

카오스의 발견과 이해에 대한 분석적 검토: 사회적, 인지적 측면을 중심으로

김종백

홍익대학교

An Analysis of the Discovery of Chaos Based on Socio-Cognitive Perspectives

Kim, Jong-Baeg

Hongik University

Abstract: The purpose of this study was to understand mechanisms of scientific discovery and how this can help students, as young scientists, to understand scientific ideas in the science classroom. To unravel this mechanism, this study employed the notion of chaos. This phenomena was rediscovered by Edward Lorenz. In this paper, the general concept of chaos was briefly discussed in relation with previous scientific theories such as Newtonian physics and quantum mechanics. Following this, discovery constraints in terms of available technology at the time was described. In addition, Lorenz's psychological processes during the discovery was also discussed. Based on analysis, major implications for the field of science education were the provision of relevant schemata, the use of cognitive tools, the presentation of problems with various representational forms, and the sharing of ideas with others.

Key words: science education, chaos theory, scientific discovery

I. 서론

과학교실에서 학생들의 모습은 어찌 보면 작은 과학자일지도 모른다. 그들은 지나간 인류의 과학적 업적을 다시 재발견하고 음미해야 한다. 교육자로서 학생들에게 어떠한 방식으로 이러한 과학적 유산들을 전달할지에 대해서는 다양한 접근이 가능할 것이다. 예를 들어, 과학적 지식을 객관화된 형식적 지식의 형태로 교사가 전달할 수 있고 혹은 학습자가 중심이 되어 탐구형식의 발견학습의 형태가 될 수도 있을 것이다. 그러나 학생들에게 문제를 새로운 틀로 보거나 해석할 수 있는 과학적 창의성을 키워주기 위해서 혹은 능동적인 경험을 제공한다는 측면에서 후자의 방법이 선호된다고 할 수 있다.

학생들이 과학적 발견학습을 성공하도록 돕기 위해서는 먼저 과학적 발견에 이르는 데 필요한 조건들에 어떠한 것이 있는지 살펴 볼 필요가 있다. Kihar(2000)는 과학적 발견의 조건으로서 크게 세 가지 요소를

주장하고 있다. 첫째, 발견자의 영역에 관련된 선지식(domain-specific prior knowledge)이다. 즉, 구체적인 영역 관련 지식은 과학적 발견에서 중요한 지각적 혹은 인지적 도구로서 역할을 수행한다. 둘째, 가용한 인지적 도구와 자료가 과학적 발견에 영향을 미친다. 여러 가지 과학자들이 만들어낸 상징체계나 물리적 인공물들은 과학적 발견을 이해하고 체계화하는데 도움이 된다. 마지막으로 인지적 능력이 과학적 발견에 결정적 역할을 한다. 예를 들면 작업기억, 추론능력, 시각화, 지각의 정확성 혹은 집중력과 같은 개인적 요인들은 과학적 발견에서 여러 가지 복잡한 정보를 효율적으로 다루는 중요한 역할을 한다.

과학적 발견에 관한 문헌들을 살펴보면 이 분야에 접근하는 연구방법을 크게 두가지로 나누어 보고 있다. 첫째, 인지과학적 연구방법으로 비과학자를 대상으로 한 실험연구(Kihar, 2000)나 컴퓨터를 이용한 시뮬레이션 연구(Cheng & Simon, 1995)이다. 이러한 연구의 장점은 많은 비과학자를 대상으로 하기 때

*교신저자: 김종백(jongbaegkim@knu.ac.kr)

**2004.11.11(접수) 2005.6.28(1심통과) 2005.8.9(2심통과) 2005.11.25(최종통과)

문에 사례수를 확보할 수 있고, 발견에 실패한 경우들을 별도로 분석할 수 있고, 반복적 실험이 가능하다는 것이다. 이에 비해 인지역사적 연구방법은 실제 발견에 성공했던 과학자들의 경우들을 살펴봄으로써 생태학적 타당도(authenticity)나 학제간 협력에 대한 설명의 틀을 제공한다는 장점을 가지고 있다(예를 들어, Nersessian, 1992).

본 연구는 두 번째 연구방법으로 카오스라는 개념의 발견 사례를 통해 과학적 발견의 과정과 조건들을 한번 탐색해 봄으로써 궁극적으로 과학적 발견 수업에 임하는 학생들에게 어떠한 측면들을 부각시켜야 할지 교육자들을 위한 시사점을 찾아보는데 그 목적이 있다. 연구를 수행하기 위해서 일차적 자료로서 Lorenz 자신의 논문(1963; 1980)과 저작물(Lorenz, 1993) 그리고 비디오 자료(Devaney, 1989)를 이용하였으며 이차적 자료로서 Lorenz가 발견한 카오스 개념과 관련한 연구물(Gleick, 1987; Peterson, 1993; Ruelle, 1991; Stewart, 1989) 등을 활용하였다.

II. 이론적 배경

18세기에 프랑스 수학자 Laplace는 모든 과정과 변화는 이해, 예측, 예상될 수 있다고 믿었다. 결정론적인 우주관은 과학 철학 분야에서 최근에 나타난 것이 아니며, 오랜 기간 동안 핵심적인 관심사가 되어 왔다. 지난 3세기에 걸쳐서 과학자들은 모든 일상적인 상태에 있는 물질들을 지배하는 물리적 법칙들을 발견하려고 노력해 왔다. 과학적 지식과 법칙이 갖는 가장 중요한 함의는 일련의 현상들 간의 인과 관계를 밝히고, 이 지식을 사용하여 다른 사실로부터 어떤 사실을 예언하는 것이었다. 예컨대, Issac Newton은 자신의 간단한 운동 법칙과 중력 이론을 사용하여 별이 하늘을 가로지는 것처럼 보이는 현상에 대하여 설명하려고 노력했다. 그러므로 앞으로의 일어날 현상을 예언하기 위해서는 충분한 양의 정보를 모으고 그것을 처리하는 것이 필수적이라고 생각되었다(Peterson, 1993).

그러나 이러한 생각은 카오스라는 개념의 발견으로 도전을 받게 되었다. 단지 몇 개의 요인들만으로 구성된 단순한 결정론적 체계에서도 무작위적이며 무질서적인 행동이 나타날 수 있다는 사실이 이러한 도전의 핵심이다. 무작위성은 근본적인 문제와 관련이 있기 때문에 단순히 정보를 더 모으는 것이 무질서적 행동을 사라지게 하지 않는다(Crutchfield, Farmer, Packard, & Shaw, 1986). 이러한 결정론적 체계에서 나타나는 무작위성을 학자들은 카오스라고 불렀는데 무질서적

행동을 보이는 과학적인 현상들은 현실속에서도 쉽게 찾아 볼 수 있다. 예를 들어, 결정론적인 물리 법칙을 따르고 있음에도, 기상 예보, 증권 시장의 경향 예측, 시냇물의 흐름 등이 그러하다. 다시 말해서, Laplace의 믿음인 완전한 예측 가능성은 아직 현실화되지 못하였다.

카오스의 발견으로 자연 및 사회현상의 과학적 모델링에 새로운 패러다임이 창조되었으며(Crutchfield, et al., 1986) 카오스 이론은 수학, 생물학, 물리학 등의 중요 과학 분야에 적용되어 왔다. 수학에서는 Mandelbrot와 Feigenbaum과 같은 연구자들에 의해 프랙탈과 이상한 인력자(strange attractors)에 대한 연구에서 많이 적용되었다. 또한 물리학, 특별히 열역학에 적용되어 난류가 연구되었고 자기 조직 체계(self-organizing system)의 상태에 대한 이해로 이어지게 되었다. 생태학에서는 May(1989)가 동식물의 구분과 개체 수 증가에 카오스 현상이 존재함을 주장하였고, Monod(1971)은 불확실성이 유전 연구에서 중요한 역할을 한다고 주장하였다. 최근에는 카오스의 개념을 심리학과 특별히 인지심리학에 적용하려는 시도들이 늘어가고 있다(Simon, 1996).

1. 카오스: Henri Poincare에서 Edward Lorenz에 이르는 역사적 흐름

카오스계는 그 결과가 초기 조건에 대해 매우 민감하다(Ruelle, 1991). 예컨대, 당구공은 초기 조건에 매우 민감하게 영향을 받는다. 그렇기 때문에 결정론적 모형은 장기간에 걸친 예측에 대해서는 제 역할을 할 수 없다. 이것은 우리가 아는 초기 조건이 알 수 없는 어떤 면들에서 정밀하지 못하기 때문이다. 다시 말해서 우리는 진짜로 존재하는 초기 조건과 그것과 매우 근사한 값을 가진 많은 가상의 초기 조건을 구별 할 수 없다.

Issac Newton의 중력 이론은 인과관계라는 개념을 분명하게 연구의 대상으로 삼고 있으며 그의 이론은 달의 움직임을 기술하고 설명하기 위한 새로운 수학적 틀을 구축했다. 하지만 Netwon의 모형에서 지구, 달, 태양의 움직임을 함께 관련지어 설명하는 것이 대단히 어려운 문제이며 Netwon 자신도 그의 중력이론으로 세 천체의 문제를 설명하는데 실패했다고 인정했다(Peterson, 1993).

Henri Poincare의 이론적 연구는 Newton의 법칙을 이용한 수학적 공식이 세 개 혹은 그 이상의 행성의 운동의 경우에 있어서, 주기성과 정확한 예측 가능성 뿐만 아니라 불규칙성과 예측 불가능성까지 포함하고

있음을 증명하였으며 중력의 영향 하에 있는 세 천체의 운동이 극도로 복잡할 수 있음을 증명하였다. 그의 발견은 오늘날 카오스라 불리고 있는 현상에 대한 최초의 증거이며 무작위성을 내포하지 않은 아주 단순한 모형이 매우 불규칙적인 행동을 산출할 수 있음을 설명하고 있다. 구소련의 물리학자 Landau는 복잡한 역학계가 예측될 수 없다고 믿었는데 심지어 매우 단순한 체계조차도 매우 불규칙한 행동을 보일 수 있다는 것을 Pointcare가 증명함으로써 반박되었다 (Crutchfield, et al., 1986). Poincare(1952)는 결정론적인 체계가 자주 예측하기 어려운 행동을 보일 수 있다는 관념의 밑바탕이 되는 생각에 대해서 많은 부분을 명료화하였다. 그러나 그러한 개념들을 발견해낸 선학의 거대한 천체 역학 업적에 대하여 깊이 파헤치려는 노력을 하는 과학자가 거의 없었다(Peterson, 1993).

겉으로 보기에 역설적인 것은 카오스가 결정론적이고, 또 어떤 우연의 요소도 없는 분명한 규칙에 의해 산출된다는 것이다. 원리적으로 미래는 과거에 의해 전적으로 결정된다. 그러나 실제에 있어서는 작은 불확실성이 확대되기 때문에, 비록 짧은 기간의 행동은 예측이 가능하다 해도, 긴 기간에 걸친 행동은 예측이 불가능하게 된다. 우아한 기하학적 형태로서 카오스의 움직임은 외견상 무작위성을 산출한다. 하지만 이러한 무질서한 움직임을 기저에 두고 있는 카오스도 질서를 갖고 있다. 예를 들어, Mithcell Feigenbaum은 카오스에 근접하는 방식과 관련하여 보편수(universal number)를 발견하였다(Gleick, 1987; Lorenz, 1980).

요약하면 카오스는 다음과 같이 정리될 수 있다. 첫째로, 카오스계는 결정론적이다. 이것은 카오스계가 결정론적인 물리 법칙을 따르고 있다는 것을 의미한

다. 둘째, 카오스계는 초기 조건에 매우 민감하다. 시작하는 시점의 아주 가벼운 변화는 엄청나게 다른 결과를 초래할 수 있다. 이것은 카오스를 예측 불가능한 계로 만든다. 셋째, 카오스계는 매우 체계가 없어 보이고, 심지어 무질서해 보이지만, 사실은 그렇지 않다. 무질서적인 행동 저변에는 체계가 있고 유형이 있다. 진정한 무작위적 체계는 카오스적인 것이 아니다.

카오스라는 개념은 1875년에서 1925년 사이 Henri Poincare, Pierre Fatou, 그리고 Gaston Julia와 같은 프랑스 수학자들의 연구에 처음으로 나타났으나 (Mandelbrot, 1990; Peitgen, Jurgens, Saupe, & Zahlten, 1990) 그것의 의미를 실재의 물리적 세계와 관련지어 설명하거나 시각적 기술 도구로 표현하지 못했다. 카오스는 MIT의 이론 기상학자인 Edward Lorenz에 의해 재발견되었다. 다음 절에서는 Edward Lorenz가 카오스를 발견할 당시의 상황과 그의 이론에 대한 간략한 서술이 제시되었다.

2. 카오스 발견의 과정

카오스는 우연한 상황 속에서 발견되었다. 1961년 겨울 어느 날, Lorenz는 일련의 날씨 모형을 가상 실험을 통해 관찰하고 있었는데 복잡한 과정을 간단하게 하려고 가상 실험 과정 전체를 처음부터 시작하지 않고 중간 부분부터 시작하였다. 컴퓨터에 초기조건을 주어야 하는 작업에서 원래 데이터를 그대로 입력하지 않고 소수점 세 자리 나머지 부분을 제외한 상태로 입력하였다. 놀랍게도 이렇게 해서 그가 얻은 결과는 종전에 그가 처음부터 끝까지 실험하고 계산한 결과와는 완전히 다른 것이었다. Lorenz(1993)는 당시 컴퓨터를 신뢰하기 어려웠으므로, 컴퓨터에 어떤 문제가 있을 것이라고 생각하였다.

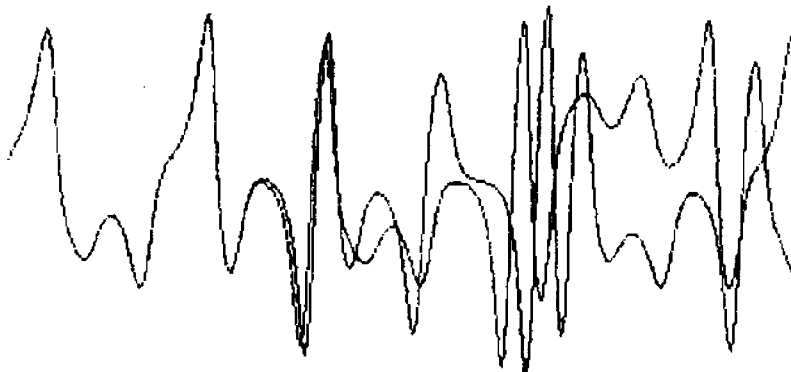


Figure 1: Lorenz's experiment: the difference between the start of these curves is only .000127. (Ian Stewart, Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos, pg. 141)

그림 1 Lorenz의 가상 기상실험 (Stewart, 1989, p.141 인용)

그러나 곧 그는 기상 모형에 입력한 자료에 관계된 문제라는 것을 깨달았다. 15개월 기간 동안의 날씨 모형의 실험에서 초기 두 달 정도까지는 동일한 예측 결과를 양산했지만 그러나 두 달 이후의 예측 부분에서부터 축약된 데이터 적용이 전혀 새로운 양상으로 판이한 기상 예측결과로 나타났음을 보여주었다(그림 1 참조).

3. Lorenz의 이상한 인력자

Edward Lorenz는 1961년에 카오스 현상을 발견하고 3년 지난 뒤에 보고서를 발표하였다. 1963년 1월에 미국 “Journal of the Atmospheric Sciences”이라는 잡지에 ‘결정론적인 비주기적 흐름’이라는 논문을 게재하였다. 이 보고서는 MIT에 있는 그의 실험실에서 기상 체계의 수학적 모형에 대한 3년 동안의 연구를 기술한 것이었으며 발견의 최종적 결과물인 이상한 인력자도 포함되어 있었다(Lorenz, 1963).

이상한 인력자를 설명하기 위해, 간단한 진자를 사용할 수 있다. 그것의 움직임을 결정하는 데 필요한 것은 위치와 속도, 두 가지의 변수가 전부이다. 그 상태는 평면 위의 어느 한 점으로 표시되는데, 그것은 위치와 속도의 연합체이다. Newton의 법칙은 수학적으로 미래의 상태에 대한 변화의 규칙을 기술하는데 진자가 앞뒤로 움직이면 그 상태는 수평면에서 궤도를 따라 움직인다. 단순한 진자의 움직임은 한 지점을 향하여 안정된 상태의 주기적 움직임을 보여줄 것이다.

그러나 가상의 기상 모형에 의해 만들어진 Lorenz의 이상한 인력자는 어느 한 지점에 안정하려 하지도 않았고, 주기적인 운동도 하지 않았다(그림 2 참조). 위의 그림 2는 다음과 같은 수학적 공식으로 표현될 수 있다(Lorenz, 1963).

$$\begin{aligned} dx/dt &= \sigma(y-x) \\ dy/dt &= rx - y - xz \\ dz/dt &= xy - \beta z \end{aligned}$$

- x= 대류의 흐름
- y= 수평적 기온 분포
- z= 수직적 기온 분포

Lorenz는 그의 기상을 모형화하기 위해 위와 같은 세 변수를 중심으로 공식들을 도출했는데 이 수학적 모형의 특징은 변수의 움직임이 어떠한 특정한 값으로 수렴되거나 계속적으로 발산하는 것이 아니라 한정된 범위 내에서 움직이지만 예측할 수 없다는 것이다. 이는 불과 세 가지 변인으로 표현된 기상모형에서조차도 앞선 미래 상태를 예측하는 것은 불가능하다는 사실을 반증한다(Lorenz, 1963; Lorenz, 1993).

III. 카오스 발견의 인지-사회 심리적인 특성

Lorenz가 카오스 개념의 발견을 가능하게 한 인지-사회심리학적 측면들이 있다. 첫째, Lorenz는 처음에 다른 기상학자들과는 다른 개념적 시각으로 카오스현상의 문제를 보았다. 다시 말해서, 대기 체계에 대한 그의 문제 인식과 이해는 1950년대와 1960년대 이전 기상학자들의 인식들과 상이했다. 둘째, Lorenz는 다른 기상학자들에 비해 수학 지식에 대해 상당한 정도의 깊이로 이해하고 있었기 때문에 다른 학문 분야의 학자들과 의사소통이 가능했다. 이는 이후 그의 업적이 여러 분야로 확산하게 되는 계기가 되었다. 셋째, Lorenz(1993)는 단순히 자료의 해석보다는 일반적인 기상 예측 모형을 찾기 위한 노력을 경주했다. 넷째, 이 분야에서 중요한 기술적 진보가 있었다. John von Neumann이 만든 컴퓨터는 Lorenz를 비롯한 기상학자들로 하여금 기상 모형실험을 간편하게 할 수 있도록 가능하게 했다(Gleick, 1987). 이에 더하여 이러한 컴퓨터 기술의 발달은 카오스 현상이 시각적으로 잘 이해될 수 있도록 해주는 그림이나 도표와 같은 다른 형태의 표상으로 나타내는 것을 가능하게 했다(Devaney, 1989; Mandelbrot, 1990; Peitgen,

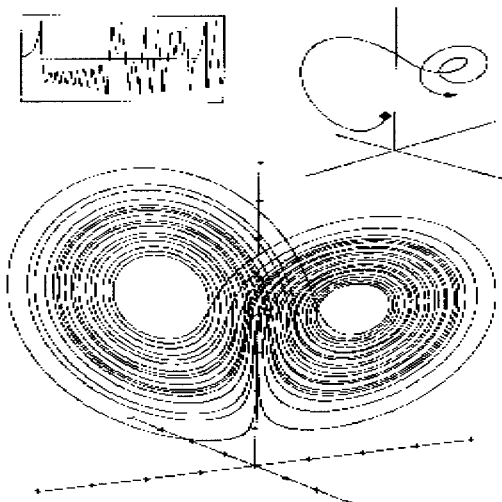


Figure 2: the Lorenz Attractor (James Gleick, Chaos - Making a New Science, pg. 29)

그림 2 Lorenz의 인력자 (Gleick, 1987, p.29 인용)

et al., 1990). 마지막으로, Lorenz는 그가 연구하고 있는 기상 모형의 효과를 이해하기 위하여 숫자를 이용한 표상법과 함께 그래프와 같은 시각적 표상을 함께 이용했다. 이러한 사실들로부터 일반적으로 추출될 수 있는 주요한 인지·사회적 기제에는 다섯 가지가 있다: (1) 개념의 선택적 주의, (2) 현상이해에서 지식의 인식론적 역할, (3) 개념화 과정에서 일반화 및 추상화의 중요성 (4) 복잡한 현상의 이해에서 시각적 표상의 역할 (5) 이해의 도구로서 사회적 기술의 진보이다. 다음에서는 이들을 기본 주제로 논의를 전개하고자 한다.

1. 인지적인 특성

첫 번째 인지적인 특성으로 주의, 지식, 일반화 및 추상화, 시각적 표상으로 나누어 볼 수 있는데 다음과 같다.

1) 개념 주도적 선택적 주의

Gibson(1969)이나 Marr(1982)와 같은 심리학자들은 인간이 정보를 지각하고 주의하는데 있어서 자료 주도적 방식으로 처리한다고 주장한다. 즉, 정보의 특성이나 속성이 처음 처리되고 나서 이들 특성들이 기억 속에 저장되어 있는 정보와 비교된다는 것이다. 그러나 형태주의나 Minsky(1981) 혹은 Schank(1989)와 같은 스키마 이론가들은 기억 속에 저장된 정보가 재인이나 지각 및 주의의 과정에 활동적으로 관여한다고 생각한다. 어떠한 입장이 옳은 지에 대한 논란이 있을 수 있으나 카오스의 발견에 이르는 과정에서 보여주는 특징은 카오스라는 현상의 지각이 자료 주도적이라기보다는 개념 주도적이라는 것이다.

Lorenz(1993)는 고정된 상태로 안정화되지 않는 기상 모형을 찾아내기 위해 노력하였으며 비주기성(aperiodicity)과 예측불가성(unpredictability)이 서로 관계가 있다고 믿었다. 대기에 대한 이러한 이해에서 비롯한 문제에 대한 표상은 현상을 단순히 무작위적인 것이 아닌 다른 시각으로 볼 수 있게 했다. 당시 그 분야에 다른 기상학자들은 이런 종류의 설명 모형을 갖고 있지 않았다. 다시 말하면 경험적 지식 구조는 우연한 기회에 발견한 카오스 현상의 중요성을 인식할 수 있도록 해주었다. 근본적으로, 그의 지식 구조는 물리 현상에 대한 결정론적 관점에 대한 강한 신념과 경험에 근거하고 있었다(예컨대, 수학에서 뉴턴의 물리학과 경험에 대한 믿음).

그의 이론이 어떻게 하여 선택적 주의(selective attention)에 영향을 줄 수 있었는가에 대한 물음에 대한

증거는 그가 연구에 이용하기 위해 선택하였던 공식이 어떠한 것이었는가에 관련이 있다. Lorenz는 그의 실험실에서 카오스 현상을 최초로 발견한 뒤 초기 조건에 대한 민감성을 여전히 지니고 있는 단순한 결정론적 모형을 개발하는 데 힘을 쏟았다. Lorenz의 기상모형은 미국의 Travel Weather Center의 기상학자 Barry Saltzman의 것을 단순화한 것이었으나 이들 간에는 근본적인 시각의 차이가 있었다. 즉, Saltzman은 안정되어 있는 체계의 기상 변화에만 관심이 있었고, Lorenz는 안정되기를 거부하는 기상 변화에 계속적인 관심을 보였다. 여기서 안정되기를 거부한다는 것은 비주기적 속성을 가졌다는 의미이다(Lorenz, 1993). 대기에 대한 그의 개념적 지식은 그가 연구에 사용할 공식을 선택하는 데에 영향을 주었다.

두 번째 증거는 Lorenz(1993)가 카오스 현상이 있음을 처음으로 인지했을 때, 그가 그 현상의 기저에 존재하고 있는 구조에 주의를 기울일 수 있었다는 사실이다. 그가 그 현상에 즉각적으로 기울인 주의를 경험적인 증거를 가진 것은 아니었지만, 그에게는 이미 비주기성과 예측 불가능성의 관계에 대한 개념이 있었기 때문이다. 만약 그가 처음의 값과 재생된 값과의 차이를 보았을 당시에 그에게 비선형체에 대한 일반적 지식이 없었다면, 그는 그의 자료에 나타난 불일치를 단순히 체계 내에 존재하는 잡음(noise) 정도로 해석하는 것과 같이 완전히 다르게 해석했을지도 모른다.

2) 개념변화와 도구로써의 지식

구체적인 학문 영역에 대한 지식(domain-specific knowledge)은 과학적 발견에 있어서 매우 중요하다(Dunbar, 1995). 구체적인 예로 Dunbar(1993)의 실험은 어떤 영역의 과학적 배경 지식을 사용하는 피험자가 생물학적 개념의 발견에 수월성을 보인다는 사실을 제시했다.

Lorenz의 역학계와 수학 분야에 대한 폭넓은 배경 지식은 카오스 현상의 이해와 확산과정에서 결정적인 역할을 하였다(Gleick, 1987; Lorenz, 1993). 아마도 그에게 그러한 배경 지식이 없었다면 발견된 현상이 갖는 중요성을 이해할 수 없었을 것이다. 1963년도에 출판된 그의 보고서는 이것을 보여주었다(Lorenz, 1963). 그는 수학적 배경 지식을 활용하여 카오스 현상에 대한 진일보한 분석을 할 수 있었다. 이러한 의미에서 Poincare와 Lorenz 두 사람 모두 자신의 생각을 명료화 할 수 있는 강력한 분석적 도구를 가지고 있었던 것이다. Lorenz에게 이러한 현상을 해석할 수 있는 수학적 능력이 있었기 때문에, 그의 연구는 그

뒤 다른 분야의 학자들에게 그의 발견 내용이 쉽게 알려질 수 있었다.

Lorenz(1993)가 카오스라는 개념을 발견할 때까지, 대기에 대한 그의 생각에는 점진적인 변화가 있었는데 그것을 발견하기 전에 이미 그는 기상 모형과 같은 역학계가 어떤 것이어야 하는지에 대해서 개념적 지식을 가지고 있었다. 그는 카오스를 발견할 당시에 유행하던 통계적 모형에 근거한 기상 모형에 만족하지 않았다. 비선형 기상 모형이 실제의 기상 상황을 설명하기에 더 좋다는 강한 믿음이 있었다. 그 자신도 통계적 기상 예측위원회의 구성원이었지만, 비선형성을 나타낼 수 없는 통계적 기상 예측 방법의 한계를 분명히 알았다(Lorenz, 1993). 이와 같이 그가 카오스를 발견한 과정은 이전부터 존재해온 생각에 의해 유도된 것이기 때문에 어떤 의미에서 그의 발견은 놀라운 것이 아닐 수 있다. 다음의 회고를 보면 Lorenz(1993)가 가지고 있었던 개념적 사고에 대한 일면을 볼 수 있으며 그의 생각은 연구를 하는 과정에서 변화된 것임을 추측할 수 있다.

1948년 이후 계속 나는 대기구조의 역동성에 관심을 가지고 있었고 통계적 기상예보 모형보다는 수리적 기상예보 모형에 관심을 가지고 있었으며 나는 다양한 기상예보 모형들이 몇 안되는 특별한 상태(special set of states)로 수렴될 것이라고 느꼈다. 내 생각엔 오늘날의 입장에서 보면 결국 나는 인력자를 찾고 있었다. 내가 그런 것이 존재하고 있다는 것에 대한 믿음은 옳았지만 몇 개의 공식으로 설명가능하다고 가정한 것은 실수였다(p. 130).

Lorenz는 이른바 나비효과—초기 조건의 차이에 대한 민감성—를 발견한 시점에서 만족하지 않았다. 즉, 이전부터 그에게 있던 역학계에 대한 결정론적 관점 때문에, 그가 우연히 만들어낸 그래프가 순수한 무질서성을 나타낸다고 믿지 않았다. 수학과 역학계 분야에서 Lorenz의 이러한 결정론적 배경지식은 눈앞의 현상들에 대해 뉴턴 식의 접근방식을 취하고 카오스에서 가능한 기저 구조나 질서에 대한 설명을 위하여 계속해서 노력하는 계기로 작용했다.

3) 개념화 과정으로서의 일반화와 추상화

기상 체계에 대한 이해는 유체역학에 있어 비행기를 제작하는 것처럼 거대하고 복잡한 실험으로 간주된다. 예를 들어, 난류, 압력, 기온 차이와 여러 다른 요인들을 함께 고려해야 한다. 그러므로 대기를 매우 세부적으로 모형화할 수 있는 공식을 만든다는 것은 매우 복잡한 작업이다. 이러한 복잡성의 이유 때문에, Lorenz는 그의 모형을 이미 공인된 12개변인 기상모

형에 기초하기로 결정하고 카오스계를 발견할 때까지 계속적으로 12개의 변인(공식)이 이용되었다.

Gooding(1992)은 과학자들이 특정 실험으로부터 근거 있는 주장을 도출해 내기 위해 논증이 가능한 형태로 실험결과와 재구조화를 자주 시도한다는 사실을 주장하였다. Schank(1988)도 과학적인 연구 행동에서 일반화 과정의 중요성에 대하여 언급하였다. Lorenz의 자신의 발견을 일반화하고 추상화하기 위해 그동안 기상학자들 사이에서 지지되고 사용되었던 12변인 모형을 버리고 초기조건에 민감한 보다 단순한 결정론적 체계를 찾기 시작했다(Lorenz, 1993). 결국 그는 세 개의 변인만을 가지면서도 비주기성을 보이는 단순한 모형을 찾아냈고 카오스현상을 여러 결정론적인 체계에 일반화하는데 성공할 수 있었다. 이에 대한 Lorenz(1993) 자신의 언급을 보면 다음과 같다.

토론회의에서 나는 예측할 수 없는 열두개 변인 모형의 움직임에 대해 논의했지만 나는 다른 논문에서 더 간단한 모형도 동일한 움직임을 보일 수 있다고 믿었다. 1983년 까지 나는 초기 조건에 민감한 세 변인 모형을 찾는데 실패했다. Barry는 나에게 그의 일곱 변인 모형을 보여주었고 나는 이를 활용 MIT대학에서 컴퓨터를 활용 Barry가 발견한 주기성을 보여주지 않는 세 변인 모형을 찾아내기에 이르렀다(p. 137).

기존에 존재하고 있던 복잡한 기상모형의 단순화를 통해서 그가 증명하고자 했던 중요한 사실은 카오스의 본질이 극단적인 상황까지 일반화될 수 있다는 사실이다. 이것을 보여주기 위해 그는 아주 단순한 결정론적 모형을 이용하여 카오스 현상이 일어날 수 있음을 보여주었다. 이러한 일반화 혹은 추상화의 과정은 그로 하여금 더 설득력 있는 주장을 가능케 했는데 이는 인지적인 측면에서도 효과적인 전략이었다. 즉, 그러서는 12개의 변인이 포함된 공식을 수학적인 방법으로 한 번에 처리할 수 없었다. 이에 Lorenz는 기상 모형을 인지적으로 통제 가능한 3개 변인을 가진 날씨 모형으로 축소하였다(Palmer, 1991). 이것은 한 세기 전, Henri Poincare가 n개의 천체에 대한 일반화를 위해 세 개 천체의 문제를 풀려고 했던 것과 정확히 일치한다(Peterson, 1993). 이는 과학적인 발견에서 추상화 과정이 개념 구조의 이해에 어떠한 영향을 미치는 지를 반증하는 예이다(Nersessian, 1992).

4) 시각적 표상의 활용

시각적인 표현물은 과학적 발견과 지식의 이해에 중요하다(Latour, 1990; Henderson, 1991). 이것은 사람들 간에 의사소통과 이해를 가능하게 하는 과학 문화의 한 부분이다(Lehrer & Schauble, 2000; 김중

백, 2003). 이들 시각적 표상물을 이용하는 것은 기억을 강화하고 내용에 대한 이해를 심화하며 인지적인 부담을 줄이는 데 효과적이다(Shepherd, 1988). 언어적인 것을 이미지로 번역하는 과정에서 이전에는 함축적이며 숨겨져 있던 많은 의미와 관계들이 드러나게 된다(Simon, 1989). 시각적인 표상은 특정 내용에 대하여 부가적인 추론을 하거나 과학적 기호나 용어 등과 같은 다른 형태의 표상을 이해하는데 도움을 제공한다. 예를 들어, Qin과 Simon(1990)은 도표와 같은 시각적 표상물들이 과학 개념의 이해에 중요하다고 주장한다.

과학자들과 발명가들이 창조적인 상상이나 발견의 행위를 할 때 시각화를 사용하려는 경향이 있다는 많은 증거가 있다(Rieber, 1994). 예를 들면, 독일의 화학자 Kekule는 벤젠의 분자 구조를 이해하기 위해서 내적 심상을 이용했다고 보고 했다. Faraday 역시 시각화 기술을 이용해 자기력선을 표상하고자 했다(Rieber, 1994). 20세기 초반부에 프랑스 수학자인 Julia는 프랙탈 기하학의 아름다움을 이해했다. 그러나 그는 그가 이해하고 있는 내용을 표현할 어떤 도구를 갖고 있지 못했다(Peitgen, et al., 1990). Mandelbrot(1977, 1990)는 1970년대에 이르러 가능하게 된 컴퓨터의 그래픽 재생력으로 프랙탈 기하학을 이해하고 대중화하는데 기여 했다.

Lorenz 역시 시각화를 통해 복잡한 카오스 현상을 발견 효과적으로 이해 할 수 있었는데, 그는 단지 3개의 변인만 가지는 날씨 모형을 개발하였는데, 그것은 인지적으로 쉽게 다룰 수 있는 형태를 가지기를 원했고 그의 단순화된 모형은 모형의 결과(효과)를 시각적으로 표현하는데 효과적이었다(Palmer, 1991; Lorenz, 1963, 1993). 다시 말하면, 세 변인의 최대수는 2차원의 공간(종이나 컴퓨터 스크린)에서 시각적으로 표현이 가능하다. 모형이 두 개의 변인을 가진다면, 그것은 2차원의 공간인 종이 위에서 표현이 가능하다. 물론, 2차원의 공간에 세 변인의 모형을 표현하는 일은 쉽지 않다. 그러나 그것은 종이 위나 컴퓨터 스크린에서 효과적으로 나타내어질 수 있다. 그러나 원래의 기상 모형에 있던 12개 변인을 사용했다면 그 모형은 12차원을 필요로 하기 때문에 그의 모형을 나타내는 것은 사실상 불가능하다.

그가 시각적 표현의 가능성을 고려해서 세 변인 기상 모형을 사용했는지에 대해서는 분명하지 않다. 그러나 Lorenz가 모의실험의 결과를 숫자로 표현하는 것과 함께 시각적인 것으로 표현하고 싶어했다는 것은 분명하다. 이러한 면에서 그의 단순화된 기상 모형

은 아주 좋은 이점이 있다. 즉, Lorenz의 단순화된 모형은 위상 공간 위의 한 점에 의해 표현되며, 시간에 따른 날씨의 변화는 종이 혹은 화면 위에서 선과 궤도로 표현될 수 있다(Lorenz, 1993). 예를 들어, Lorenz는 카오스 체계의 운동 방식을 이해하는 데 도움을 주기 위해 의도적으로 그래프를 그렸는데 그는 다음과 같이 기술하고 있다(Lorenz, 1993).

나는 컴퓨터를 이용해서 하나 혹은 두개의 상징적 기호를 활용하여 선을 그리도록 하는 출력 프로그램을 만들었다. 가장 자리로부터의 거리는 선택된 하나 혹은 두 개 변인의 값을 나타낸다. 그리고 그래프를 그리기 위해 종종 연속적인 기호를 사용해서 이어지는 곡선도 자주 그리곤 했다. 그래프가 그려지는 과정을 관찰하고 있으면 재미있다(p. 134).

1963년 보고서에서 Lorenz는 수학적 공식으로 표현되는 상징에 더하여 그래프와 같은 다양한 시각적인 표상물을 사용함으로써 카오스 현상의 이해에 많은 도움을 주었다.

카오스의 발견에서 컴퓨터 기술이 중요한 역할을 할 수 있도록 해준 것은 특히 컴퓨터의 계산능력에 더하여 시각적 표현력이다. 가장 재미있는 예 중의 하나가 프랙탈 기하학이다(Mandelbrot, 1977, 1990; Jungens, Peigen, & Saupe, 1990). 비선형계에 대한 연구는 기술의 진보와 함께 용이해졌다. 매우 복잡한 유형을 가진 비선형계는 자료가 시각적인 형태로 변환될 때에만 가끔씩 자신의 모습을 드러낸다. 인간의 형태 재인(pattern recognition) 능력과 복잡한 자료구조를 수백만 번 반복적으로 계산 가능하게 한 컴퓨터 공학의 도움으로 그동안 미지의 세계로 여겨오던 카오스 현상에 대한 보다 심도 있는 탐구를 가능하게 했다. 즉, 카오스의 수리적 특성에서 나타나는 미묘한 추상적 기하학적 행동양식은 컴퓨터기술의 도움으로 그래픽의 형태로 나타낼 수 있었고 카오스 개념의 이해를 돕는데 기여했다.

2. 사회적인 특성: 카오스 발견에서 기술발달의 역할

전형적인 카오스의 연구 문제는 특정 계산모형의 초기 값들을 조금씩 바꾸어 나가면서 해당되는 해들이 어떻게 달라지는 지 반복적으로 관찰하고 만일 두 가지 해가 완전히 달라지는 지점을 찾아냄으로써 그 모형이 카오스적인지를 알아본다(예를 들어, 초기 자료의 작은 변화가 기상예측에 완전히 다른 결과를 초래하는 경우). 즉, 카오스에 대한 이해의 많은 부분은 장기간에 걸쳐서 다양한 가상적 자연현상에 대한(계산)모형들을 컴퓨터를 이용하여 추적하며 얻어진

결과이다. 컴퓨터는 카오스를 연구하는데 주요한 인지적 도구로 사용되고 있는데 그 이유는 두 측면에서 볼 수 있다.

첫째, 카오스를 연구하기 위해서는 컴퓨터의 우수한 계산 능력이 필요하다. John von Neumann이 컴퓨터를 개발하였을 때, 그는 미래에는 완벽한 날씨 예측이 가능할 것이라고 낙관적으로 믿었다. 기상학 분야는 컴퓨터가 중요한 역할을 담당해왔는데 Lorenz(1993)는 그가 가진 컴퓨터가 물론 현재의 것과 비교하여 계산능력 면에서 원시적이었음에도 불구하고 컴퓨터가 없었다면 카오스의 개념을 발견할 수 없었을 것이라고 진술했다. 컴퓨터는 카오스 실험을 위해 필요한 중요한 도구인 이유 중 하나는 카오스와 관련된 계산은 반복적이면서도 복잡하기 때문이다. 예컨대, Mandelbrot 집합을 한 화면에 산출하기 위해서는 어림잡아 6백만번의 계산을 필요로 한다.

Lorenz(1993)는 카오스의 발견에 있어서 컴퓨터 기술이 갖는 중요성을 다음과 같이 기술했다.

얼마 되지 않았지만 어느 때부터인가 컴퓨터는 우리의 삶과 항상 함께 하고 있다. 컴퓨터가 카오스에 대한 인식을 제고하는데 기여했다는 사실은 학자 개개인이 풀려고 하는 문제에 있어서 지금까지는 손으로 다루기 어려웠던 공식의 계산을 해주는 차원을 넘어서서 더욱 더 폭넓어졌다고 하는 것이 정당할 것 같다. …… 컴퓨터 없이 혼자 계산하는 데 필요한 시간은 몇 달이 아니라 몇 년이다(p. 128-129).

둘째, Latour와 Woolgar(1986)는 실험실에는 특별한 목적을 위해 제작된 “각명(刻銘) 장치(inscriptional devices)”가 있다고 했다. Lorenz의 작업에서 컴퓨터가 한 일은 카오스에 대한 그의 이론을 물화하는 것이었다. Lorenz가 증명한 것은 컴퓨터가 Newton의 결정론적 과학을 구체화함으로써, 초기 값의 근소한 차이로 인해 결과에 예측 불가능한 근본적인 변화가 일어났음을 보여줄 수 있다는 것이었다. 즉, 컴퓨터 시뮬레이션은 추상적인 카오스라는 개념을 구체화시켜 보여주었다. 소수점 이하 세 자리를 포함하지 않은 그의 실수는 결과에서 근본적인 변화를 낳았는데 컴퓨터라는 인지적 보조 도구를 사용함으로써 이 극적인 효과를 외현화 할 수 있었다. 그리고 컴퓨터 모의 실험을 통해 몇 달 몇 년에 걸친 장기간의 기상의 변화를 예측할 수 있었고 궁극적으로 카오스 현상을 볼 수 있는 가능성을 높였다. 실제 카오스 현상은 단기간 보다는 장기간의 기상관찰에서 쉽게 나타났다. 만약 Lorenz가 수작업으로 계산하였다면 짧은 기간의 결과만 계산할 수 있었을 것이기 때문에 이러한 현상을 발견하기 어려웠을 것이다.

IV. 결론 및 논의

카오스 이론의 발견은 현대 과학에 중요한 영향을 끼쳤다. 많은 과학자들은 20세기의 과학이 세 가지 이론으로만 알려질 것이라고 믿는다. 그 세 가지 이론은 상대성 이론, 양자 역학, 그리고 카오스 이론이 그것이다. 카오스의 현상은 현실세계 어디에서나 나타난다. 해류의 흐름이나 혈관을 통한 혈액의 흐름에서 비롯하여 나뭇가지와 소용돌이 효과에 이르기까지 다양하다.

이 글에서는 카오스 발견과 이해에서 도구로서의 지식의 여러 측면들(예를 들어, 주의 혹은 이해)과 컴퓨터 기술의 여러 측면들(예를 들어, 계산능력 혹은 시각적 표상력)의 중요성에 대해 논의했다. 구체적으로 Lorenz는 실제 기상에 대한 주의 깊은 관찰과 기상 모형의 모의실험을 통하여 그의 문제에 대한 표상 방법을 점차 발달시켰고 그래서 카오스라는 현상을 발견할 수 있었다. 그의 발견은 어떤 측면에서는 놀라운 결과가 아닌 예상되었던 결과이다. 왜냐하면 발견을 위한 적절한 배경지식을 가지고 있었기 때문이다(예를 들어, 구조화된 역학과 수학적 배경 지식). 이에 더하여, 컴퓨터의 도구적 활용은 과학적 발견과 이해를 더 용이하게 하였다. 결론적으로, 배경적 지식 그리고 컴퓨터라는 인지적 도구는 새로운 개념의 발견과 이해에 매우 중요한 역할을 했다.

기술한 바대로 과학교육과 관련하여 이러한 카오스 발견이 가져다주는 시사점은 먼저 학생들에게 적절한 배경지식 혹은 구조화된 스키마를 제공해야 한다는 것이다. 과학적 현상을 이해하기 위해 기초적인 관련 배경지식을 알아야 하며 학생들이 협력을 통해서거나 교사와의 상호작용을 통해서 과학적 현상을 다양하게 보거나 해석할 수 있는 활동이 반드시 필요하다는 것이다. 이는 물론 문제의 여러 가지 측면을 보는 것도 해당되겠지만 문제를 다양한 감각양식을 통해서 표현해보는 것이 도움이 될 것이다. 예를 들어, 과학이나 수학적 개념은 다양한 형태로 표현될 수 있는데 언어적 혹은 시각적 표상의 중복적 활용은 기억의 견고성을 높일 수 있는 효과적인 수단이다. 학생들은 특히 자신들의 학습 활동에 대한 역사적 기록을 담고 있는 각명(刻銘)(예를 들어, 막대그래프와 같은 상징적 도구)을 활용하여 자신들의 행위에 대한 반성적인 사고를 촉진할 수 있다(김종백, 2003).

둘째, 과학적 현상에 대한 추상적 혹은 일반화된 사고과정이 개입되어야 한다는 것이다. 과학실험을 하는 것 자체로 아이들에게 과학에 대한 흥미를 유발하고

이것이 나름대로 의미 있겠지만 그것이 반드시 과학적 발견으로 유도되는 것이 아니기 때문에 현상의 기저에 있는 원리와 관계에 대해 논의하고 생각해보는 협상의 과정이 있어야 한다는 것이다. 학생들이 인지적으로 유연하고 견고한 원리적 혹은 관계적 지식을 갖도록 하기 위해서는 눈앞에 펼쳐지는 현상을 추상화하고 개념화하는 작업이 이루어져야 하는데 이러한 과정은 보통 자발적으로 일어나지 않으며 전문가로서의 타인으로부터 다양한 피드백을 통해 활성화된다.

셋째, 과학적 발견이나 이해를 수업상황에 적용하기 위해서는 학생들의 이해를 촉진하기 위한 과제의 목표와 구조화 전략이 필요하다(Klahr, Dunbar, & Fay, 1989). Klahr와 동료 연구자들(1989)은 자료 주도적 탐구인 “실험 공간” 과 목표 주도적 탐구인 “가설 공간”으로 문제의 탐색 방식을 나누고 목표 주도적 탐구가 과학적 문제를 이해하고 해결하는데 더욱 효과적인 전략임을 주장한다. 이는 극단적 구성주의에서 말하듯이 완전 개방형의 과제를 제시하기 보다는 분명한 과제의 목표와 어느 정도의 가설적 상황들을 학생들이 탐색할 수 있도록 구조화하는 것이 필요하다.

과학적 발견은 구체적인 영역 관련 지식과 더불어 다른 학문 영역들과의 학문적 사고의 교류와 협력 작업에 의해 이루어지는 전이(transfer) 혹은 유추(analogy) 활동에 의한 경우가 많아서 한 분야의 지식은 다른 분야의 이해와 지식의 발전에 매우 유용할 수 있다. 앞서 기술했듯이 Lorenz의 경우 물론 그의 연구가 견해를 달리 했기 때문에 상대적으로 과학자들의 공동체내에서 상호작용의 폭이 적었던 것이 사실이지만 그도 다른 기상학자들의 도움과 의사소통과정이 있었으며 대부분의 과학적 발견들은 공동체내에서의 협력적인 과정에 의해 촉발되고 발전되기 때문에(Latour & Woolga, 1986; Salomon, 1993), 과학교육에서 학생들의 협력적 탐구학습은 실제 과학자들의 과학 활동을 모사함으로써 개인적 지식의 공유과정을 공식화하고 궁극적으로 과학적 현상의 이해에 도움을 줄 수 있다.

참고 문헌

김종백 (2003). 디자인 중심학습에서 각명의 역할. 한국교육학연구, 9, 261-277.

Cheng, P. C.-H. & Simon, H. A. (1995). Scientific Discovery and Creative Reasoning with Diagrams. In S. Smith, T. Ward, & R. Finke (Eds.), *The Creative Cognition Approach* (pp. 205-228). Cambridge, MA: MIT Press.

Crutchfield, J. P., Farmer, J. D., Packard, N. H., & Shaw, R. S. (1986, December). *Chaos*. Scientific American, 255, 46-57.

Devaney, R. (1989). *Chaos, fractals, and dynamics: Computer experiments in mathematics* [film]. (Available from The Science Television Company., Box 2498 Time Square Station, New York, NY 10108).

Dunbar, K. (1993). Concept discovery in a scientific domain. *Cognitive Science*, 17, 397-434.

Dunbar, K. (1995). How scientists really reason: Scientific reasoning in real-world laboratories. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *The nature of insight* (pp. 365-395). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Gibson, E. J. (1969). *Principles of perceptual learning and development*. New York: Appleton Century-Crofts.

Gleick, J. (1987). *Chaos: Making a new science*. New York: Penguin Books.

Gooding, D. (1992). Putting agency back into experiment. In A. Pickering (Ed.), *Science as practice and culture* (pp. 215-300). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Henderson, K. (1991). Flexible sketches and inflexible data bases: Visual communication, conscription devices, and boundary objects in design engineering. *Science, Technology, & Human Values*, 16, 448-473.

Jurgens, H., Peigen, H., & Saupe, D. (1990). The language of fractals. *Scientific American*, 263, 60-67.

Klahr, D., Dunbar, K., & Fay, A. L. (1989). Designing good experiments to test bad hypotheses. In Shrager, J. & Langley, P. (Eds.), *Computational models of discovery and theory formation* (pp. 355-402), San Francisco, CA: Morgan Kaufman.

Latour, B. (1990). Drawing things together. In M. Lynch & S. Woolgar (Eds.), *Representation in scientific practice* (pp. 19-68). Cambridge, MA: MIT Press.

Latour, B. & Woolgar, S. (1986). *Laboratory life: The construction of scientific facts*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lehrer, R., & Schauble, L. (2000). Modeling in mathematics and science. In Robert Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology. Educational design and cognitive science* (pp. 101-159). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 10, 130-141.

Lorenz, E. N. (1980). Noisy periodicity and reverse bifurcation In R. Helleman (Ed.), *Annals of the New*

York Academy of Sciences, 357, 282-291.

Lorenz, E. N. (1993). *The essence of chaos*. Seattle, WA: University of Washington Press.

Mandelbrot, B. (1977). *Fractal geometry*. New York: Freeman.

Mandelbrot, B. (1990, September). *Fractals - A geometry of nature*. *New Scientist*, 38-43.

Marr, D. (1982). *Vision: A computational investigation into the human representation and processing of visual information*. San Francisco, CA: W. H. Freeman.

Minsky, M. (1981). *A Framework for Representing Knowledge*. In J. Haugeland (Ed.), *Mind Design -Philosophy, Psychology, Artificial Intelligence*. Cambridge, MA: The MIT Press.

May, R. (1989, November). *The chaotic rhythms of life*. *New Scientist*, 37-41.

Monod, J. (1971). *Chance and necessity: An essay on the natural philosophy of modern biology*. New York: Knopf.

Nersessian, N. J. (1992). *How do scientists think? Capturing the dynamics of conceptual change in science*. In R. N. Giere (Ed.), *Minnesota studies in the philosophy of science: Vol. XV. Cognitive models of science* (pp. 3-45). Minneapolis, MN: University of Minnesota Press.

Palmer, T. (1991). *A weather eye on unpredictability*. In N., Hall (Ed), *Exploring chaos: A guide to the new science of disorder*. New York: W.W. Norton & Company.

Peitgen, H.-O., Jurgens, H., Saupe, D., & Zahlten, C. (1990). *Fractals: An animated discussion*. [film]. (Available from New York: W. H. Freeman and Company).

Peterson, I. (1993). *Newton's clock: Chaos in the solar system*. New York: W. H. Freeman and Company.

Poincare, H. (1952). *Science and hypothesis*. New York: Dover Publications, Inc.

Qin, Y., & Simon, H. A. (1990). *Laboratory replication of scientific discovery processes*. *Cognitive Science*, 14, 281-312.

Rieber, L. P. (1994). *Visualization as an aid to problem-solving: Examples from history*. In *Proceeding of selected research and development presentations*. Nashville, TN: National Convention of the Association for Educational Communications and Technology.

Ruelle, D. (1991). *Chance and chaos*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Salomon, G. (1993). *No distribution without individuals' cognition: a dynamic interactional view*. In Salomon (Ed.), *Distributed cognition: Psychological and educational consideration* (pp. 111-138). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Schank, R. C. (1988). *Creativity as a mechanical process*. In R. J. Sternberg (Ed.), *The nature of creativity: Contemporary psychological perspectives*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Schank, R.C. (1989). *Inside Case-based Reasoning*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schepard, R. (1988). *The imagination of the scientist*. In K. Egan & D. Naderer (Eds.), *Imagination and education*. New York: Teachers College Press.

Simon, H. A. (1989). *The scientist as problem solver*. In D. Klahr & K. Kotovsky (Ed.), *Complex information processing: The impact of Herbert A. Simon*(pp. 375-398). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Simon, H. A. (1996). *The sciences of the artificial* (3rd Ed.). Cambridge, MA: MIT Press.

Stewart, I. (1989). *Does god play dice?: The mathematics of chaos*. Cambridge, MA: Basil Blackwell.