다중출력 관측불가능 비선형 시스템의 적응관측기 설계기법

Adaptive Observer Design for Multi-Output Unobservable Nonlinear Systems

조 남 훈*
(Nam-Hoon Jo)

Abstract : In this paper, we present an adaptive observer for multi-output nonlinear systems that include unknown constant parameters and are not necessarily observable. Based on generalized nonlinear observer canonical form, new adaptive observer canonical form is proposed. Sufficient conditions are given for a nonlinear system to be transformed into the proposed adaptive observer canonical form. The existence of the proposed adaptive observer is given in terms of Lyapunov-like condition and SPR condition. An illustrative example is presented to show the design procedure of the proposed method.

Keywords : nonlinear system, observability indices, generalized nonlinear observer canonical form, strictly positive real(SPR)

I. 서론

시스템의 모든 상태변수를 측정할 수 없는 경우, 출력궤환 제어기의 설계는 필수적이며, 이를 위한 상태관측기의 설계는 매우 중요한 문제로서 최근까지 활발한 연구가 진행되어 왔다. 참고문헌 [1]에서는 단일 출력 비선형 시스템에 대해서 비선형 관측기 표준형을 이용한 관측기 설계기법을 제시하였다. 이들의 결과를 다중 출력 시스템으로 확장한 결과는 참고문헌 [2]에서 제시되었으며, 여기서는 비선형 관측기 표준형으로 변환되기 위한 필요조건도 제시되었다. 참고문헌 [3]에서는 다중출력 비선형 시스템에 대한 상태변환을 용이하게 계산할 수 있는 기법을 제시하였으며, 참고문헌 [4]에서는 블록 삼각 비선형 관측기 표준형을 제시하여 보다 일반적인 비선형 시스템에 대한 관측기를 제시하였다. 위의 결과들은 관측기를 설계하기 위하여 비선형 시스템이 관측가능(observable)하다는 가정이 필요하며, 그렇지 않은 비선형 시스템에 대해서는 적용이 불가능하다. 최근에, 관측가능하지 않은 단일출력 비선형 시스템에 대한 관측기 설계기법이 참고문헌 [5,6]에서 제시되었으며, 참고문헌 [7]에서는 이를 다중출력 비선형시스템으로 확장하였다. 한편, 미지의 매개변수가 존재하는 시스템에 대해서 참고문헌 [8]에서는 비선형 적응관측기를 제시하였는데, 이 결과는 관측가능한 단일출력시스템에만 적용가능하였다.

본 논문에서는 관측가능하지 않은 다중 출력 비선형 시스템에 대한 적응관측기 설계기법을 제시하고자 한다. 기존의 참고문헌 [7]에서 제안된 관측기는 시스템의 모든 매개변수를 알고 있다는 가정하에서 설계될 수 있지만, 본 논문에서 제안하는 관측기는 미지의 매개변수(unknown parameter)가 존재하는 보다 광범위한 시스템에 대해서도 적용가능하다. 우선, 참고문헌 [7]에서 제안한 일반화된 비선형 관측기 표준형에 미지의 매개변수가 존재하는 새로운 적응관측기 표준형을 정의하고, 주어진 비선형 시스템이 제시된 표준형으로 변환되기 위한 조건을 제안한다. 또한, 유사 리아프노프 함수와 양정치(SPR)조건을 이용하여 제시된 표준형의 적응관측기가 존재하기 위한 조건을 제공한다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2장에서는 참고문헌 [2,3]에서 소개한 다중출력 시스템의 관측가능성과 참고문헌 [7]에서 소개한 일반화된 비선형 관측기 표준형에 대해서 간략히 소개한다. 3장에서는 일반화된 비선형 관측기 표준형에 기반한 새로운 적응관측기 표준형을 제시하고, 이를 이용한 관측기 설계기법을 제공한다. 4장에서는 제안된 관측기의 설계방법을 예제를 통하여 설명하고, 마지막으로 5장에서는 본 논문의 결론을 제시한다.

시작하기 전에, 본 논문에서 사용되는 주요 용어를 정의하도록 한다. 모든 근이 음의 실수부(negative real part)인 다항식을 Hurwitz라 하며, 마찬가지로 모든 고유치(eigenvalue)가 음의 실수부인 행렬을 Hurwitz라고 한다. 대칭행렬 $A \in R^{n \times n}$가 모든 $x \in R^n$, $x \neq 0$에 대해서 $x^T A x > 0$을 만족하면 양정치(positive definite) 행렬이라고 한다. 어떤 벡터장(vector field) f에 대해서, 미분방정식 $\dot{x} = f(x)$의 해가 모든 $t \in R$에 대해서 존재하면 벡터장 f를 완전(complete)하다고 한다. 어떤 벡터장 $f: R^n \rightarrow R^n$와 평활한(smooth) 함수 $h: R^n \rightarrow R$에 대해서 $L_f h = \frac{\partial h}{\partial x} f$ 이고 $L_f^i h = L_f(L_f^{i-1} h)$, $i \geq 2$ 이다. 두 벡터장 $f: R^n \rightarrow R^n$와 $g: R^n \rightarrow R^n$의 Lie Bracket은 $[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$로 정의하며, $ad_f^0 g = g$이고 $ad_f^k g = [f, ad_f^{k-1} g]$, $i \geq 1$이다. 미분 가능한 함수 $f(x_1, x_2)$의 x_1과 x_2에 대한 미분은 각각 $D_1 f(x_1, x_2)$와 $D_2 f(x_1, x_2)$로 표기한다. 모든 $-\infty < w < \infty$에 대해서 $Re[c(jwI - A)^{-1} b] > 0$ 이면 시스템 (A, b, c)가 엄격한 양정치(SPR) 조건을 만족한다고 한다.

---

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수 : 2004. 7. 2, 채택확정 : 2004. 11. 26.
조남훈 : 숭실대학교 전기제어시스템공학부(nhjo@ssu.ac.kr)
※ 이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2002-003-D00107).

II. 다중출력 일반화된 비선형 관측기 표준형

본 논문에서는 미지의 상수(unknown constant) 매개변수 θ_i, $1 \le i \le p$가 존재하는 다음과 같은 다중출력 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x,u) + \sum_{i=1}^{p} \theta_i \phi_i(x,u) \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, $x \in R^n$는 상태벡터, $u \in R^l$은 입력, $y \in R^m$은 출력, θ_i, $1 \le i \le p$ 는 미지의 매개변수이고 $f(0)=0$, $h(0)=0$, $g(x,0)=0$, $\forall x \in R^n$, $\phi_i(0,u)=0$, $1 \le i \le p$, $\forall u \in R^l$ 을 만족한다.

우선, 시스템 (1)의 $\theta=0$일 때, 즉 불확실성이 존재하지 않을 때의 다중출력 비선형 시스템의 관측기 설계방법을 고려하자. $\theta=0$일 때의 시스템 (1)에 대해서 시스템의 관측지수와 관측가능성을 정의하기 위하여

$$\begin{aligned} s_0 &= \operatorname{rank}\{dh_i : 1 \le i \le m\} \\ &\vdots \\ s_k &= \operatorname{rank}\{dh_i, \cdots, d(L_f^k h_i) : 1 \le i \le m\} \\ &\quad - \operatorname{rank}\{dh_i, \cdots, d(L_f^{k-1} h_i) : 1 \le i \le m\} \\ &\vdots \\ s_{n-1} &= \operatorname{rank}\{dh_i, \cdots, d(L_f^{n-1} h_i) : 1 \le i \le m\} \\ &\quad - \operatorname{rank}\{dh_i, \cdots, d(L_f^{n-2} h_i) : 1 \le i \le m\} \end{aligned} \tag{2}$$

를 정의하고, (2)를 이용하여 다시

$$k_i = \operatorname{card}\{s_j \ge i : 0 \le j \le n-1\}$$

를 정의한다.

정의 1 : [2,9] 원점(origin) 근방(neighborhood) U가 존재하여 $s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}$가 원점 근방 U에서 상수이면, $(k_1, \cdots, k_m)$를 관측지수(observability indices)라고 부른다.

정의 2 : [2,9] 원점 근방 U가 존재하여 출력 $y_1, \cdots, y_m$을 서로 적절히 교환한 후, U에서

$$\operatorname{rank}\{L_f^{j-1}(dh_i) : i=1,\cdots,m\,; j=1,\cdots,k_i\} = n$$

이 만족되면 시스템 (1)이 원점에서 관측가능(observable)하다고 한다.

대부분의 비선형 관측기에 대한 연구결과[1-4]는 관측기를 설계하기 위하여 시스템 (1)이 관측가능하다는 조건을 필요로 한다. 시스템 (1)이 관측가능한 경우, 비선형 관측기 표준형을 이용하여 비선형 관측기를 설계할 수 있는데, 이에 대한 자세한 결과는 참고문헌 [2,3]을 참고하기로 하고 본 논문에서는 비선형 관측기 표준형에 대한 정의만 소개하기로 한다.

정의 3 : [2,3] 다음과 같은 다중출력 비선형 시스템을 비선형 관측기 표준형(nonlinear observer canonical form) 이라고 한다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + \gamma(y,u) \\ y &= Cz \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} A &= \text{block diag}[A_1, \cdots A_m] \\ C &= \text{block diag}[c_1, \cdots, c_m] \end{aligned}$$

이고 $A_i \in R^{k_i \times k_i}$, $c_i \in R^{1 \times k_i}$ 는 (3)과 같은 Brunovsky 표준 행렬이며 $k_1 + \cdots + k_m = n$을 만족한다.

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ c_i &= [0\ 0\ \cdots\ 0\ 1] \end{aligned} \tag{3}$$

시스템 (1)이 관측가능하지 않은 경우, 즉 출력 $y_1, \cdots, y_m$ 을 어떠한 방식으로 교환하더라도

$$\operatorname{rank}\{L_f^{j-1}(dh_i) : i=1,\cdots,m\,; j=1,\cdots,k_i\} = n$$

을 만족하지 않으면, 기존의 방법[1-4]으로는 관측기 설계가 불가능하다. 이러한 경우, 관측기를 설계하기 위하여 참고문헌 [6,7]에서는 비선형 관측기 표준형을 확장한 일반화된 비선형 관측기 표준형을 제안하였다.

정의 4 : 임의의 $1 \le \rho \le n$에 대해서 시스템

$$\begin{aligned} \dot{z}_o &= A_o z_o + \gamma_o(y,u) \\ \dot{z}_{\bar{o}} &= A_{\bar{o}o} z_o + f_{\bar{o}}(y, z_{\bar{o}}) + \gamma_{\bar{o}}(y,u) \\ y &= C_o z_o \end{aligned} \tag{4}$$

을 일반화된 비선형 관측기 표준형(Generalized Nonlinear Observer Canonical Form : GNOCF) 이라고 한다. 여기서 $z_o \in R^\rho$, $z_{\bar{o}} \in R^{n-\rho}$,

$$\begin{aligned} A_o &= \text{block diag}[A_1, \cdots A_m] \in R^{\rho \times \rho} \\ C_o &= \text{block diag}[c_1, \cdots, c_m] \in R^\rho \end{aligned}$$

이고 $A_i \in R^{k_i \times k_i}$, $c_i \in R^{1 \times k_i}$ 는 Brunovsky 표준 행렬이며 $A_{\bar{o}o} \in R^{(n-\rho) \times \rho}$는 임의의 행렬이다.

미지의 매개변수가 존재하는 시스템 (1)의 상태변수를 추정하기 위해서는 미지의 매개변수의 영향을 고려한 적응관측기의 개념이 필요하다.

정의 5 : 시스템 (1)과 임의의 $x(0) \in R^n$, $w_0 \in R^l$, $\hat{\theta}_0 \in R^p$ 미지의 매개변수 θ, 유계인(bounded) $\|x(t)\|$, $\|u(t)\|$, $\forall t \ge 0$에 대해서 시스템 (5)가

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \alpha_1(w, \hat{\theta}, y, u), \ w(0) = w_0, \ w \in R^l, \ l \ge n \\ \dot{\hat{\theta}} &= \alpha_2(w, \hat{\theta}, y, u), \ \hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0, \ \hat{\theta} \in R^p \\ \hat{x} &= \alpha_3(w, \hat{\theta}, y, u), \ \hat{x} \in R^n \end{aligned} \tag{5}$$

조건 (i)과 (ii)를 만족하면, (5)를 시스템 (1)의 적응관측기(adaptive observer)라고 한다 :

(i) $\|w(t)\|$, $\|\hat{\theta}(t)\|$, $\|x(t) - \hat{x}(t)\|$, $\forall t \ge 0$이 유계 (bounded)이다.

(ii) $\lim_{t\to\infty}\|x(t)-\hat{x}(t)\|=0$

III. 적응관측기 설계

이제, 관측가능하지 않으면서 미지의 매개변수가 존재하는 시스템에 대한 적응관측기를 제시하고자 한다. 참고문헌 [6][7]에서는 관측가능하지 않은 비선형 시스템에 대해서 GNOCF (4)를 사용하여 관측기를 설계하였다. 하지만, 그들의 결과는 시스템 (1)과 같이 미지의 매개변수가 존재하는 경우에는 적용하는 것이 불가능하였다. 본 장에서는 참고문헌 [7]의 결과를 불확실성이 존재하는 시스템으로 확장하여, 불확실성에 대처할 수 있는 적응관측기를 설계하고자 한다.

우선, (2)에서 정의한 $s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}$이 상수이어서 $(k_1, \cdots, k_m)$이 잘 정의된다고 하고,

$$r = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$$

을 정의하자. 그러면, 시스템 (1)이 관측가능하지 않더라도 출력 $y_1, \cdots, y_m$을 적절히 교환하여 다음을 만족하도록 할 수 있다[9].

$$\operatorname{rank}\{L_f^{j-1}(dh_i) : i=1,\cdots,m\,; j=1,\cdots,k_i\} = r \tag{6}$$

이제, GNOCF (4)에 불확실성이 존재할 때, 적응관측기를 설계하기 위하여 다음과 같은 비선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= A_1 z_1 + \gamma_1(y,u) + b_1 \sum_{i=1}^{p} \theta_i \beta_{1,i}(y,u) \\
\dot{z}_2 &= A_2 z_2 + \gamma_2(y,u) + b_2 \sum_{i=1}^{p} \theta_i \beta_{2,i}(y,u) \\
&\vdots \\
\dot{z}_m &= A_m z_m + \gamma_m(y,u) + b_m \sum_{i=1}^{p} \theta_i \beta_{m,i}(y,u) \\
\dot{z}_{\bar{o}} &= A_{\bar{o}\bar{o}} z_{\bar{o}} + f_{\bar{o}}(y, z_{\bar{o}}) + \gamma_{\bar{o}}(y,u), \quad z_{\bar{o}} \in R^{n-r} \\
y &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 z_1 \\ c_2 z_2 \\ \vdots \\ c_m z_m \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7}$$

여기서

$$z_i = [z_{i,1}, \cdots, z_{i,k_i}]^T \in R^{k_i},$$

$$\gamma_i(y,u) = [\gamma_{i,1}(y,u), \cdots, \gamma_{i,k_i}(y,u)]^T : R^m \times R^l \to R^{k_i},$$

$$b_i = [b_{i,1}, \cdots, b_{i,k_i}]^T \in R^{k_i},$$

이고 $A_i \in R^{k_i \times k_i}$, $c_i \in R^{1 \times k_i}$는 Brunovsky 표준 행렬이며 $A_{\bar{o}\bar{o}} \in R^{(n-r)\times r}$는 임의의 행렬이다. (7)을 간단히 표기하기 위하여

$$\begin{aligned}
z &= [z_1^T, z_2^T, \cdots, z_m^T]^T \\
A &= \text{block diag}[A_1, \cdots, A_m] \\
B &= \text{block diag}[b_1, \cdots, b_m] \\
C &= \text{block diag}[c_1, \cdots, c_m] \\
\gamma_o(y,u) &= [\gamma_1(y,u)^T, \cdots, \gamma_m(y,u)^T]^T \\
\beta_i(y,u) &= [\beta_{i,1}(y,u), \cdots, \beta_{i,p}(y,u)]^T \in R^p \\
\beta(y,u) &= [\beta_1(y,u), \cdots, \beta_m(y,u)] \in R^{p\times m} \\
\theta &= [\theta_1, \cdots, \theta_p]^T
\end{aligned}$$

를 정의하면 (7)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= Az + \gamma_o(y,u) + B\beta^T(y,u)\theta \\
\dot{z}_{\bar{o}} &= A_{\bar{o}\bar{o}} z_{\bar{o}} + f_{\bar{o}}(y, z_{\bar{o}}) + \gamma_{\bar{o}}(y,u) \\
y &= Cz
\end{aligned} \tag{8}$$

정의 6 : 시스템 (8)을 적응관측기 표준형이라고 한다.

먼저, 비선형시스템 (1)이 적응관측기 표준형 (8)로 변환되기위한 조건을 알아보자. (6)을 만족하도록 교환된 출력 $y_1, \cdots, y_m$에 대해서 (9)를 만족하는 벡터장이 존재하는 경우, 이 벡터장을 $\tau_1, \cdots, \tau_m$이라 하자.

$$L_{\tau_i} L_f^{k-1} h_j = \delta_{i,j}\delta_{k,k_i}, \quad \begin{aligned} &1 \le i,j \le m \\ &1 \le k \le k_i \end{aligned} \tag{9}$$

(정리 1의 증명에서 밝혀지겠지만, 벡터장 $\tau_1, \cdots, \tau_m$의 존재성은 정리 1의 조건 (i)에 의하여 보장된다.) 벡터장 $\tau_1, \cdots, \tau_m$을 이용하여 새로운 벡터장

$$X_{ij} = ad_{(-f)}^{j-1}\tau_i, \quad \begin{aligned} &1 \le i \le m \\ &1 \le j \le k_i \end{aligned} \tag{10}$$

를 정의하자. 또한, 표기를 간단히 하기 위하여 벡터장 X_{ij}를

$$X_{ij} = X_{k_1 + k_2 + \cdots + k_{i-1} + j} \tag{11}$$

와 같이 벡터장 X_k, $1 \le k \le r$, 로 표기하고 (6)을 만족하도록 교환된 출력 $y_1, \cdots, y_m$에 대해서 다음을 정의하자.

$$\begin{aligned}
Q &= \{L_f^{j-1}(dh_i) : 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le k_i\} \\
Q_j &= \{dh_i, \cdots, L_f^{k_i-1}(dh_i) : 1 \le i \le m,\ i \ne j\} \\
&\quad \cup \{dh_j, \cdots, L_f^{k_j-2}(dh_j)\}
\end{aligned} \tag{12}$$

정리 1 : (6)을 만족하도록 재배열된 출력 $y_1, \cdots, y_m$에 대해서 벡터장 $\tau_1, \cdots, \tau_m, X_{r+1}, \cdots, X_n$과 원점 근방 U가 존재하여 가정 i)-viii)을 $\forall x \in U$에서 만족하면, 비선형 시스템 (1)을 적응관측기표준형 (8)로 변환시키는 국소적 상태 변환(local state transformation) $z = T(x)$, $T(0)=0$, $z \in R^n$이 존재한다.

i) 모든 $j = 1, \cdots, m$에 대해서 $\text{span}\ Q_j = \text{span}\ Q \cap Q_j$

ii) $\operatorname{rank}\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} = n$

iii) $[X_i, X_j] = 0$, $1 \le i,j \le n$

iv) $L_{X_i} h_j = 0$, $r+1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$

$[g, X_{ij}] = 0$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le k_i - 1$

v) $[g, X_i] = 0$, $r+1 \le i \le n$

vi) 평활한 함수 $\alpha_{r+1}(x), \cdots, \alpha_n(x)$가 존재하여

$[f, X_j] = \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i(x) X_i, \quad r+1 \le j \le n$ 을 만족한다.

vii) 모든 $1 \le k \le p$에 대해서

$$[\phi_k, X_{ij}] = 0, \; 1 \le i \le m, \; 1 \le j \le k_i - 1$$
$$[\phi_k, X_i] = 0, \; r+1 \le i \le n$$

viii) 모든 $1 \le s \le p$에 대해서

$$\phi_s(x, u) = \sum_{i=1}^{m} \left(\beta_{i,s}(h(x), u) \sum_{j=1}^{k_i} b_{i,j} X_{ij} \right)$$

을 만족하는 $\beta_{i,s}(h(x), u)$와 $b_{i,j}$가 존재한다.

증명 : 가정 i)을 만족하므로 (10)을 만족하는 벡터장 $\tau_1, \cdots, \tau_m$이 존재하며[3], 이로부터 다시 벡터장 X_{ij}와 X_i를 구할 수 있다. 이제 가정 (ii), (iii)을 동시직교화(simultaneous rectification)정리 [10]에 적용하면 상태변환

$$\begin{aligned} z &= (z_{11}, \cdots, z_{1k_1}, \cdots, z_{m1}, \cdots, z_{lk_m}, z_{r+1}, \cdots, z_n) \\ &= T(x) \\ &= (T_1(x), \cdots, T_n(x)) \end{aligned}$$

이 존재하여

$$\begin{aligned} T_* X_{ij} \circ T^{-1}(z) &= \frac{\partial}{\partial z_{ij}}, \; 1 \le i \le m, \; 1 \le j \le k_i \\ T_* X_i \circ T^{-1}(z) &= \frac{\partial}{\partial z_i}, \; r+1 \le i \le n \end{aligned} \tag{13}$$

을 만족한다. 벡터장 $\phi_s(x)$, $1 \le s \le p$, 를 새로운 좌표계에서 다음과 같이 $\overline{\phi_s}(z, u)$로 표기하자 :

$$T_* \phi_s \circ T^{-1}(z) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} (\overline{\phi_s})_{ij} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} + \sum_{i=r+1}^{n} (\overline{\phi_s})_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

가정 (vii)로부터, $r+1 \le j \le n$, $1 \le s \le p$ 일 때

$$\begin{aligned} & T_*[\phi_s, X_j] \circ T^{-1}(z) \\ &= [T_* \phi_s \circ T^{-1}(z), T_* X_j \circ T^{-1}(z)] \\ &= \left[\overline{\phi_s}, \frac{\partial}{\partial z_j} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

이고, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le k_i - 1$, $1 \le s \le p$ 일 때

$$\begin{aligned} & T_*[\phi_s, X_{ij}] \circ T^{-1}(z) \\ &= [T_* \phi_s \circ T^{-1}(z), T_* X_{ij} \circ T^{-1}(z)] \\ &= \left[\overline{\phi_s}, \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

이므로, $1 \le s \le p$에 대해서

$$\begin{aligned} \left[\overline{\phi_s}, \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \right] &= 0, \; 1 \le i \le m, \; 1 \le j \le k_i - 1 \\ \left[\overline{\phi_s}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right] &= 0, \; r+1 \le i \le n \end{aligned} \tag{14}$$

이다. 따라서, (14)로부터 $1 \le i \le m$, $1 \le j \le k_i - 1$일 때

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial z_{ij}}, \overline{\phi_s} \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial z_{ij}}, \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{k_k} (\overline{\phi_s})_{kl} \frac{\partial}{\partial z_{kl}} + \sum_{k=r+1}^{n} (\overline{\phi_s})_k \frac{\partial}{\partial z_k} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{k_k} \frac{\partial (\overline{\phi_s})_{kl}}{\partial z_{ij}} \frac{\partial}{\partial z_{kl}} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\partial (\overline{\phi_s})_k}{\partial z_{ij}} \frac{\partial}{\partial z_k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

을 얻을 수 있고, $1 \le s \le p$에 대해서

$$\frac{\partial (\overline{\phi_s})_{kl}}{\partial z_{ij}} = 0, \; 1 \le i \le m, \; 1 \le j \le k_i - 1, \; 1 \le k \le m, \; 1 \le l \le k_k \tag{15}$$

$$\frac{\partial (\overline{\phi_s})_k}{\partial z_{ij}} = 0, \; 1 \le i \le m, \; 1 \le j \le k_i - 1, \; r+1 \le k \le n \tag{16}$$

를 얻을 수 있다. 또한, (14)로부터 $r+1 \le i \le n$일 때

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \overline{\phi_s} \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{k_k} (\overline{\phi_s})_{kl} \frac{\partial}{\partial z_{kl}} + \sum_{k=r+1}^{n} (\overline{\phi_s})_k \frac{\partial}{\partial z_k} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{k_k} \frac{\partial (\overline{\phi_s})_{kl}}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_{kl}} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\partial (\overline{\phi_s})_k}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

을 얻을 수 있고, $1 \le s \le p$에 대해서

$$\frac{\partial (\overline{\phi_s})_{kl}}{\partial z_i} = 0, \; r+1 \le i \le n, \; 1 \le k \le m, \; 1 \le l \le k_k \tag{17}$$

$$\frac{\partial (\overline{\phi_s})_k}{\partial z_i} = 0, \; r+1 \le i \le n, \; r+1 \le k \le n \tag{18}$$

를 얻을 수 있다. 따라서, (15), (16), (17)과 (18)로부터, $1 \le i \le m$, $1 \le s \le p$에 대해서

$$\begin{aligned} (\overline{\phi_s})_{i1} &= (\overline{\phi_s})_{i1}(z_{1k_1}, \cdots, z_{mk_m}, u) \\ (\overline{\phi_s})_{i2} &= (\overline{\phi_s})_{i2}(z_{1k_1}, \cdots, z_{mk_m}, u) \\ &\vdots \\ (\overline{\phi_s})_{ik_i} &= (\overline{\phi_s})_{ik_i}(z_{1k_1}, \cdots, z_{mk_m}, u) \end{aligned} \tag{19}$$

이고

$$\begin{aligned} (\overline{\phi_s})_{r+1} &= (\overline{\phi_s})_{r+1}(z_{1k_1}, \cdots, z_{mk_m}, u) \\ &\vdots \\ (\overline{\phi_s})_n &= (\overline{\phi_s})_n(z_{1k_1}, \cdots, z_{mk_m}, u) \end{aligned} \tag{20}$$

이다. 또한, 가정 (viii)과 (13)을 사용하면

$$\begin{aligned} & T_* \phi_s \circ T^{-1}(z) \\ &= T_* \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{i,s}(h(x), u) \sum_{j=1}^{k_i} b_{i,j} X_{ij} \right) \circ T^{-1}(z) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \beta_{i,s}(h(x), u) \sum_{j=1}^{k_i} b_{i,j} (T_* X_{ij} \circ T^{-1}(z)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\beta_{i,s}(h(x), u) \sum_{j=1}^{k_i} b_{i,j} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \right) \end{aligned} \tag{21}$$

을 얻을 수 있다. 이제, 벡터장 $f(x)$, $g(x,u)$를 새로운 좌표계에서 다음과 같이 $\bar{f}(z)$, $\bar{g}(z,u)$로 표기하고

$$T_* f \circ T^{-1}(z) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{k_i}\overline{f_{kl}}\frac{\partial}{\partial z_{kl}} + \sum_{k=r+1}^{n}\overline{f_k}\frac{\partial}{\partial z_k}$$
$$T_* g \circ T^{-1}(z) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{k_i}\overline{g_{kl}}\frac{\partial}{\partial z_{kl}} + \sum_{k=r+1}^{n}\overline{g_k}\frac{\partial}{\partial z_k}$$

가정 ii)-vii)을 사용하면 다음을 얻을 수 있다[7] : $1\le i\le m$ 에 대해서

$$\begin{aligned}\overline{f_{i1}} &= \overline{f_{i1}}(z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m})\\ \overline{f_{i2}} &= \overline{f_{i2}}(z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m})+z_{i1}\\ &\vdots\\ \overline{f_{ik_i}} &= \overline{f_{ik_i}}(z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m})+z_{ik_i-1}\end{aligned}\tag{22}$$

이고

$$\begin{aligned}\overline{f_{r+1}} &= \overline{f_{r+1}}(z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m},z_{r+1},\cdots,z_n)\\ &\vdots\\ \overline{f_n} &= \overline{f_n}(z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m},z_{r+1},\cdots,z_n)\end{aligned}\tag{23}$$

이며,

$$\begin{aligned}\overline{g_{i1}} &= \overline{g_{i1}}(z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m},u)\\ \overline{g_{i2}} &= \overline{g_{i2}}(z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m},u)\\ &\vdots\\ \overline{g_{ik_i}} &= \overline{g_{ik_i}}(z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m},u)\end{aligned}\tag{24}$$

이고

$$\begin{aligned}\overline{g_{r+1}} &= \overline{g_{r+1}}(z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m},u)\\ &\vdots\\ \overline{g_n} &= \overline{g_n}(z_{1k_1},\cdots,z_{mk_m},u)\end{aligned}\tag{25}$$

이며,

$$y_i = h_i(x) = z_{ik_i}\tag{26}$$

이다. 따라서

$$\gamma^o_{ij}(y,u) = \overline{f_{ij}}(y)+\overline{g_{ij}}(y,u),\quad \begin{matrix}1\le i\le m\\ 1\le j\le k_i\end{matrix}$$

와

$$\begin{aligned}\bar{f}^o_i(y,z_{r+1},\cdots,z_n) &= \overline{f_i}(y,z_{r+1},\cdots,z_n)\\ \bar{\gamma}^o_i(y,u) &= \overline{g_i}(y,u)\end{aligned}\quad,\ r+1\le i\le n$$

을 정의하면 시스템 (1)의 z좌표계에서의 표현식은 (19), (20), (21), (22), (23), (24), (25), (26)으로부터, $1\le i\le m$ 일 때

$$\begin{aligned}\dot{z}_{i1} &= \gamma^o_{i1}(y,u)+b_{i,1}\sum_{s=1}^{p}[\beta_{i,s}(y,u)\cdot\theta_s]\\ \dot{z}_{i2} &= z_{i1}+\gamma^o_{i2}(y,u)+b_{i,2}\sum_{s=1}^{p}[\beta_{i,s}(y,u)\cdot\theta_s]\\ &\vdots\\ \dot{z}_{ik_i} &= z_{ik_i-1}+\gamma^o_{ik_i}(y,u)+b_{i,k_i}\sum_{s=1}^{p}[\beta_{i,s}(y,u)\cdot\theta_s]\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}\dot{z}_{r+1} &= \bar{f}^o_{r+1}(y,z_{r+1},\cdots,z_n)+\bar{\gamma}^o_{r+1}(y,u)\\ &\quad+\sum_{s=1}^{p}[(\overline{\phi_s})_{r+1}(y,u)\cdot\theta_s]\\ &\vdots\\ \dot{z}_n &= \bar{f}^o_n(y,z_{r+1},\cdots,z_n)+\bar{\gamma}^o_n(y,u)\\ &\quad+\sum_{s=1}^{p}[(\overline{\phi_s})_n(y,u)\cdot\theta_s]\end{aligned}\tag{27}$$

이다. 최종적으로

$$\begin{aligned}z_o &= [z_{11},\cdots,z_{1k_1},\cdots,z_{m1},\cdots,z_{mk_m}]^T\\ z_{\bar{o}} &= [z_{r+1},\cdots,z_n]^T\\ \gamma_o(y,u) &= [\gamma^o_{11},\cdots,\gamma^o_{mk_m}]^T\\ f_{\bar{o}}(y,z_{\bar{o}}) &= [\bar{f}^o_{r+1},\cdots,\bar{f}^o_n]^T\\ \gamma_{\bar{o}}(y,u) &= [\bar{\gamma}^o_{r+1},\cdots,\bar{\gamma}^o_n]^T\end{aligned}$$

을 정의하면 (27)로부터

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az+\gamma_o(y,u)+B\beta^T(y,u)\theta\\ \dot{z}_{\bar{o}} &= A_{\bar{o}o}z_o+f_{\bar{o}}(y,z_{\bar{o}})+\gamma_{\bar{o}}(y,u)\\ y &= Cz\end{aligned}$$

이며, 비선형 시스템 (1)이 상태변환 $z=T(x)$에 의하여 적응관측기 표준형으로 변환됨을 확인할 수 있다. ■

정리 1의 가정에 벡터장의 완전성(completeness) 조건을 추가하면 적응관측기 표준형으로 변환시키는 전역적 상태변환의 존재 조건을 구할 수 있다. 아래 보조정리의 증명은 참고문헌 [7]과 유사하므로 생략한다.

보조정리 1 : 정리 1의 조건 i)-viii)이 모든 $x\in R^n$에서 만족되고 벡터장 $X_1,\cdots,X_r$이 완전(complete)하면 비선형 시스템 (1)을 적응관측기표준형 (8)로 변환시키는 전역적 상태변환(global state transformation) 이 존재한다.

첨언 1 : 정리 1의 조건이 모두 만족될 때, 시스템 (1)을 적응관측기표준형 (8)로 변환해 주는 상태변환 $z=T(x)$을 구하기 위해서는 (13)으로부터 편미분 방정식

$$\frac{\partial T}{\partial x} = [X_{11},\cdots,X_{mk_m},X_{r+1},\cdots,X_n]^{-1}$$

의 해를 구해야 한다. 또한, 이러한 편미분 방정식의 해의 존재성은 정리 1의 가정 (iii)에 의해 보장된다.

이제 다음 정리는 적응관측기 표준형 (8)에 대한 적응관측기가 존재하기 위한 조건을 제시한다.

정리 2 : 적응관측기 표준형 (8)에 대해서

(i) 어떤 상수 $k_0>0$와 양정치 행렬 $P_2\in R^{(n-r)\times(n-r)}$가 존재하여 다음을 만족한다.

$$v^TP_2[D_2f_{\bar{o}}(y,z_{\bar{o}})]v \le -k_0\|v\|^2,$$
$$\forall(y,z_{\bar{o}},v)\in R^r\times R^{n-r}\times R^{n-r}$$

(ii) Hurwitz 다항식 $s^{k_i}+l_{i,k_i}s^{k_i-1}+\cdots+l_{i,2}s+l_{i,1}$이 존재하여 모든 $1\le i\le m$에 대해서

$$W_i(s) = \frac{b_{i,k_i}s^{k_i-1}+\cdots+b_{i,2}s+b_{i,1}}{s^{k_i}+l_{i,k_i}s^{k_i-1}+\cdots+l_{i,2}s+l_{i,1}},$$

가 엄격한 양실(SPR) 조건을 만족한다.

그러면, 모든 유한한 입력 $u(t)$에 대해서, 시스템 (28)은 (8)의 전역적 적응관측기이다.

$$\begin{aligned} \hat{z}_o &= A\hat{z}_o + \gamma_o(y,u) + B\beta^T(y,u)\vartheta + L(y - C\hat{z}) \\ \hat{z}_{\bar{o}} &= A_{\bar{o}o}\hat{z}_o + f_{\bar{o}}(y, \hat{z}_{\bar{o}}) + \gamma_{\bar{o}}(y,u) \\ \vartheta &= \Gamma\beta(y,u)(y - C\hat{z}) \end{aligned} \tag{28}$$

여기서 $\Gamma \in R^{p\times p}$는 임의의 양정치 대칭 행렬이고 L은 다음과 같이 주어지는 관측기 이득이다.

$$\begin{aligned} L &= \text{block diag}[L_1, \cdots, L_m] \\ L_i &= [l_{i,1}, \cdots, l_{i,k_i}]^T \end{aligned}$$

증명 : $p=1$인 경우의 증명과 본질적으로 동일하므로 $p=1$로 가정한다. 각각의 오차신호를

$$\begin{aligned} e_o &= \hat{z}_o - z_o \\ e_{\bar{o}} &= \hat{z}_{\bar{o}} - z_{\bar{o}} \\ e_\theta &= \vartheta - \theta \end{aligned}$$

와 같이 정의하면 (8)과 (28)로부터 오차 동력학은

$$\begin{aligned} \dot{e}_o &= (A - LC)e_o + B\beta^T(y,u)e_\theta \\ \dot{e}_\theta &= \Gamma\beta(y,u)(y - C\hat{z}) \end{aligned}$$

이다. e_o를 분할하여

$$e_o = [e_{o,1}^T, \cdots, e_{o,m}^T]^T, \quad e_{o,i} \in R^{k_i} \tag{29}$$

로 표기하면

$$\begin{aligned} \dot{e}_{o,i} &= (A_i - L_i c_i)e_{o,i} + b_i\beta_i^T(y,u)e_\theta, \quad 1 \le i \le m \\ \vartheta &= \Gamma\sum_{i=1}^{m}\beta_i(y,u)[y_i - c_i\hat{z}_i] \end{aligned} \tag{30}$$

를 얻을 수 있다. 여기서 행렬 $A_i - L_i c_i$는

$$A_i - L_i c_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -l_{i,1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -l_{i,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -l_{i,k_i} \end{bmatrix}$$

로 주어지므로 행렬 $A_i - L_i c_i$의 특성다항식은 $s^{k_i} + l_{i,k_i}s^{k_i-1} + \cdots + l_{i,2}s + l_{i,1}$이고 가정 (ii)에 의하여 행렬 $A_i - L_i c_i$는 Hurwitz이다. 또한, 시스템 $(A_i - L_i c_i, b_i, c_i)$는

$$\begin{aligned} & c_i(sI - A_i + L_i c_i)^{-1}b_i \\ &= \frac{b_{i,k_i}s^{k_i-1} + \cdots + b_{i,2}s + b_{i,1}}{s^{k_i} + l_{i,k_i}s^{k_i-1} + \cdots + l_{i,2}s + l_{i,1}} \\ &= W_i(s) \end{aligned}$$

를 만족하므로 가정 (ii)에 의하여 엄격한 양실(SPR)이다. 따라서, Meyer-Kalman-Yacubovich 정리[9,11]을 적용하면, $1 \le i \le m$에 대해서

$$\begin{aligned} (A_i - L_i c_i)^T P_i + P_i(A_i - L_i c_i) &= -Q_i \\ P_i b_i &= c_i^T \end{aligned} \tag{31}$$

를 만족하는 양정치 행렬 P_i , Q_i , $1 \le i \le m$ 가 존재한다. 이제 $P =$ block diag$[P_1, \cdots, P_m]$ 를 정의하고 리아프노프 함수

$$V(e_o, e_\theta) = e_o^T P e_o + e_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta \tag{32}$$

를 고려하자. (29)에 의하여 (32)는

$$V(e_o, e_\theta) = \sum_{i=1}^{m} e_{o,i}^T P_i e_{o,i} + e_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta$$

이며, (30)을 이용하여 V를 시간 t로 미분하면

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^{m}[\dot{e}_{o,i}^T P_i e_{o,i} + e_{o,i}^T P_i \dot{e}_{o,i}] + \dot{e}_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta + e_\theta^T \Gamma^{-1}\dot{e}_\theta \\ &= \sum_{i=1}^{m}[(e_\theta^T \beta_i b_i^T + e_{o,i}^T (A_i - L_i c_i)^T) P_i e_{o,i} \\ &\qquad + e_{o,i}^T P_i((A_i - L_i c_i)e_{o,i} + b_i\beta_i^T e_\theta)] + 2e_\theta^T \Gamma^{-1}\dot{e}_\theta \\ &= \sum_{i=1}^{m}[e_{o,i}^T (A_i - L_i c_i)^T P_i e_{o,i} + e_{o,i}^T P_i (A_i - L_i c_i) e_{o,i} \\ &\qquad + 2e_\theta^T \beta_i b_i^T P_i e_{o,i}] + 2e_\theta^T \Gamma^{-1}\dot{e}_\theta \end{aligned}$$

이다. (31)을 이용하면

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^{m}[-e_{o,i}^T Q_i e_{o,i} + 2e_\theta^T \beta_i c_i e_{o,i}] + 2e_\theta^T \Gamma^{-1}\dot{e}_\theta \\ &= -\sum_{i=1}^{m} e_{o,i}^T Q_i e_{o,i} + 2e_\theta^T\left(\sum_{i=1}^{l}\beta_i c_i e_{o,i} + \Gamma^{-1}\dot{e}_\theta\right) \end{aligned} \tag{33}$$

을 얻을 수 있고 새로운 행렬 $Q =$ block diag$[Q_1, \cdots, Q_m]$ 를 정의하면 (33)은

$$\begin{aligned} V &= -e_o^T Q e_o + 2e_\theta^T\left(\sum_{i=1}^{m}\beta_i c_i e_{o,i} + \Gamma^{-1}\dot{e}_\theta\right) \\ &= -e_o^T Q e_o + 2e_\theta^T\left(\sum_{i=1}^{m}\beta_i(c_i\hat{z}_i - y_i) + \Gamma^{-1}\dot{e}_\theta\right) \\ &= -e_o^T Q e_o + 2e_\theta^T(\beta(C\hat{z} - y) + \Gamma^{-1}\vartheta) \end{aligned}$$

과 같이 쓸 수 있다. 이제 (30)을 사용하면

$$V = -e_o^T Q e_o \le 0 \tag{34}$$

을 얻을 수 있는데, $V \le 0$이므로 리아프노프 정리에 의하여 e_o와 e_θ는 전역적 균일 유계(globally uniformly bounded)이고, 결국 모든 $t \ge 0$에 대해서

$$\begin{aligned} &\|\hat{z}(t) - z(t)\| \\ &\|\vartheta(t) - \theta(t)\| \end{aligned}$$

이 유계(bounded)이다. 또한, (34)에 LaSalle-Yoshizawa정리[12]를 적용하면

$$\lim_{t\to\infty} e_o^T(t) Q e_o(t) = 0$$

를 얻을 수 있는데, Q가 양정치 행렬이므로

$$\lim_{t\to\infty} e_o(t) = 0 \tag{35}$$

을 보장할 수 있다.

이제, 관측오차 $e_{\bar{o}}$의 수렴성을 분석하기 위하여 가정 (i)에서 주어진 양정치 행렬 P_2를 이용하여 리아프노프 함수

$$V(e_{\bar{o}})=\frac{1}{2}e_{\bar{o}}^{T}P_2 e_{\bar{o}}$$

를 정의하면,

$$\begin{aligned} V &= e_{\bar{o}}^{T}P_2[A_{\bar{o}o}e_o+D_2 f_{\bar{o}}(y,\ \tilde{z}_{\bar{o}})e_{\bar{o}}] \\ &\le -\frac{1}{2}k_0\|e_{\bar{o}}\|^2+\frac{\|P_2 A_{\bar{o}o}\|^2}{2k_0}\|e_o\|^2 \end{aligned}$$

을 얻을 수 있고, (35)를 사용하면

$$\lim_{t\to\infty} e_{\bar{o}}(t)=0$$

를 얻을 수 있다. 자세한 내용은 참고문헌 [7]의 정리 2의 증명과 유사하므로 생략한다. ■

정리 1과 정리 2로부터 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

정리 3 : 비선형 시스템 (1)에 대해서 정리 1의 모든 가정이 만족되고 적응관측기표준형 (8)에 대해서 정리 2의 모든 가정이 만족된다고 하자. 그러면 모든 유한한 $\|x(t)\|$, $\|u(t)\|$, $\forall t\ge 0$에 대해서 시스템 (36)은 비선형 시스템 (1)의 적응관측기이다.

$$\begin{aligned} \hat{z}_o &= A\hat{z}_o+\gamma_o(y,u)+B\beta^T(y,u)\hat{\theta}+L(y-C\hat{z}) \\ \hat{z}_{\bar{o}} &= A_{\bar{o}o}\hat{z}_o+f_{\bar{o}}(y,\hat{z}_{\bar{o}})+\gamma_{\bar{o}}(y,u) \\ \hat{\theta} &= \Gamma\beta(y,u)(y-C\hat{z}) \\ \hat{x} &= T^{-1}(\hat{z}) \end{aligned} \qquad (36)$$

여기서, Γ와 L은 정리 2에서와 동일하다.

IV. 설계 예제

본 논문에서 제안한 비선형 적응관측기의 설계기법을 설명하기 위하여 미지의 매개변수 θ가 존재하는 시스템 (37)을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3+\theta\sin x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1x_2+[1+\sin(x_1x_3)]u \\ &\qquad +\theta[(2+x_1)x_3^2+x_3\sin x_1] \\ \dot{x}_3 &= x_2+\theta x_3^2 \\ \dot{x}_4 &= -x_4-x_4^3+x_1x_3 \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_3 \end{aligned} \qquad (37)$$

$\theta=0$인 경우에 대해서 참고문헌 [7]에서는 비선형 관측기를 설계하였으나, (37)의 경우 미지의 매개변수를 포함하고 있으므로 참고문헌 [7]의 결과를 직접 사용할 수 없다. 또한, 간단한 계산에 의하여 $s_0=2$, $s_1=1$, $s_2=0$이며 $k_1=2$, $k_2=1$이므로 시스템 (37)은 관측 불가능하여 참고문헌 [8]의 기법도 적용 불가능하다. 이제, 본 논문에서 제안한 적응관측기를 설계해 보자. 출력을 $y_1=h_1=x_3$, $y_2=h_2=x_1$로 재배열하고

$$\begin{aligned} X_1 &= X_{11}=\frac{\partial}{\partial x_2}, \\ X_2 &= X_{12}=x_1\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}, \\ X_3 &= X_{21}=\frac{\partial}{\partial x_1}+x_3\frac{\partial}{\partial x_2} \\ X_4 &= \frac{\partial}{\partial x_4} \end{aligned} \qquad (38)$$

로 선택하면 정리 1의 가정 (i)-(vi)을 만족함을 어렵지않게 확인할 수 있다[7]. 또한,

$$\phi=[\ \sin x_1\quad (2+x_1)x_3^2+x_3\sin x_1\quad x_3^2\quad 0\ ]^T$$

이므로 (38)을 이용하면 가정 (vii)를 만족함을 확인할 수 있으며

$$\begin{aligned} \beta_1(y,u) &= x_3^2=y_1^2 \\ \beta_2(y,u) &= \sin x_1=\sin y_2 \\ \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{1,2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ b_{2,1} &= 1 \end{aligned}$$

로 정할 경우

$\phi=\beta_1(y,u)[b_{1,1}X_{11}+b_{1,2}X_{12}]+\beta_2(y,u)b_{21}X_{21}$ 이므로 가정 (viii)도 만족된다. 따라서, 적응관측기 표준형으로 변환시켜주는 상태변환 $z=T(x)$는 첨언 1로부터

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & x_1 & x_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} -x_3 & 1 & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

을 만족해야 하고

$$T(x)\ =[\,x_2-x_1x_3\quad x_3\quad x_1\quad x_4]^{\,T}$$

이다. 따라서, 시스템 (37)은 새로운 좌표계에서

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -y_1^2+[1+\sin(y_1y_2)]u+2y_1^2\theta \\ \dot{z}_2 &= z_1+y_1y_2+y_1^2\theta \\ \dot{z}_3 &= y_1+(\sin y_2)\theta \\ \dot{z}_4 &= -z_4-z_4^3+y_1y_2 \\ y_1 &= z_2 \\ y_2 &= z_3 \end{aligned} \qquad (39)$$

와 같은 적응관측기 표준형으로 표현된다. 이제 정리 2의 가정을 만족하는지 확인해보도록 하자. (39)로부터

$$f_{\bar{o}}(y,z_{\bar{o}})=-z_4-z_4^3$$

이므로 $P_2=1$로 정하면

$$v^TP_2[D_2f_{\bar{o}}(y,z_{\bar{o}})]v\ =(-1-3z_4^2)v^2\le -v^2$$

이어서 $k_0=1$을 사용하면 정리 2의 가정 (i)이 만족된다. 또한, 임의의 $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$에 대해서 $l_{1,1}=2\lambda_1$, $l_{1,2}=$, $2+\lambda_1$ $l_{2,1}=\lambda_2$로 선정하면

$$\begin{aligned} W_1(s) &= \frac{s+2}{s^2+l_{1,2}s+l_{1,1}}=\frac{1}{s+\lambda_1} \\ W_2(s) &= \frac{1}{s+l_{2,1}}=\frac{1}{s+\lambda_2} \end{aligned}$$

이므로 정리 2의 가정 (ii)도 만족됨을 알 수 있다. 따라서 정리 3의 (36)에 의하여 시스템 (37)의 전역적 적응관측기는

다음과 같이 주어진다.

$$
\begin{aligned}
\hat{x} &= [\ \hat{z}_3 \quad \hat{z}_1 + \hat{z}_2\hat{z}_3 \quad \hat{z}_2 \quad \hat{z}_4\ ]^T \\
\dot{\hat{z}}_1 &= -y_1^2 + [1 + \sin(y_1 y_2)]u + l_{11}(y_1 - \hat{z}_2) + 2y_1^2\hat{\theta} \\
\dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_1 + y_1 y_2 + l_{12}(y_1 - \hat{z}_2) + y_1^2\hat{\theta} \\
\dot{\hat{z}}_3 &= y_1 + l_2(y_2 - \hat{z}_3) + \sin y_2\hat{\theta} \\
\dot{\hat{z}}_4 &= -z_4 - z_4^3 + y_1 y_2 \\
\dot{\hat{\theta}} &= \Gamma[y_1^2(y_1 - \hat{z}_2) + \sin y_2(y_2 - \hat{z}_3)]
\end{aligned}
$$

여기서, Γ는 임의의 양의 상수이고, 관측기 이득 l_1과 l_2는

$$
\begin{aligned}
l_1 &= \begin{bmatrix} l_{11} \\ l_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 2+\lambda_1 \end{bmatrix} \\
l_2 &= \lambda_2
\end{aligned}
$$

로 주어진다.

V. 결론

본 논문에서는 관측가능하지 않은 다중출력시스템의 적응관측기 설계방법을 제시하였다. 기존의 적응관측기 설계기법은 관측가능한 비선형시스템에만 적용 가능하였으나, 본 논문에서 제시한 방법은 관측가능하지 않은 비선형 시스템에도 적용 가능하여 보다 일반적인 비선형시스템에 대해서 적응관측기를 설계할 수 있다. 본 논문에서는 관측가능하지 않은 비선형시스템에 대한 적응관측기표준형을 새로 제시하였으며, 이러한 표준형으로 변환가능한 조건을 제시하였다. 또한, 제안된 적응관측기 표준형으로 표현된 비선형 시스템에 대해 적절한 리아프노프 함수가 존재하고 양정치(SPR)조건이 만족되면 적응관측기가 존재함을 입증하였다. 향후의 연구방향으로는 제안된 적응관측기표준형으로 변환되는 조건을 좀 더 완화하는 연구가 필요할 것으로 보인다.

참고문헌

[1] A. J. Krener, and A. Isidori, "Linearization by output injection and nonlinear observers," *Systems and Control Letters,* vol. 3, pp. 47-52, 1983.

[2] A. J. Krener and W. Respondek, "Nonlinear observers with linearizable error dynamics," *SIAM Journal on Control and Optimization,* vol. 23, pp. 197-216, 1985.

[3] X. H. Xia and W.B. Gao, "Nolinear observer design by observer error linearization," *SIAM Journal on Control and Optimization,* vol. 27, pp. 199-216, 1989.

[4] J. Rudolph and M. Zeitz, "A block triangular nonlinear observer normal form," *Systems and Control Letters,* vol. 23, pp. 1-8, 1994.

[5] N. H. Jo, and J. H. Seo, "Input output linearization approach to state observer design for nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.,* vol. 45, pp. 2388-2393, 2000.

[6] N. H. Jo and J. H. Seo, "Observer design for nonlinear systems that are not uniformly observable," *Int. J. Contr.,* vol. 75, pp. 369-380, 2002.

[7] 조남훈, "관측가능하지 않은 다중출력 비선형 시스템의 관측기 설계기법," *제어자동화시스템공학회 논문지,* vol. 7, pp. 575-582, 2004.

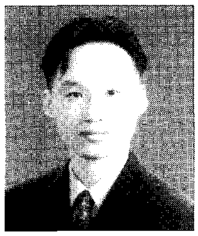
[8] Marino, R., "Adaptive observers for single output nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.,* vol. 35, pp. 1054-1058, 1990.

[9] R. Marino and P. Tomei, *Nonlinear Control Design* Prentice Hall, London: 1995.

[10] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems.* Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[11] Meyer, K. R., "On the existence of lyapunov functions for the problem of Lur'e," *SIAM J. Control Optim.* vol. 3, pp. 373-383, 1965.

[12] LaSalle, J. P., "Stability theory for ordinary differential equations," *Journal of Differential Equations* vol. 4, pp. 57-65, 1968.



조 남 훈

1992년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1994년 동 대학원 석사. 2000년 서울대 대학원 전기공학부 박사. 2000년~2001년 서울대 자동화시스템공동연구소 연구원. 2001년~2002년 삼성전자 DVS사업부 책임연구원. 2002년~2004년 숭실대학교 전기제어시스템공학부 전임강사. 2004년~현재 숭실대학교 전기제어시스템공학부 조교수. 관심분야는 비선형제어, 적응제어, 신호처리. Homepage : http://ee.ssu.ac.kr/~nhjo.