韓國經營科學會誌
第30권 第1號
2005年 3月

공정변수의 변동을 고려한 호감도 함수를 통한 다중반응표면 최적화*

권준범** · 이종석** · 이상호** · 전치혁** · 김광재**

Multiresponse Optimization Through A New Desirability Function Considering Process Parameter Fluctuation*

Jun-Bum Kwon** · Jong-Seok Lee** · Sang-Ho Lee**
Chi-Hyuck Jun** · Kwang-Jae Kim**

Abstract

A desirability function approach to a multiresponse problem is proposed considering process parameter fluctuation which may amplify the variance of response. It is called POE (propagation of error), which is defined as the standard deviation of the transmitted variability in the response as a function of process parameters. In order to obtain more robust process parameter setting, a new desirability function is proposed by considering POE as well as distance-to-target of response and response variance. The proposed method is illustrated using a rubber product case in Ribeiro et al. (2000).

Keyword : Desirability Function, Multiple Response Surface, Process Parameter Fluctuation, Propagation of Error

1. 서 론

Box와 Wilson[2]에 의해 소개된 반응표면법(Response Surface Methodology ; RSM)은 하나의 반응변수(response variable) y의 값을 최대화 혹은 최소화하는 공정변수(process parameter)들의 최적

논문접수일 : 2004년 11월 15일 논문게재확정일 : 2005년 1월 6일
* 본 연구는 포항공과대학교 제품생산기술연구소의 지원으로 수행되었음.
** 포항공과대학교 산업경영공학과

조합을 찾기 위해 고안되었다. 그러나 제품 개발이나 공정 개발에서 발생하는 일상적인 문제들은 여러 가지 반응변수를 동시에 고려하여 공정변수의 최적 조합을 찾는 경우가 대부분이다. 이러한 문제를 다중반응표면법 (Multiple Response Surface ; MRS) 이라고 한다[12]. MRS를 접근하는 방법 중 가장 널리 알려진 것은 차원을 줄임으로써 여러 개의 반응변수를 하나의 척도로 변환하고 이를 최적화하는 것이다. 이러한 방법에는 호감도(혹은 만족도, 본 연구에서는 호감도를 사용) 함수(desirability function)를 이용한 방법들[3, 4, 6, 7, 10]과 손실 함수(loss function)를 이용한 방법들[1, 8, 9, 14, 18]이 있다.

MRS에서 고려하는 것은 반응변수의 목표치와의 편의(bias), 반응변수의 분산, 반응변수 예측치의 부정확성, 그리고 공정변수의 변동으로 기인하는 반응변수의 변동 등이 있고, 이러한 요인들을 최소화하는 것을 목표로 한다. 그동안 편의, 반응변수의 분산과 예측치의 정확성을 고려한 연구는 많이 진행됐지만, 공정변수의 변동을 MRS 문제에 적용한 연구는 많지 않았다. 공정변수의 산포가 발생하는 원인은 반응 변수의 산포가 발생하는 원인과 비슷하다. 산포의 원인은 널리 알려진 바와 같이 5M 1E (작업자, 기계, 재료, 방법, 측정, 환경) 또는 Taguchi가 주장했던 잡음요소(외부잡음, 내부잡음, 제품간 잡음)를 생각할 수 있는데, 이것이 반응변수뿐만 아니라 공정변수에도 영향을 미친다고 볼 수 있다. 예를 들어 기계의 노화 등의 이유로 인해 공정변수에 큰 변동이 생기게 되는 경우 그 기계를 교체하는 것이 제일 좋은 개선 방법이지만, 비용이 많이 들 수 있으므로 이러한 공정변수의 변동이 반응변수에 미치는 영향을 고려한 최적 조합을 찾는 것이 효과적인 개선 방법이 될 수 있다. 그러므로 공정변수의 변동의 영향을 무시할 수 없으며 이를 고려한 새로운 방법론이 필요하다.

본 연구의 목적은 MRS에서 반응변수의 편의와 분산뿐만 아니라 공정변수의 변동성까지 고려한 새로운 방법론을 제시하고자 한다. 앞에서 언급했듯이, MRS를 접근하는 방법 에는 호감도 함수 방법론과 손실 함수 방법론 두 가지가 있다. 이 중 손실 함수 방법론은 첫째, 반응변수들의 공분산을 추정하기 위해 많은 실험 데이터가 필요하고 둘째, 공정변수의 변동을 감안한 손실 함수 식을 유도해야 하는 어려움이 따른다. 그래서 본 연구에서는 비교적 접근이 간단한 호감도 함수 방법론을 사용하고자 한다.

이하 2절에서 관련연구를 살펴보고, 3절에서는 공정변수의 변동을 감안한 새로운 호감도 함수를 제안한다. 4절에서는 Ribeiro *et al.*[17]의 사례를 통해 비교실험을 수행하고, 마지막으로 5절에서 결론을 맺도록 한다.

2. 기존 연구

2.1 호감도 함수

n개의 반응변수 $\mathbf{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$에 k개의 공정변수들 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_k)$들이 영향을 준다고 가정하면, 일반적인 MRS 모형은 다음과 같다.

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_k) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (1)$$

이때 f_i는 i번째 반응변수와 공정변수들 사이의 함수를 나타내며 본 연구에서는 주로 이차함수를 사용한다. ε_i는 평균이 0이고 분산이 σ_i^2인 오차항이다. f_i의 정확한 형태를 알 수 없는 경우 실험계획법 등에 의해 추정할 수 있다고 가정한다[12].

i번째 반응변수 y_i의 가장 바람직한 값을 θ_i, 하한을 $y_i^{(L)}$, 상한을 $y_i^{(U)}$라고 할 때, 전통적인 호감도 함수 방법론은 추정된 반응변수 $\hat{y}_i$들을 아래의 식을 이용하여 각각의 호감도 d_i로 변환한다.

$$d_i = \begin{cases} \left[\dfrac{\hat{y}_i - y_i^{(L)}}{\theta_i - y_i^{(L)}}\right]^s & y_i^{(L)} \le \hat{y}_i \le \theta_i \\ \left[\dfrac{\hat{y}_i - y_i^{(U)}}{\theta_i - y_i^{(U)}}\right]^t & \theta_i \le \hat{y}_i \le y_i^{(U)} \\ 0 & y_i^{(U)} < \hat{y}_i \text{ or } \hat{y}_i < y_i^{(L)} \end{cases} \qquad (2)$$

여기서 s와 t는 분석자가 결정하는 모수로서, 호감도 함수의 모양을 결정한다. 이 값을 통해 반응변수들 사이의 상대적 중요도를 표현할 수 있다. Derringer & Suich[4]가 제안한 DS 방법론은 식(3)과 같이 계산된 호감도들의 기하평균을 구하여 그것을 최대로 하는 공정변수의 조합을 찾는 것이다.

$$D_{DS} = (d_1 \times \cdots \times d_n)^{1/n} \tag{3}$$

반응변수의 분산도 함께 고려하고자 한다면, 반응변수의 분산에 관한 모형을 생성하여 앞에서와 유사하게 호감도 값을 구할 수 있다. 반응변수의 평균과 분산을 함께 고려한 방법을 Extended DS라고 부른다[10].

$$D_{EDS} = (d_{\mu 1} \times d_{\sigma 1} \times \cdots \times d_{\mu n} \times d_{\sigma n})^{1/(2n)} \tag{4}$$

이때 $d_{\mu i}$는 y_i의 평균에 관한 호감도이고, $d_{\sigma i}$는 분산에 관한 호감도이다.

2.2 공정변수의 변동 고려

j번째 공정변수의 실제 값을 w_j, 설계치(fixed and planned level)를 x_j라고 할 때, 본 연구에서는 Myers & Montgoery[12]가 사용한 바와 같이 공정변수가 다음과 같이 서로 독립인 확률변수로 간주한다.

$$w_j = x_j + u_j \tag{5}$$

이때 u_j는 서로 독립이며 평균이 0이고 분산이 σ^2_{wj}인 공정변수의 오차항이다. 이와 같이 공정변수의 변동이 있는 경우 실제 값은 확률변수이므로 이에 대한 최적 조합을 찾는 것은 무의미하며, 따라서 설계치에 대한 최적 조합을 얻도록 하여야 할 것이다.

본 연구에서 사용할 식 (1)에서 f_i가 이차식으로 표현되는 경우 공정변수의 변동이 있을 때 모형이 어떻게 변하는지를 알아보자. 이를 위해 우선 공정변수의 변동이 없는 경우 ($\sigma^2_{wj}=0$)를 살펴보자. 이때는 $w_j = x_j$이며, 식 (6)과 같다.

$$y_i(\mathbf{x}) = \beta_{i0} + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ijj} x_j^2 + \sum_{l=1}^{k} \sum_{m>l}^{k} \beta_{ilm} x_l x_m + \varepsilon_i \tag{6}$$

다음으로 공정변수의 변동을 고려해보자. 공정변수의 실제 값 w_i를 사용한 반응변수의 이차식 모형은 식(7)과 같다.

$$y_i(\mathbf{w}) = \beta_{i0} + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} w_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ijj} w_j^2 + \sum_{l=1}^{k} \sum_{m>l}^{k} \beta_{ilm} w_l w_m + \varepsilon_i \tag{7}$$

공정변수의 설계치 x_i의 함수로 변환하기 위하여 식 (5)를 식 (7)에 대입하면, 식 (8)과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} y_i(\mathbf{w}) = {} & \beta_{i0} + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}(x_j + u_j) + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ijj}(x_j + u_j)^2 \\ & + \sum_{l=1}^{k} \sum_{m>l}^{k} \beta_{ilm}(x_l + u_l)(x_m + u_m) + \varepsilon_i \\ = {} & \beta_{i0} + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ijj} x_j^2 \\ & + \sum_{l=1}^{k} \sum_{m>l}^{k} \beta_{ilm} x_l x_m \\ & + \Big(\varepsilon_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} u_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ijj}(2x_j u_j + u_j^2) \\ & + \sum_{l=1}^{k} \sum_{m>l}^{k} \beta_{ilm}(u_l x_m + x_l u_m + u_l u_m) \Big) \\ = {} & \beta_{i0} + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ijj} x_j^2 \\ & + \sum_{l=1}^{k} \sum_{m>l}^{k} \beta_{ilm} x_l x_m + \varepsilon_i^* \end{aligned} \tag{8}$$

식 (8)은 오차항 ε_i^*을 제외하고서는 식 (6)과 같은 MRS 표준 모형이다. 오차항을 새롭게 정리하면, 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^* = {} & \varepsilon_i + \sum_{l=1}^{k} \sum_{m>l}^{k} u_l(\beta_{ilm} x_m) + \sum_{l=1}^{k} \sum_{m>l}^{k} u_m(\beta_{ilm} x_l) \\ & + \sum_{l=1}^{k} \sum_{m>l}^{k} \beta_{ilm} u_l u_m + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \beta_{ij} \\ & + 2 \sum_{j=1}^{k} \beta_{ijj} x_j u_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ijj} u_j^2 \end{aligned} \tag{9}$$

식 (9)의 새로운 오차항의 기대치는 다음과 같다.

$$E[\epsilon_i^*] = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ijj}\sigma_{wj}^2 \tag{10}$$

즉, 오차항의 평균이 0이 아니며, 공정변수 변동의 유무에 따라 반응변수의 평균은 달라진다.

식 (7)과 같이 이차식으로 추정한 모형에 대하여 $E[y_i(\mathbf{w})]$는 다음과 같다.

$$E[y_i(\mathbf{w})] = E[y_i(\mathbf{x})] + \sum_{j=1}^{k} \beta_{itt}\sigma_{wj}^2 \tag{11}$$

따라서 공정변수가 변동하는 경우의 반응변수 평균의 추정치 $\hat{y}_i(\mathbf{w})$를 구하려면, 식 (11)에 의거, 먼저 식 (6)의 모형으로 $\hat{y}_i(\mathbf{x})$를 추정한 다음에 식 (10)과 같은 오차항 평균을 추정하여야 할 것이다.

식 (9)의 오차항의 분산의 전개는 식 (1)의 형태에 따라 다르며, 다소 복잡하나 ϵ_i의 분산인 σ_i^2에 대한 새로운 항이 추가될 것이며 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$Var[\epsilon_i^*] = TV_i = \sigma_i^2 + POE_i^2 \tag{12}$$

우변의 첫 번째 항은 공정변수의 변동이 없을 때인 식 (6)에 있는 오차항의 분산이다. 그리고 두 번째 항은 공정변수의 변동으로 인해 공정변수의 분산이 i번째 반응변수의 분산으로 전이된 것으로 생각하여 흔히 이 값의 제곱근을 POE(propagation of error)라고 부른다. 이처럼 공정변수의 변동은 반응변수의 분산을 증가시킨다. 결과적으로 공정변수가 확률변수인 경우 반응변수의 총 분산 TV(Total Variance)는 공정변수가 고정일 때의 분산과 POE의 제곱으로 분해된다.

POE의 주요한 특징 중 하나는 식 (9)에서 짐작할 수 있듯이 공정변수 $\mathbf{x}$의 함수로 주어진다는 것이다. 따라서 공정변수의 변동성이 존재한다면 공정변수의 각 지점마다 발생하는 POE의 값이 달라져 모형 식 (7)의 반응변수 $y_i(\mathbf{w})$는 이질적인(heterogeneous) 분산을 가지게 된다.

Fathi[5]와 Plante[15] 등이 POE의 근사치를 제안하였으며, 반응변수의 총 분산으로 가장 널리 사용되는 근사치는 Ribeiro & Elsayed[16]가 제시한 식 (13)과 같은 $\hat{y}(\mathbf{x})$의 기울기(gradient) 정보를 활용한 것이다.

$$Var[y_i(\mathbf{w})] = \sigma_i^2 + \sum_{j=1}^{k}\left\{\sigma_{wj}^2\left(E\left[\frac{\partial \hat{y}_i(\mathbf{w})}{\partial x_j}\right]\right)^2\right\} \tag{13}$$

즉, i번째 반응변수의 POE는 다음과 같다.

$$POE_i = \left[\sum_{j=1}^{k}\left\{\sigma_{wj}^2\left(E\left[\frac{\partial \hat{y}_i(\mathbf{w})}{\partial x_j}\right]\right)^2\right\}\right]^{1/2} \tag{14}$$

식 (14)를 보면, 기울기의 절대값과 공정변수의 분산이 클수록 공정변수의 변동이 반응변수로 많이 전이된다고 생각할 수 있다.

Ribeiro & Elsayed[16]가 공정변수의 변동을 MRS에 적용했으나 반응변수들의 공분산 정보를 사용하지 않고, 단순히 개별 반응변수의 기대손실의 가중치 합을 최소화하고자 했다. 그리고 Plante[15]는 POE를 공정능력분석에 적용한 연구를 수행하였다.

3. 공정변수의 변동을 고려한 호감도 함수

호감도 함수 방법론에서 반응변수의 분산을 고려하기 위해서는 식 (4)를 활용한 Extended DS를 사용하면 된다. 그러나 공정변수의 변동까지도 감안하려면 기존 식에서 추가로 생겨난 POE를 적절히 다뤄야 한다.

MRS 문제의 목적은 반응변수들이 큰 변동없이 목표치에 도달하는 공정변수의 조합을 찾는 것이라고 할 수 있다. 그렇다면 공정변수의 변동을 감안한 방법론도 기존의 Extended DS와 유사하게 접근할 수 있다. 즉, 반응변수의 평균이 최대한 목표치에 근접해지는 동시에 최적해 지점에서의 반응변수의 총 분산이 최소화되는 공정변수 조합을 찾으면 된다. 단, 이 때의 총 분산은 식 (12)와 같이 공정변수의 변동이 없을 때의 반응변수의 분산과 POE의 제

곱의 합으로 표현된다.

먼저 식 (2)를 사용하여 반응변수 $y_i(\mathbf{w})$의 평균에 관한 호감도 $d_{\mu i}$를 계산한다. 이때 $y_i(\mathbf{w})$의 평균의 추정치로는 식 (11)로 구한 $\hat{y}_i(\mathbf{w})$를 대입한다. 그리고 식 (15)에서 총 분산에 관한 호감도를 $d_{T\sigma i}$라 하면, $d_{T\sigma i}$는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$d_{T\sigma i}=\begin{cases} \dfrac{\sigma_i^{(U)}-\sqrt{TV_i}}{\sigma_i^{(U)}} & 0\le\sqrt{TV_i}\le\sigma_i^{(U)} \\ 0 & \sigma_i^{(U)}<\sqrt{TV_i} \end{cases} \quad (15)$$

반응변수의 총 표준편차는 망소특성을 갖는 품질특성치로 간주할 수 있으므로, 표준편차의 하한 과 목표치 둘 다 0으로 설정한다. 그러나 적절한 상한을 결정하기가 어려운데, 이는 분석자의 판단에 따른다.

이때 최적화하고자 하는 새로운 호감도 함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$D_{new}=(d_{\mu 1}\times d_{T\sigma 1}\times\cdots\times d_{\mu n}\times d_{T\sigma n})^{1/(2n)} \quad (16)$$

모형(16)의 목적은 D_{new}를 최대화하는 공정변수의 설계치 x^*를 찾는 것이다. 공정변수의 변동이 없다면 $(\sigma_{wj}^2=0)$, $E[y_i(\mathbf{w})]=E[y_i(\mathbf{x})]$, $Var[y_i(\mathbf{w})]=\sigma_i^2=Var[y_i(\mathbf{x})]$이므로 식(16)의 D_{new}는 식 (4)의 D_{EDS}와 같아진다. 결국, 제안한 방법론은 기존의 Extended DS의 일반화된 형태라고 말할 수 있다.

4. 수치 예제

제안된 방법론의 효과를 살펴보기 위해서 위해서 Ribeiro *et al.*[17]가 이용한 사례로 DS, Extended DS 방법론들과 비교실험을 수행한다. 이 사례는 자동차 타이어 생산에 이용되는 원재료인 고무제품(rubber product)에 관한 것이다. 5개의 공정변수가 있고, 10개의 반응변수가 있는데, 각 변수의 이름에 대해서는 Ribeiro *et al.*[17]가 언급하지 않았다. 본 연구에서는 간단한 비교를 위해 <표 1>과 같은 특성을 갖는 2개의 반응변수만을 사용하였다.

〈표 1〉 반응변수들의 특성

반응변수	y_1	y_2
특성	망목	망목
$y_i^{(L)}$	59.49	74.2
θ_i	62	85
$y_i^{(U)}$	64.51	95.8

4.1. DS 방법

식(17)의 반응변수의 평균과 표준편차의 모형은 Ribeiro *et al.*[17]가 GLS(Generalized Least Squares) 방법으로 생성한 것이다. 본 연구에서는 Ribeiro *et al.*[17]가 생성한 모형을 그대로 이용하며, DS 방법 실험에서는 식 (17) 중에서 반응변수 평균의 모형만 사용한다. 2개의 반응변수 모형에 4번째 공정변수는 포함되지 않아서 4개의 공정변수만을 이용한다.

$$\begin{aligned}\hat{y}_1(\mathbf{x}) &= 61.73+2.06x_1+2.46x_1^2 \\ &\quad +2.33x_2+0.938x_3+0.938x_5 \\ \hat{\sigma}_1(\mathbf{x}) &= 1.633+0.892x_1 \\ \hat{y}_2(\mathbf{x}) &= 74.62-2.33x_1-6.26x_2^2 \\ \hat{\sigma}_2(\mathbf{x}) &= 4.125-1.40x_3+1.58x_5 \end{aligned} \quad (17)$$

반응변수의 평균에 대한 하한 $y_i^{(L)}$, 상한 $y_i^{(U)}$, 그리고 목표치 θ_i도 Ribeiro *et al.*[17]가 사용한 <표 1>의 값을 따른다. 그리고 간단한 비교를 위해 DS, Extended DS, 그리고 제안한 방법 모두다 선형 호감도 함수를 적용했다. 즉, 식 (2)에서 s와 t의 값을 1로 두었다. 추정된 반응변수의 평균을 식 (1)을 사용하여 각각의 호감도로 전환한 후, 식 (3)의 D_{DS}를 최대화하는 해를 구한다.

MATLAB6.5 소프트웨어를 이용하여 구한 실험결과는 <표 2>에 제시돼 있다. 첫 번째 반응변수의

추정치 $\hat{y}_1(\mathbf{x})$는 목표치 62에 도달하여 호감도 1을 얻었다. 그러나 두 번째 변수는 목표치에 근접하지 못하여 0.26이라는 낮은 호감도를 얻었다. 이때 도출된 공정변수의 최적해 지점 중 하나는 $x^*=$ (-1, 0, 0.38, -0.52)이다. x_4는 반응변수에 영향을 미치지 못하므로 제외하였다. 한 가지 유의할 점은 최적화를 수행할 때마다, x^*의 값이 다르게 나온다는 것이다. 그 이유는 목적 값을 만족시키는 여러 가지 해 (alternative solutions)들이 존재하기 때문이다. 그 외의 값들은 다른 방법들과 비교하기 위해서 DS 방법으로 구한 x^*를 대입하여 계산했다.

4.2 Extended DS 방법

Extended DS는 DS와 달리 반응변수의 분산에 관한 정보도 이용한다. 그런데 반응변수 평균의 상한과 하한의 정보는 일반적으로 주어져 있는 반면에, 표준편차는 그렇지 않아서 상한 $\sigma_i^{(U)}$을 결정하기가 어렵다. 본 연구에서는 Lee & Kim[10]이 제시한대로, $((y_i^{(U)}-y_i^{(L)})/2)$를 망목특성을 지니는 반응변수 분산의 상한으로 정하였다. 반응변수의 평균과 표준편차를 각각의 호감도로 전환한 후, 식 (4)의 D_{EDS}를 최대화하는 해를 구하였다.

<표 2>에 실험결과가 있다. 초기치에 따라 국지적 최대값 (local maximum)에 수렴하는 경우가 있어서, 최적화를 수행할 때는 MATLAB6.5 소프트웨어에 내재된 random 함수로 생성된 다양한 초기치를 사용하였고, 결과 값들 중에서 D_{EDS}가 최대값에 해당하는 해를 최적해 x^*로 선정하였다. DS 방법론과 동일하게 첫 번째 반응변수 평균의 추정치 $\hat{y}_1(\mathbf{x})$의 호감도는 1을 얻었지만, 두 번째 변수는 낮은 값을 얻었다. 그리고 반응변수 분산의 호감도는 각각 0.71과 0.89를 얻었다. 이 때의 최적해는 $x^*=$ (-1, -0.06, 1, -1)이다.

DS의 결과와 비교해보면, 첫 번째 반응변수의 평균과 표준편차는 동일하지만 두 번째 반응변수는 차이가 있다. Extended DS로 구한 두 번째 반응변수의 평균은 76.931로 DS에서의 76.950보다 목표치 85에서 더 멀리 떨어져 있다. 그러나 Extended DS에서의 표준편차는 1.145로 DS에서의 2.762보다 훨씬 작다. 즉, 두 번째 반응변수는 Extended DS를 통해 목표치에서는 좀 더 멀어지지만 분산이 줄어드는 즉, 편의와 분산 사이에서 절충된(compromised) 지점을 최적해로 얻은 것이다. 그러므로 반응변수의 분산을 고려하지 않고 최적해를 찾으면, 반응변수의 분산이 큰 잘못된 지점을 찾게 된다. 반응변수의 평균과 분산 이외의 값들은 제안한 방법과 비교하기 위해서 Extended DS 방법으로 구한 x^*를 대입해서 구한 값이다.

4.3 제안한 방법

고무제품 사례에 제안한 방법을 적용하기 위해서는 식(17)의 Ribeiro *et al.*[17]가 추정한 모형을 가지고 반응변수의 평균과 총 분산의 식을 유도해야 한다. DS와 Extended DS 방법에서와 달리 제안한 방법은 공정변수의 변동을 고려하므로, 식 (17)에서 반응변수 평균의 추정치 $\hat{y}_i(\mathbf{x})$를 식 (11)에 대입하여 $\hat{y}_i(\mathbf{w})$를 추정한다.

$$\hat{y}_1(\mathrm{w}) = 61.73 + 2.06x_1 + 2.46x_1^2 + 2.33x_2 + 0.938x_3 + 0.938x_5 + 2.46\sigma_{w1}^2$$

$$\hat{y}_2(\mathrm{w}) = 74.62 - 2.33x_1 - 6.26x_2^2 - 6.26\sigma_{w2}^2 \quad (18)$$

이때 x_j는 실험자가 설정하는 공정변수의 설계치이고, 공정변수의 분산 σ_{wj}^2은 Ribeiro *et al.*[17]가 실험시 측정했던 다음의 값을 이용한다.

$$\hat{\sigma}_{w1}^2 = 0.16,\ \hat{\sigma}_{w2}^2 = 0.06,\ \hat{\sigma}_{w3}^2 = 0.05,\ \hat{\sigma}_{w5}^2 = 0.20 \quad (19)$$

공정변수의 변동으로 추가로 발생하는 POE의 제곱에 대한 근사치는 식 (17), 식 (19)를 가지고 Ribeiro *et al.*[17]가 제시한 식 (14)에 따라 전개하면 식 (20)과 같다.

$$POE_1^2 = (2.06 + 2 \times 2.46x_1)^2 \sigma_{w1}^2 + 2.33^2 \sigma_{w2}^2 + 0.938^2 \sigma_{w3}^2 + 0.938^2 \sigma_{w5}^2$$
$$POE_2^2 = 2.33^2 \sigma_{w1}^2 + (2 \times 2.26x_2)^2 \sigma_{w2}^2 \qquad (20)$$

반응변수의 총 분산은 식 (17)의 표준편차와 식 (20)의 POE 값을 식 (13)에 적용하여 계산할 수 있다. 상한, 하한, 그리고 목표치는 Extended DS의 실험에서와 동일하게 설정하였다. 반응변수의 평균과 총 분산에 관한 호감도를 각각 구한 후, 식 (16)의 D_{new}를 최대화하는 해를 구하면 <표 2>와 같은 결과를 얻는다.

[표 2] DS, Extended DS, 제안한 방법의 실험결과 비교

방 법	x^*			반응변수 y_1 (i = 1)		반응변수 y_2 (i = 2)	
DS	(-1, 0, 0.38, -0.52)	$\hat{y}_i(\mathbf{x})$	$d_{\mu i}$	62.000	1	76.950	0.26
		$\hat{y}_i(\mathbf{w})$		62.394		76.574	
		$\hat{\sigma}_i$		0.741		2.762	
		POE_i		1.854		0.932	
		$\sqrt{TV_i}$		1.997		2.915	
Extended DS	(-1, -0.06, 1, -1)	$\hat{y}_i(\mathbf{x})$	$d_{\mu i}$	62.000	1	76.931	0.25
		$\hat{y}_i(\mathbf{w})$		62.394		76.555	
		$\hat{\sigma}_i$	$d_{\sigma i}$	0.741	0.71	1.145	0.89
		POE_i		1.854		0.948	
		$\sqrt{TV_i}$		1.997		1.486	
제안한 방 법	(-0.77, 0, 1, -1)	$\hat{y}_i(\mathbf{w})$	$d_{\mu i}$	62.000	1	76.042	0.17
		$\hat{\sigma}_i$		0.945		1.145	
		POE_i		1.028		0.932	
		$\sqrt{TV_i}$	$d_{T\sigma i}$	1.396	0.44	1.476	0.86

DS, Extended DS와 유사하게, 첫 번째 반응변수 평균 $\hat{y}_1(\mathbf{w})$의 호감도는 1을 얻었지만, 두 번째 변수는 낮은 값을 얻었다. 그리고 반응변수의 총 표준편차 $\sqrt{TV_i}$의 호감도는 각각 0.44와 0.86을 얻었다. 이 때의 공정변수 조합은 $x^* = (-0.77, 0, 1, -1)$이다.

제안한 방법의 반응변수 평균의 추정치 $\hat{y}_i(\mathbf{w})$와 총 표준편차 $\sqrt{TV_i}$의 값을 DS, Extended DS의 결과와 비교해보자. 먼저 반응변수의 평균을 목표치에 맞추기가 비교적 용이한 첫 번째 반응변수에 대해 살펴보면, 3개의 방법 모두 목표치에 도달하여 1의 호감도를 얻었지만, 공정변수의 변동을 고려하지 않은 DS와 Extended DS에서의 $\hat{y}_1(\mathbf{w})$는 목표치보다 조금 큰 62.394를 얻었다. 이는 공정변수의 변동이 있는 경우의 반응변수의 평균에 관한 모형은 식(10)만큼 차이가 나기 때문이다. 반면에 두 번째 반응변수의 경우 제안한 방법에서의 $\hat{y}_2(\mathbf{w})$는 76.042인데, DS와 Extended DS에서는 각각 76.574와 76.555로서 오히려 제안한 방법의 반응변수 평균값이 목표치 85에서 가장 멀리 떨어져 있다. 그 이유는 DS와 Extended DS 비교에서와 같이 편의와 분산의 절충해로 설명될 수 있다. 제안한 방법의 $\sqrt{TV_2}$가 1.476으로 공정변수의 변동을 고려하지 않은 DS와 Extended DS의 2.915, 1.486보다 작은

것으로 그러한 현상이 설명된다.

제안한 방법과 Extended DS의 차이는 다음과 같다. 제안한 방법으로 얻은 첫 번째 반응변수의 표준편차 $\hat{\sigma}_1$는 0.945로서 Extended DS의 0.741보다 큰 값이다. 그러나 총 표준편차 $\sqrt{TV_1}$는 1.396으로 Extended DS의 1.997보다 작다. 두 번째 반응변수도 유사한 경향을 보인다. 그 이유는 제안한 방법은 공정변수의 변동으로 생긴 POE를 고려하였기 때문에, Extended DS보다 훨씬 작은 POE 값을 가지는 지점을 찾았기 때문이다. 이처럼 공정변수의 변동이 있음에도 불구하고 이를 고려하지 않으면, 반응변수의 총 분산이 큰 잘못된 지점을 최적해로 얻게 된다.

4.4 각 공정변수의 변동제거 시 호감도의 변화

이번에는 4개의 공정변수들 중에서 어느 변수가 전체 호감도 D_{new}의 증가에 가장 큰 기여를 하는지를 살펴보는 민감도 분석을 해보자. 현재 4개 공정변수의 분산은 식 (19)와 같이 0.16, 0.06, 0.05, 0.20이고, 이 때의 D_{new}는 0.51이다. 이를 4개의 기계 A, B, C, E에 해당하는 공정변수라고 생각하여, 새 기계로 교체하면 해당 공정변수의 변동이 0이 된다고 가정한다. 따라서 기계를 교체하면, 호감도가 증가할 것이다. 그러므로 기계의 가격과 호감도의 증가폭의 정보를 활용하여 어느 기계를 먼저 교체할지에 관한 투자계획을 수립할 수 있다.

<표 3>에는 각 기계의 변동이 0일 때 새로운 해 x^*_{new}를 구하고 각 반응변수의 평균과 분산, 그리고 호감도 등을 나타내고 있다. 이로부터 네 가지 기계의 가격이 동일하다면, A기계를 교체하는 것이 전체 호감도 뿐만 아니라, 반응변수의 평균과 총 분산에 관한 호감도 측면에서 다른 기계를 교체하는 것보다 이익이 크다고 하겠다. 특이한 점은 기계 A $(\sigma^2_{w1}=0.16)$의 분산이 기계 E $(\sigma^2_{w5}=0.2)$보다 작음에도, 변동이 제거된 후의 D_{new}가 0.59로 기계 E의 0.52보다 호감도의 증가폭이 더욱 크다는 것이다.

〈표 3〉 한 개의 공정변수의 분산이 0일때의 새로운 최적해

교체할 기계	x^*			반응변수 y_1 (i = 1)		반응변수 y_2 (i = 2)		D_{new}
기계 A ($\sigma_{w1}=0$)	(-1, -0.06, 1, -1)	$\hat{y}_i(\mathbf{w})$	$d_{\mu i}$	62.000	1	76.555	0.22	**0.59**
		$\hat{\sigma}_i$		0.741		1.145		
		POE_i		0.546		0.171		
		$\sqrt{TV_i}$	d_{Ti}	0.920	0.63	1.158	0.89	
기계 B ($\sigma_{w2}=0$)	(-0.8, -0.02, 1, -1)	$\hat{y}_i(\mathbf{w})$	$d_{\mu i}$	62.000	1	76.477	0.21	0.55
		$\hat{\sigma}_i$		0.921		1.145		
		POE_i		0.777		0.932		
		$\sqrt{TV_i}$	d_{Ti}	1.205	0.52	1.476	0.86	
기계 C ($\sigma_{w3}=0$)	(-0.78, 0, 1, -1)	$\hat{y}_i(\mathbf{w})$	$d_{\mu i}$	62.000	1	76.054	0.17	0.51
		$\hat{\sigma}_i$		0.940		1.145		
		POE_i		0.999		0.932		
		$\sqrt{TV_i}$	d_{Ti}	1.371	0.45	1.476	0.86	
기계 E ($\sigma_{w5}=0$)	(-0.79, -0.02, 1, -1)	$\hat{y}_i(\mathbf{w})$	$d_{\mu i}$	62.000	1	76.088	0.17	0.52
		$\hat{\sigma}_i$		0.927		1.145		
		POE_i		0.910		0.933		
		$\sqrt{TV_i}$	d_{Ti}	1.298	0.48	1.477	0.86	

5. 결론 및 추후 연구

공정변수의 변동이 존재할 때, 이것으로 인해 반응변수의 변동이 증가한다는 것을 살펴보았다. 그리고 공정변수의 변동으로 인해 추가적으로 생겨나는 POE를 감안한 새로운 호감도 함수 방법론을 제시하였다. 이에 따라 공정변수의 변동이 있는 경우는 호감도를 최대화시키는 공정변수의 최적 조건이 다를 수 있음을 보였다. 그런 점에서 이번에 MRS 영역에 공정변수의 변동을 감안한 방법론을 접목한 것이 본 연구의 기여라 할 수 있다. 또한 공정변수의 변동이 없을 때는 공정변수의 변동을 감안하지 않은 기존의 Extended DS 방법론과 동일해지는 특성을 보인다.

제안한 방법론은 기존의 방법론들과 비교하여 다음과 같은 상황에서 큰 효과를 보일 수 있다. 첫째, 공정변수의 변동이 클 때, 기존의 방법론보다 훨씬 개선된 해를 찾을 수 있다. 둘째, 추정된 반응변수의 모형이 공정변수와 비선형 관계일 때, 제안한 방법론의 효과가 커진다. 왜냐하면 반응변수의 모형이 공정변수와 선형 관계에 있다면 모든 지점에서 반응변수와의 기울기가 동일하므로, 공정변수의 분산이 모든 지점에서 같다고 가정하면, 발생하는 POE 값이 동일하기 때문에 기존 방법론보다 개선된 해를 찾을 수 없다. 셋째, 공정변수의 분산 크기에 대한 민감도 분석을 통해 교체해야 할 기계의 우선순위를 결정하는 등의 투자계획을 세울 때도 제안한 방법을 적용할 수 있다.

추후 연구 방향으로는 다음과 같은 것들이 가능하다. 첫째, 반응변수의 공분산을 고려하는 손실 함수 방법론에 공정변수의 변동이 어떠한 영향을 미치는지에 관한 연구가 필요하다. 둘째, 본 연구에서 설명한 공정변수의 변동과 같이 독립변수에 오차가 있는 경우에 효과적으로 모형을 추정한 방법들이 다수 연구되어 있는데, 이를 MRS 영역에 접목시킬 수 있을 것이다. 셋째, Ribeiro & Elsayed[16]가 언급하였듯이 만약 공정변수들의 변동이 서로 독립적이지 않다면 공정변수의 공분산도 모형에 반영할 필요가 있다. 끝으로, 반응변수의 평균의 경우 상한과 하한이 주어지는 반면에, 분산의 상한은 보통 주어지지 않는다. 그런데 분산의 상한을 무엇으로 정하느냐에 따라 최적해가 달라질 개연성이 있으므로, 반응변수의 분산을 고려하는 호감도 함수 방법론에서는 분산의 상한을 결정하는 방법에 대한 연구가 필요할 것이다.

참 고 문 헌

[1] Ames, A.E., N. Mattucci, S. Macdonald, G. Szonyi and D.M. Hawkins, "Quality Loss Function for Optimization across Multiple Response Surface," *Journal of Quality Technology*, Vol.29(1997), pp.339-346.

[2] Box, G.E.P. and K.B. Wilson, "On the Experimental Attainment of Optimum Conditions," *Journal of the Royal Statistical Society-Series B*, Vol.13(1951), pp.1-45.

[3] Derringer, G.C., "A Balancing Act : Optimizing a Product's Properties," *Quality Progress*, (June 1994), pp.51-58.

[4] Derringer, G.C. and R. Suich, "Simultaneous Optimization of Several Response Variables," *Journal of Quality Technology*, Vol.12, No.4 (1980), pp.214-219.

[5] Fathi, Y., "Nonlinear Programming Approach to the Parameter Design Problem," *European Journal of Operational Research*, Vol.53(1991), pp.371-381.

[6] Harrington, E.C., "The Desirability Function," *Industrial Quality Control*, Vol.4(1965), pp.494-498.

[7] Kim, K. and D. Lin, "Simultaneous Optimization of Multiple Responses by Maximizing Exponential Desirability Functions," *Journal of the Royal Statistical Society-Series C*, Vol.43 (2000), pp.311-325.

[8] Khuri, A. and M. Conlon, "Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polynomial Regression Functions," *Technometrics*, Vol.23(1981), pp.363-375.

[9] Ko, Y., K. Kim and C. Jun, "A New Loss Function-Based Method for Multiresponse Optimization," *Journal of Quality Technology*, Vol.37, No.1(2005), pp.50-59.

[10] Lee, M. and K. Kim, "Expected Desirability Function : Consideration of Both Dispersion and Location Effects in Desirability Function Approach," *Working Paper*, Department of Industrial Engineering, POSTECH, 2004.

[11] Lin, D. and W. Tu, "Dual Response Surface Optimization," *Journal of Quality Technology*, Vol.27(1995), pp.34-39.

[12] Myers, R.H. and D.C. Montgomery, *Response Surface Methodology : Process and Product Improvement with Designed Experiments*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, New York, 2002.

[13] Nocedal, J. and S.J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer, 1999.

[14] Pignatiello, J., "Strategies for Robust to Multiresponse Quality Engineering," *IIE Transactions*, Vol.25(1993), pp.5-15.

[15] Plante, R., Process Capability : a Criterion for Optimizing Multiple Response Product and Process Design, *IIE Transactions*, Vol.33(2001), pp.497-509.

[16] Ribeiro, J.L. and E.A. Elsayed, "A Case Study on Process Optimization Using the Gradient Loss Function," *International Journal of Production Research*., Vol.33, No.12(1995), pp. 3233-3248.

[17] Ribeiro, J.L., F. Fogliatto, and C.S.t. Caten, "Minimizing Manufacturing and Quality Costs in Multiresponse Optimization," *Quality Engineering*, Vol.13, No.2(2000), pp.191-201.

[18] Vining, G.G., "A Compromise Approach to Multiresponse Optimization," *Journal of Quality Technology*, Vol.30(1998), pp.309-313.