 7 8
78로 35를 나눌 수 없으므로, 한 자리 물린다.	78로 358를 나누어 몫 4를 얻는다.	3 5 8 2 8 (- 7 8 3 2 (- 4 6	법을 한 자리 물린다.	4 6 8 4 2 (- 4 8 4 8 (- 0	

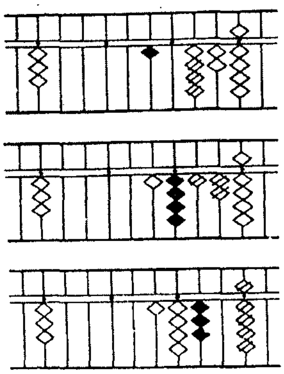
만약 3593÷78을 위와 같이 계산하면 마지막 단계에서 오른쪽과 같은 결과를 얻게 된다. 이는 다음과 같이 몫을 대분수로 나타낼 수 있게 한다.

4 6
5
7 8

$$3593 \div 78 = 46\frac{5}{78}$$

<수판의 상제법>

수판셈에서 상제법의 원리는 산대셈과 같다. 그리고 역시 나눗수를 법, 나뉨수를 실이라 하고, 법을 왼쪽, 실을 오른쪽에 포수하고 계산 결과로 실을 직접 수정함으로써 답을 구한다. 이에 따라 산대의 상제법을 이격산으로 바꾼 것과 같다. 법이 한 자리 수인 경우와 두 자리 수인 경우의 상제법을 예시하면 다음과 같다[7, pp. 28~29].

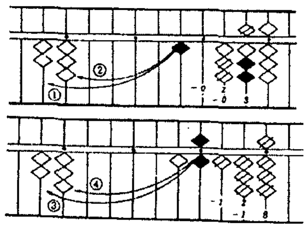


예: 429÷3=143

① 실의 머릿수 4 속에 법의 머릿수 3이 들었으니 한 칸 건너 답 1을 세우고 「1 · 3…3」을 뺀다.

② 다음 나머지 실의 머릿수 1 속에 안 들었으니 바로 앞에 4를 세우고 「4 · 3…12」를 뺀다.

③ 다음 나머지 9 속에 들었으니 한 칸 건너 답 3을 세우고 「3 · 3…9」를 빼면 정답 143이 된다.



예: 368÷23=16

① 실 36과 법 23을 비교하여 법이 작으니 한 칸 건너 1을 세우고 「1 · 2…2」, 「1 · 3…3」을 차례로 자리 맞추어 뺀다.

② 다음 실 13 속에 23이 안 들었으니 13 속에 법 2가 몇 번 들어있는지 알아본다. 6을 가상으로 세우고 「6 · 2…12」, 「6 · 3…18」을 빼면 정답 16을 얻는다.

2.2. 나눗셈 구구

오른쪽 표는 1990년대까지 상업계 고등학교 교과서인 『상업계산』에서 찾아볼 수 있던 나눗셈 구구표(귀제법 구구표)이다. 위의 나눗셈 구구표는 [16, p. 21]과 [17, p. 31]에서 그리고 아래의 귀제 구구표는 [12, p. 32]와 [14, p. 77]에서 찾아볼 수 있다. 그렇지만 1970년대의 교과서인 [14]를 제외하면, 그 뒤에는 이런 나눗셈 구구표를 제시만 했을 뿐이며, 이를 이용하는 나눗셈인 귀제법을 시행하는 구체적인 방법을 설명한 책은 없다.

나눗셈 구구(귀제법 구구)

1단	2단	3단	4단	5단	6단	7단	8단	9단
1진 10	2·1 천작 5	3·1 31	4·1 22	5·1 가1	6·1 하가 4	7·1 하가 3	8·1 하가 2	9·1 하가 1
	2진 10	3·2 62	4·2 천작 5	5·2 가2	6·2 32	7·2 하가 6	8·2 하가 4	9·2 하가 2
		3진 10	4·3 72	5·3 가3	6·3 천작 5	7·3 42	8·3 하가 6	9·3 하가 3
			4진 10	5·4 가4	6·4 64	7·4 55	8·4 천작 5	9·4 하가 4
				5진 10	6·5 82	7·5 71	8·5 62	9·5 하가 5
					6진 10	7·6 84	8·6 74	9·6 하가 6
						7진 10	8·7 86	9·7 하가 7
							8진 10	9·8 하가 8
								9진 10

산학서에서는 이를 구귀제법 또는 구귀구결이라 한다[1, p. 4~5]. 그것과 비교해 보면, 이를테면 '봉구진일십'(逢九進一十)이 '구진일십'으로, 5귀(5단)의 경우 "오일배작이, 오이배작사, 오삼배작륙, 오사배작팔"이 차례로 "오일가일, 오이가이, 오삼가삼, 오사가사"로 바뀌었다. 그리고 '이일첨작오'와 '이일천작오'에서 알 수 있듯이, '첨'이 '천'으로 바뀌었다. 3개 국어인 중국어, 영어, 일본어로 발간된 책 『Knowing Abacus 珠算知多少』[20]에는 중국어로는 '二一添作五'로 그리고 일본어로는 '二一天作五'로 되어 있다. 이에 따라 이 표는 일본의 영향을 받은 것으로 보인다.

귀제 구구표

1단	1 10 진 1)10 10	2 20 진 1)20 20	3 30 진 1)30 30	4 40 진 1)40 40	5 50 진 1)50 50	6 60 진 1)60 60	7 70 진 1)70 70	8 80 진 1)80 80	9 90 진 1)90 90
2단	2:1 5 천작 2)10 5	2 10 진 2)20 10	4 20 진 2)40 20	6 30 진 2)60 30	8 40 진 2)80 40				
3단	3:1 3-1 3)10 31	3:2 6-2 3)20 62	3 10 진 3)30 10	6 20 진 3)60 20	9 30 진 3)90 30				
4단	4:1 2-2 4)10 22	4:2 5 천작 4)20 5	4:3 7-2 4)30 72	4 10 진 4)40 10	8 20 진 4)80 20				
5단	5:1 2 가 5)10 1	5:2 4 가 5)20 2	5:3 6 가 5)30 3	5:4 8 가 5)40 4	5 10 진 5)50 10				
6단	6:1 1-4 하가 6)10 4	6:2 3-2 6)20 32	6:3 5 천작 6)30 5	6:4 6-4 6)40 64	6:5 8-2 6)50 82	6 10 진 6)60 10			
7단	7:1 1-3 하가 7)10 3	7:2 2-6 하가 7)20 6	7:3 4-2 7)30 42	7:4 5-5 7)40 55	7:5 7-1 7)50 71	7:6 8-4 7)60 84	7 10 진 7)70 10		
8단	8:1 1-2 하가 8)10 2	8:2 2-4 하가 8)20 4	8:3 3-6 하가 8)30 6	8:4 5 천작 8)40 5	8:5 6-2 8)50 62	8:6 7-4 8)60 74	8:7 8-6 8)70 86	8 10 진 8)80 10	
9단	9:1 1-1 하가 9)10 1	9:2 2-2 하가 9)20 2	9:3 3-3 하가 9)30 3	9:4 4-4 하가 9)40 4	9:5 5-5 하가 9)50 5	9:6 6-6 하가 9)60 6	9:7 7-7 하가 9)70 7	9:8 8-8 하가 9)80 8	9 10 진 9)90 10

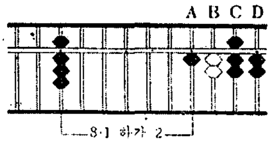
2.3. 산대의 구귀법과 수판의 [법이 한 자리인] 귀제법

나눗셈 구구를 이용하는 산대의 구귀법과 수판에서 법이 한 자리 수인 귀제법은 그 원리가 서로 같다. 산대의 구귀법에 대한 자세한 설명은 [1, pp. 4~8]을 보라. 그 과정을 나눗셈 464÷8=58을 예로 들어 설명하면 다음과 같다[1, p. 6]. 현재의 기호로 나타낸 오른쪽의 식에서 각 과정의 정당성을 확인할 수 있다.

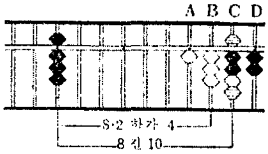
464	예를 들어 '464÷8'을 계산해보자.	$464=400+64$
8	먼저 백의 자리의 4를 보면	$=50\times8+64$
↓	'팔사첨[천]작오'에 의해 4를 5로 바꾼다.	
564	십의 자리 6을 보면 '팔륙칠십사'에	$=50\times8+60+4$
8	의해 6을 7로 바꾸고 아래 자리에	$=50\times8+7\times8+4+4$
↓	4를 더해서 8을 얻는다.	$=57\times8+8$
578	이제 '(봉)팔진일십'에 의해 십의 자리의	$=57\times8+1\times8$
8	7에 1을 더한다.	$=58\times8$
↓		
580	그러면 몫 58과 나머지 0을 얻는다.	
8		

수판셈에서 법이 한 자리인 귀제법을 나눗셈 1,072÷8=134를 예를 들어 설명하면 다음과 같다[14, p. 82].

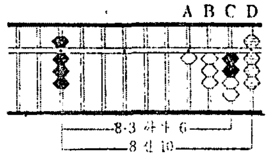
① 법 8과 실의 머릿수 1을 비교하여 8·1 하가 2를 부른 다음, B 자리에 2를 놓는다.
[수판면 1272]



② 법 8과 실의 둘째 자릿수 2를 비교하여 8·2 하가 4를 부른 다음, C 자리에 4를 더하면 11이 되므로, 다시 8 진 10을 불러 C 자리에서 8을 빼고 B 자리에 1을 더하여 3을 만든다. [수판면 1332]



③ 법 8과 실의 셋째 자릿수 3을 비교하여 8·3 하가 6을 부른 다음, D 자리에 6을 더하면 8이 되므로, 다시 8진 10을 불러 D 자리의 8을 떨고 C 자리에 1을 더하여 4을 만든다.
답 134



2.3. 산대의 당귀·기일법과 수판의 작9·귀1법

법이 두 자리 이상인 경우에 귀제법을 시행하기 위해서는 나눗셈 구구 이외에 알아야 할 사항이 더 있다. 예를 들어 나눗셈 3456÷35에서 법의 34와 실의 35와 같이 가장 큰 자리의 수는 서로 같지만 그 다음 자리의 수는 법이 큰 경우에는 아래의 당귀법을 사용하며, 계산 과정에서 기일법을 이용한다. 당귀법과 기일법의 활용 방법은 아래의 예에서 예시하는데, 이에 대응하는 수판셈의 작9·귀1법에 대한 설명에서 그 방법을 충분히 짐작할 수 있다.

● 산대셈의 당귀·기일법(撞歸起一法)[11, pp. 16~19]

당귀법	기일법
一歸爲九十一	無除減一下還一
二歸爲九十二	無除減一下還二
三歸爲九十三	無除減一下還三
四歸爲九十四	無除減一下還四
五歸爲九十五	無除減一下還五
六歸爲九十六	無除減一下還六
七歸爲九十七	無除減一下還七
八歸爲九十八	無除減一下還八
九歸爲九十九	無除減一下還九

위에서 당귀법을 다음과 같이 나타내기도 한다[1, pp. 18~24].

見一無除作九一 1을 보고 나눌 수 없으면 9*1을 짓고,
見二無除作九二 2를 보고 나눌 수 없으면 9*2를 짓고,
見三無除作九三 3를 보고 나눌 수 없으면 9*3을 짓고,
見四無除作九四 4를 보고 나눌 수 없으면 9*4를 짓고,
見五無除作九五 5를 보고 나눌 수 없으면 9*5를 짓고,
見六無除作九六 6을 보고 나눌 수 없으면 9*6을 짓고,
見七無除作九七 7을 보고 나눌 수 없으면 9*7을 짓고,
見八無除作九八 8을 보고 나눌 수 없으면 9*8을 짓고,
見九無除作九九 9를 보고 나눌 수 없으면 9*9를 짓는다.

• 수판셈의 작9·귀 1 법

[14, p. 78]에는 다음과 같은 설명과 함께 이 법칙이 제시되어 있다.

법의 머리 자리와 실 또는 실의 나머지 수를 견주어 법과 실의 머리 자리가 같은 수이고, 법의 다음 수가 실의 다음 수보다 클 때에 다음의 작 9의 구구를 써서 가상[가정된 몫]을 구하고 가상과 법의 다음 자리를 곱해서 빼면 확상[확실한 몫] 또는 진상을 구할 수 있다.

가상과 법의 다음 자리를 곱해서 가상의 아래 자리를 십의 자리로 하여 빼려고 할 때, 빼지지 않을 때에는 귀 1배 몇의 구구를 쓴다. 곱해서 뺄 수 없는 가상에서 1을 빼고, 법의 머리 자리에 해당하는 수를 가상의 다음 자리에 더해 주고, 수정된 가상과 법의 다음 자리를 곱해서 빼어 진상을 얻는다. 만일 가상의 1을 돌려도 뺄 수 없을 때에는 한 번 더 귀 1배 몇을 하고 뺀다.

작 9의 몇 구구법

머리 자리가

1인 때:	작 9의 1	「10÷1=9…1」
2인 때:	작 9의 2	「20÷2=9…2」
3인 때:	작 9의 3	「30÷3=9…3」
4인 때:	작 9의 4	「40÷4=9…4」
5인 때:	작 9의 5	「50÷5=9…5」
6인 때:	작 9의 6	「60÷6=9…6」
7인 때:	작 9의 7	「70÷7=9…7」
8인 때:	작 9의 8	「80÷8=9…8」
9인 때:	작 9의 9	「90÷9=9…9」

귀 1배의 몇 구구법

귀 1 배

1:	1×10=10	1진 10의 역 구구
2:	2×10=20	2진 10의 역 구구
3:	3×10=30	3진 10의 역 구구
4:	4×10=40	4진 10의 역 구구
5:	5×10=50	5진 10의 역 구구
6:	6×10=60	6진 10의 역 구구
7:	7×10=70	7진 10의 역 구구
8:	8×10=80	8진 10의 역 구구
9:	9×10=90	9진 10의 역 구구

2.4. 산대의 귀제법과 수판의 [법이 두 자리 이상인] 귀제법

산대의 귀제법과 수판에서 법이 두 자리 이상인 귀제법은 그 원리가 서로 같다. 산대의 귀제법으로 나눗셈 3456÷35을 시행하면 다음과 같다[1, p. 21].

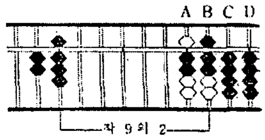
3456	3을 보고 나눌 수 없으면	$3466=3000+456$
35	[당귀법에 따라] 9*3을 짓는다.	$=30\times 90+300+456$
↓	즉 3은 9로 바꾸고, 3을 4에 더한다.	$=30\times 90+756$
9756	나눗수의 일의 자리의 수 5와 9의 곱	$=30\times 90+5\times 90+306$
35	45를 75에서 뺀다.	$=35\times 90+306$
↓		
9306	법을 내리고, 3을 보고 나눌 수 없으면	$=35\times 90+300+06$
35	[당귀법에 따라] 9*3을 짓는다.	$=35\times 90+30\times 9+30+06$
↓	즉 3은 9로 바꾸고, 3을 0에 더한다.	$=35\times 90+30\times 9+36$
9936	나눗수의 일의 자리의 수 5와 9의 곱	
35	45는 36보다 크다. [기일법에 따라]	$=35\times 90+30\times 8+30+36$
↓	9의 1을 3으로 만들어 아래에 더한다.	$=35\times 90+30\times 8+66$
9866	나눗수의 일의 자리의 수 5와 8의 곱	$=35\times 90+30\times 8+5\times 8+26$
35	40을 66에서 뺀다.	$=35\times 90+35\times 8+26$
↓		
9826	그러므로 몫은 98이고 나머지는 26이다.	$=35\times 98+26$
35		

한편, 나눗셈 413÷59에서와 같이 실의 4와 법의 5가 서로 다르면 나눗셈 구구에 따라 시작한다[1, pp. 23~24].

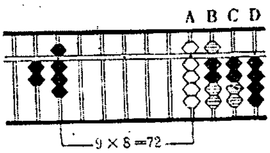
413	구귀법에 따라 5로 4를 나눈다.	$413=400+13$
59	'오사배작팔[오사가사]' 즉 5를 8로	$=50\times 8+13$
↓	만든다.	
813	나눗수의 9와 8의 곱 72는 13보다 크다.	$=50\times 8+50+13$
59	[기일법에 따라] 8에서 1을 세워	$=50\times 7+63$
↓	다음 자리에 5를 더한다.	
763	나눗수의 9와 7의 곱을 63에서 뺀다.	$=50\times 7+9\times 7$
59		$=59\times 7$
↓		
700	그러므로 몫은 7이고 나머지는 0이다.	
59		

수판셈에서 법이 두 자리 수인 나눗셈 2,744÷28=98을 귀제법으로 시행한 예를 인용하면 다음과 같다[14, pp. 83~84].

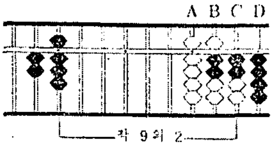
① 법과 실의 머릿수는 같기 때문에 둘째 자릿수를 비교하여 법이 크므로, 작 9의 2를 부른 다음, A 자리에 7을 더하여 9로 만들고 B 자리에 2를 더한다.
[수판면 9944]



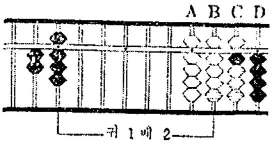
② 가상 9와 법의 끝수 8과 곱하여 그 곱 72를, B 자리를 10위로 BC 자리에서 뺀다.
[수판면 9224]



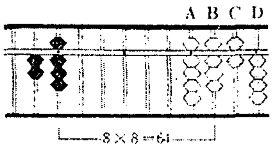
③ 나머지 실의 머릿수와 법의 머릿수가 같기 때문에 실의 C 자리 2와 법의 끝수 8을 비교하면 법이 크므로, 작 9의 2를 불러 B 자리에 7을 더하여 9로 만들고 C 자리에 2를 더한다. [수판면 9944]



④ 가상 9와 법의 끝수 8과 곱하여 그 곱 72를 C 자리를 10위로 하여 빼려 하였으나 빼어지지 않으므로 귀 1배 2를 부른 다음, 가상 9에서 1를 빼는 동시 C 자리에 2를 더하여 6을 만든다.
[수판면 9864]



⑤ 수정한 가상 8과 법의 끝수 8과 곱하여 그 곱 64를 C 자리를 10위로 하여 CD 자리에서 뺀다.
답 98



3. 신외가(감)법과 가승(감제)법

곱셈과 나눗셈에서 법(곱수, 나눗수)의 가장 큰 자리의 수가 1인 경우에는 그 1과의 연산을 생략하고 간편하게 계산하는 방법이 있다.

3.1. 산대의 신외가법과 수판의 가승법

산대의 신외가법은 이를테면 곱셈 365×15의 법에서 1과의 곱셈을 생략하고 365와 5의 곱을 한 자리씩 내려서 365와 더하고 자리를 다시 정하는 방법이다. 이는 곧 아래와 같이 365와 10의 곱 3650에 365와 5의 곱을 더하는 과정과 일치한다[1, pp. 52~53]. 이때, 법 15에서 1을 생략한 5를 생법이라고 한다.

<table>
<tr><td>3 6 5

1 5</td><td>→

5×5
=25</td><td>3 6 5
+ +
2 5
1 5</td><td>→

5+2
=7</td><td>3 6 7 5

1 5</td><td>→

5×6
=30</td><td>3 6 7 5
+ +
3 0
1 5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>→

6+3=9
7+0=7</td><td>3 9 7 5

1 5</td><td>→

3×5
=15</td><td>3 9 7 5
+ +
1 5
1 5</td><td>→

3+1=4
9+5=14</td><td>5 4 7 5

1 5</td></tr>
</table>

산대의 신외가법과 원리가 같은 수판셈으로 가승법이 있다. 가승법으로 곱셈 83×12=996을 시행하는 과정을 인용하면 다음과 같다[14, pp. 129~130].

83×12=83×(10+2)이므로, 실은 이미 10배한 것으로 보고, 83×10의 계산은 생략하여 포수한 실에 83×2의 곱을 더하면 된다.

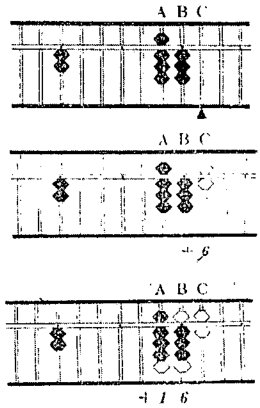
① 생법을 2로 하고, 실을 10배된 곱으로 보면, 곱의 단위는 C 자리가 된다.

② 실의 끝수 3과 생법의 2와 곱하여 그 곱 6을, B 자리를 10위로 C 자리에 더한다. 이 경우 실의 3은 곱의 일부분이므로 빼지 않는다.

[수판면 836]

③ 실의 머릿수 8과 생법의 2와 곱하여 그 곱 16을, A 자리를 10위로 A 자리의 8은 빼지 않고 AB 자리에 더한다.

답 996



3.2. 산대의 신외감법과 수판의 감제법

산대의 신외감법은 이를테면 나눗셈 480÷15=32와 같이 법(나눗수)의 가장 큰 자리의 수가 1인 경우에, 몫(商)인 신(身)을 먼저 정하고 이를 [법의 가장 큰 자리의 수인 1을 제외한] 생법과 곱해서 실(나뉠수)에서 빼는 과정을 반복하는 나눗셈이다. 그 과정을 다음과 같이 순차적으로 나타낼 수 있다[1, pp. 87~88].

<table>
<tr><td>4 8 0

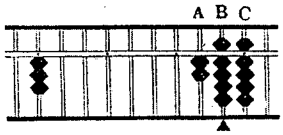
1 5</td><td>→
신: 3
3×5
=15</td><td>(3+1) 8 0
| |
1 5
1 5</td><td>→</td><td>3 3 0

1 5</td><td>→
신: 2
2×5:
=10</td><td>3 (2+1) 0
| |
1 0
1 5</td><td>→</td><td>3 2 0

1 5</td></tr>
</table>

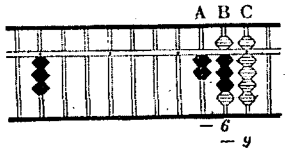
산대의 신외감법과 원리가 같은 수판셈으로 감제법이 있다. 감제법으로 나눗셈 299÷13=23을 시행하는 과정을 인용하면 다음과 같다[14, p. 135].

299÷13=299÷(10+3)이므로, 실 299는 이미 10으로 나눈 것으로 보고, 실로부터 가정한 상과 생법의 3과의 곱을 빼면 된다.



① 생법을 3으로 하고, 실을 10으로 나눈 것으로 보면, 상의 단위를 B 자리가 된다.

② 실의 머릿수 2를 그대로 상으로 가정하고, 생법 3과 곱하여 그 곱 6을, A 자리를 10위로 B 자리에서 뺀 다음, 나머지 실의 머릿수 3을 그대로 상으로 가정하고, 생법 3과 곱하여 그 곱 9를, B 자리를 10위로 C 자리에서 뺀다.



답 23

4. 맺음말

산대는 크고 작은 수를 십진법의 원리에 따라 나타낼 수 있을 뿐만 아니라, 여러 개의 수를 가로와 세로로 자유롭게 나열해서 나타낼 수 있다. 이에 따라 연립 방정식을 계수 행렬의 형태로 나타낼 수 있고, 이를 조작해서 답을 얻을 수 있게 했다. 또, 다항 방정식의 계수들을 세로로 배열하는 천원술을 쉽게 나타낼 수도 있게 했다.

산대로 수학의 많은 연산도 손쉽게 시행할 수 있었기 때문에, 산대는 훌륭한 계산 도구로서의 위치를 오랫동안 지켰었다. 앞에서 살펴본 바와 같이, 수판셈(주산)은 산대셈의 여러 가지 용어를 그대로 이어받았을 뿐만 아니라 그 계산 원리도 산대셈으로부터 거의 그대로 차용했음을 알 수 있다. 유럽에서는 인도·아라비아 수 체계의 보급과 함께 수판이 사라졌었지만, 동양에서는 수판이 매우 최근까지지도 널리 이용되었었다. 이런 이유의 하나로, 동양에서는 매우 효율적인 산대셈이 개발되어 있었고, 이를 수판에 쉽게 적용할 수 있었기 때문이라고 추측할 수도 있다.

최근에 휴대용 계산기와 컴퓨터의 급속한 보급과 함께 수판이 사라지고 있다. 교육과정에서는 제7차에 이르러 수학 교과에서 수판셈이 완전히 사라졌다. 제6차 교육 과정까지도 수판셈이 초등학교 6학년 2학기 수학에 있었고[2, pp. 124~135], 상업계 고등학교에서는 『상업 계산』이라는 과목에서 수판셈을 소개했었다. 그리고 제7차 교육과정에서 이름이 바뀐 교과서 『상업 계산 실무』에서도 수판셈에 대해 간략하게 소개하는 경우는 있다. 그렇지만 제6차 교육 과정의 일부 『상업 계산』에서는 50~60쪽에 달했던 수판셈에 관한 설명이([3], [17]), 제7차 교육 과정의 『상업 계산 실무』에서는 많아야 13쪽[10]이나 9쪽[9]이고 단 2쪽만을 할애한 경우도 있다[18]. 심지어 전혀 언급하지 않는 경우도 있다[13].

반면에 일본에서는 많은 교사와 교육자의 추천에 의해, 1993년 초등학교 3, 4학년에 수판 교육이 채택되었다고 한다[20, pp. 43~45]. 사실, 우리나라를 제외한 동아시아의

많은 나라에서는 아직도 수판 교육을 실시하고 있으며, 특히 시각 장애인을 위한 교육 과정으로 일본과 미국의 일부 학교에서 수판을 가르치고 있다[20, pp. 49~51]. 두뇌 개발과 다양한 수학 능력 개발을 위한 수단으로 수판 교육을 옹호하기도 한다([8], [20]). 십진법 위치 기수법의 이해를 돕는 도구로서 수판의 가치는 이미 서구에서도 인정받고 있다[21, p. 168]. 십진법뿐만 아니라, 윗알만으로는 이진법을 그리고 아래알만으로는 오진법을 훌륭하게 설명할 수 있다. 최근에 수학 교육에서 활동의 중요성이 강조되고 있는데, 이런 용도에서도 수판의 활용 가치를 찾을 수 있을 것으로 생각된다. 수판의 교육적 가치에 대한 연구가 요구된다.

참고 문헌

1. 경선징 저/유인영 · 허민 역, 묵사집산법 천, 한국수학사학회(한국학술진흥재단 보고용 번역서), 2005.
2. 교육부, 수학 6-2, 1997.
3. 권봉상 · 전윤기, 상업 계산[제6차 교육 과정], (주)중앙교육진흥연구소, 1996.
4. 김순식, 상업 일반[제2차 교육 과정], 장왕사, 1967.
5. 김용운 · 김용국, 중국수학사, 대우학술총서 · 자연과학 109, 민음사, 1996.
6. 서정웅, 새로운 주산교본, 문천사, 1971.
7. 서정웅, 상업 계산[제5차 교육 과정], 문호사, 1990.
8. 서정웅, "주산교육의 필요성," 2004. 강연 원고.
9. 안광선 · 이춘덕, 상업 계산 실무[제7차 교육 과정], (주)교학사, 2002.
10. 이기주 · 이금순, 상업 계산 실무[제7차 교육 과정], 상문연구사, 2004.
11. 이상혁 저/홍성사역, 익산 상편, 한국수학사학회(한국학술진흥재단 보고용 번역서), 2005.
12. 전인재 · 손홍명 · 박정원, 상업 계산[제5차 교육 과정], 세계문화사, 1990.
13. 정상천 · 박종일 · 권상수, 상업 계산 실무[제7차 교육 과정], (주)두산, 2002.
14. 조경하 · 김유송 · 홍봉선 · 전인재, 새 상업 계산[제3차 교육 과정, 1973.2.1 문교부 검정], 국정 교과서 주식 회사, 1978.
15. 최석정 저/정해남 · 허민 역, 구수략 건 · 곤, 한국수학사학회(한국학술진흥재단 보고용 번역서), 2005.
16. 최재완, 상업 계산[제5차 교육 과정], 상문사, 1990.
17. 최재완, 상업 계산[제6차 교육 과정], 상문사, 1997.
18. 황욱선 · 배재역 · 이효성, 상업 계산 실무[제7차 교육 과정], 대한교과서(주), 2002.
19. 李儼 · 杜石然 저/郭樹理 · 倫華祥 역, 中國 數學/ *Chinese Mathematics - A concise history*, Clarendon Press, 1987.

20. 張欽梁・連黛玉・黃靖智, *Knowing Abacus* 珠算知多少, 國際珠算聯合會・精英培訓中心, 1994.

21. Eves, H. 저/허민・오혜영 역, 수학의 위대한 순간들 개정판, 경문사, 2003.

22. Smith, D.E., *History of Mathematics* Vol. II, Dover Pub. Inc., 1958.

Counting Rods and Abacus

Department of Mathematics, Kwangwoon University **Min Her**

We briefly survey the history of abacus and counting rods which had been most widespread devices for arithmetical calculations. And we explain and compare the methods and principles of calculation on the abacus and counting rods. Only multiplication and division are presented here with examples. In these course we can see that the principles of calculation on the abacus are inherited from that of calculation on the counting rods. We also discuss the educational value of the abacus.

Key words: counting rods, abacus, multiplication and division methods using counting rods and abacus

2000 Mathematics Subject Classification: 01-08, 01A07

ZDM Subject Classification: A30, F10

논문 접수: 2004년 12월 16일, 심사 완료: 2005년 1월