韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 19집 제 1호, 2005. 1. 1-14

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 19, No. 1, Jan. 2005. 1-14

발생론적 인식론을 적용한 수학 수업
- 두 자리 수의 곱셈을 중심으로

김 진 호 (서울교육대학교 강사)

Piaget는 인류가 지식을 구성해 온 방식과 유사한 방식으로 어린이들도 자신들이 학습해야 할 지식을 학습할 수 있다고 가정한다. Kamii는 이 가정을 확인하고자 하는 열망으로 실험교수법을 이용한 수학 수업을 실시하였다. 본 고에서는 Kamii가 얻은 결과 중 곱셈에 대한 결과를 발생론적 인식론 입장에서 논의가 이루어 질 것이다. 이 논의는 어린이들이 구성해 가는 지식이 선대인들이 사용하던 지식과 유사하다는 점과 어린이들이 구성해 가는 지식이 완성된 지식의 형태를 갖출 수 있다는 점을 중심으로 이루어진다. 또한, 그 결과로부터 전통적인 수학 교수법에 변화가 있어야 함을 발생론적 인식론을 적용한 수학 수업의 특징과 비교하면서 시사점을 논의하고자 한다.

I. 문제의 제기

발생론적 인식론이란 지식, 특히 과학적 지식을 지식의 역사, 지식의 사회발생론, 지식이 담고 있는 관념과 정신작용에 대한 심리적 근원을 토대로 설명하려는 노력이다(Piaget, 1970, p. 1). 이런 노력은 전통적인 인식론에 입각한 철학적 관점에서 지식을 설명하려는 노력과는 다르다. 철학자 또는 인식론자에게 있어서 인식론이란 현시점에서 지식을 있는 그대로 연구하는 학문이며, 이들은 지식 그 자체의 진위를 탐구하지 이것을 지식의 발달(진화)이란 관점과는 연결 짓지 못하였다. 오히려 이런 것들에 대한 탐구는 역사학자와 심리학자의 몫이라고 여겼다. Piaget(1970)는 과학적 지식이란 순간적이지 않고 과정적이며, 따라서 오늘 참이었던 지식이 내일 참이 아니며 새로운 아이디어가 참이 됨을 설명한다(pp. 2-7). 즉, (과학적) 지식이란 절대불변의 대상이 아니라 점진적으로 진화해 가는 대상이다. 따라서 Piaget는 인식론을 연구하는데 있어서 지식의 발생, 즉 최초의 원형의 상태를 찾으려는 노력을 기울이게 된다. 하지만, 지식의 원형에 대한 기록은 남아있지 않다. Piaget가 어린이의 사고과정에 관심을 갖게 된 배경이 바로 여기에 있다. 그는 어린이들이 새로운 지식을 습득해 가는 과정이 우리 선조들이 새로운 지식을 습득해 가는 과정과 유사한 점이 많을 것이라는 가정을 하게 된다(Kamii, 1994, 2001). 다시 말해서, 발생론적 인식론에서는 어린이들이 새로운 지식을 학습하는 과정에 우리의 선조들이 새로운 지식을 생성해 내기 위해서 경험하였던 지적 정신작용을 어린이들도 경험할 것이라고 가정한다. 이것이 사실이라면, 학생중심의 수업을 옹호하는 교사는 잠재구성영역(potential construction zone)의 한 부분으로 이것을 포함시켜야 할 것이다. 그런데, Piaget가 발생론적 인식론에서 주장한 것이 실제로 어린이들이 그런 과정을 거치면서 새로운 지식을 생성하겠는가

하는 의문을 가지게 된다. 더군다나, Piaget는 인간은 두 종류의 추상화를 할 수 있는데 그 중에서도 특히 반성적 추상화는 행동으로부터 추론된다고 하며(Piaget, 1970), 이런 반성적 추론은 내부로부터 발생하는 것이라고 설명하고 있다. 이런 논리를 바탕으로 Piaget는 전통적인 수업에서처럼 교사의 적극적인 지도에 의한 것이 아닌 학생 스스로 지식을 생성하는 것이 가능하다고 가정하는데 정말로 그런가하는 점이다. 요약하자면, 교사의 도움이 없는 상황에서 어린이들이 수학적 지식을 학습할 수 있겠는가 하는 점이고, 할 수 있다하더라도 어린이들이 스스로 학습하는 과정에서 나타나는 과정이 우리 선조들이 수학 지식을 탐구하면서 겪었던 지적 사고 과정과 얼마나 닮았겠는가 하는 점이다.

본고에서는 "두 자리 수 곱하기 두 자리 수"를 예로 들어서 이 두 부류의 지적 사고과정에 유사점이 있는가 하는 점과 결과적으로 어린이들이 "두 자리 수 곱하기 두 자리 수"의 알고리듬을 창안하는지를 살펴보기로 한다. 만약, 어린이들에게서 나타나는 반응들이 위에서 언급한 가정들에 대하여 긍정적인 증거를 제시한다면, 어린이들에게 이해를 동반하지 못한 채 알고리듬을 지도하는 전통적인 수학 교수법에 대한 반성과 개혁을 위한 노력을 시작해야 할 것이다.

II. 선대인들이 "두 자리 수 곱하기 두 자리 수"를 계산하던 방법

유사 이래로 있어 왔던 크고 작은 전쟁과 정치적 이유로, 그리고 자연재해로 인해서 우리의 귀중한 문화유산들이 소실되었다. 이 소실된 문화유산 중에는 수학적 지식에 대한 문헌들도 상당수 있는 것으로 보고되고 있다(Eves, 1998). 또한, 역사이전에도 수학적 사고는 있었음에 틀림없을 것이지만, 이 시기에 있어서의 기록을 살펴 볼 수 있는 방법은 없다. 결과적으로 수학과 관련된 선조들의 세세한 지적 정신작용을 있는 그대로 살펴보기란 쉬운 일이 아니다. 하지만, 문화·문명을 사랑하고 보존하는 민족과 시대가 있어서 온전하지는 못하더라도 참고할 자료가 있다(Nelson, Joseph, & Williams, 1993). 특히, Kamii(1994)의 헌신적인 노력으로 선대인들이 곱셈을 하던 계산법에 대해서 조금 더 알게 되었다. 이런 계산법들은 수학교육적으로 매우 중요한 자료이다. 왜냐하면, 사칙연산을 위한 알고리듬이 체계화된 것은 아주 최근의 일이며 또한 일반인들에게 익숙해진 것은 보다 최근의 일이기 때문이다. 다시 말해서, 현재 학교에서 지도되고 있는 계산법은 수 천 년 간 선대인들의 정신적 노력의 결과이지 어느 한 뛰어난 인물에 의해서 형성된 것이 아니라는 점이다. 이 말은 곱셈 알고리듬은 자연스런 변화의 과정을 지닌 지식임을 의미한다. 이런 지식을 그 과정을 경험하는 것 없이 결과만을 지도하는 것은 바람직하지 않을 것이다.

고대 이집트에서는 상형문자를 이용해서 수를 표현하였다. 이들 상형문자 중 1,000을 나타내는 것은 사람이 놀라는 모습이다. 즉, 1,000이란 수는 고대에는 굉장히 큰 수이다. 우리 말에서도 100을 표현하기 위한 고어는 "온"이다. 이는 전부라는 뜻으로 굉장히 큰 수를 나타낸다. 이 정도의 수가 큰 수였을 고대에 곱셈에 대한 개념이 있었고, 이를 계산하기 위한 나름대로의 체계를 개발할 필요가 있었을까? 있었다면, 어떤 방법으로 고대인들은 계산을 하였을까? 다행스럽게도, 십진기수법이 완성

되기 이전에 고대인들이 사용한 계산 방법(소멸되어 전해지는 것이 많지는 않지만)에 대한 흔적을 문헌을 통해서 살펴 볼 수 있다. 고대 이집트인들이 사용한 곱셈 계산 방법은 덧셈과 2단 구구표만 할 수 있으면 계산이 가능하다. 32×13의 곱셈을 하기 위해서, 먼저, 두 수 중에서 곱하는 수와 곱해지는 수를 정한다. 32를 곱해지는 수로 정했다고 하면, 다음과 같은 계산과정을 거쳐서 곱을 구한다.

※	|	∩∩∩ ||
	||	∩∩∩ || ∩∩∩ ||
※	||||	∩∩|||| ||||
※	|||| ||||	∩∩∩|||| ∩∩ ||

<그림 1> 고대 이집트인이 32×13을 계산하는 방법

즉, 곱해지는 수(32×1)에 2배를 하고, 64를 얻는다. 여기에 2배를 하고 128을 얻는다. 128에 2배를 하고 256을 구한다. 그리고 나서, 28, 128, 256을 더한다(위 그림의 가장 왼쪽에 ※한 곳에 있는 수들). 이것을 현대의 대수식으로 표현하면, 32×13=32×(1+4+8)이다. 이런 곱셈을 일반적인 방법으로 사용하려면, '모든 수는 2의 급수의 합들로 표현될 수 있다.(예를 들어, $33=2^0+2^5$)'는 정리를 고대인들이 알고 있었어야 가능하다. 고대이집트인들이 이 정리를 알고 있었는지는 알려지지 않았지만, 이 '2배하기' 방법은 대중적으로 잘 알려진 방법이고, 이 방법을 변형한 방법들이 유럽의 곳곳에서 발견된다. 그 중의 하나가 '2배하고 반으로 줄이기'방법이다. 이 방법은 러시아, 에티오피아, 아랍국가에서 사용된 흔적을 찾아 볼 수 있다. 이 방법으로 115×12를 계산하면, <그림 2>와 같은 방법으로 한다.

125	12
250	6
500	3
1,000	1

답: 1,000+500=1,500

<그림 2> 2배하고 반으로 줄이기

이 방법은 곱해지는 수는 2배를 하고 곱하는 수는 반으로 줄이는 것이다. 계산 과정에서 곱하는 수에 홀수가 생기면, 이 홀수에서 1을 뺀 수로 같은 과정을 거쳐 간다. 답은 곱하는 수가 1인 줄에 있는 곱해지는 수에 곱하는 수 중에서 홀수가 있는 줄의 곱해지는 수를 모두 더한다(위의 예에서 1,000+500). 이 방법은 $125\times12=125\times(2^2+2^3)$이 성립하기 때문에 작용한다.

위에서 언급한 곱셈 계산법들 보다 조금 더 발달된 원리를 요구하는 방법이 '격자'방법[격자방법을 활용한 곱셈의 예는 Geary(1994), Kamii(1994), Nelson, Joseph, & Williams(1993) 참고]이다. 앞의 방법들과는 달리, '격자'방법은 곱셈구구와 덧셈을 할 수 있어야 한다. 또한, 덧셈을 하는 과정에서 '올림'과 '자리 값' 개념을 필요로 한다. 이 방법은 10세기 전후에 인디아에서 처음으로 나타났다. 이 방법은 아랍 국가를 거쳐서 아랍학습의 요충지인 이탈리아의 시실리로 전파되었고, 여기서 유럽으로 퍼지게 되어, 14세기에서 15세기 사이에는 보편적인 곱셈 방법이 되었다. 지금까지 언급한 방법에서 현재의 곱셈 알고리듬의 원형을 찾아보기 어렵다. 하지만, 인도-아라비아 십진 수체계가 확립되면서, 현재 사용되고 있는 곱셈 알고리듬의 초기 모형들이 나타난다. 이 모형들은 시대를 거듭하면서 오늘날 알려진 형태로 진화한다. 15세기 무렵에 문화의 중심지였던 이탈리아를 중심으로 사용하던 곱셈 알고리듬은 Pacioli(1494)가 작성한 Suma라는 책에서 발견할 수 있다(Smith, 1925). 이 책에서 소개되는 8가지 방법 중 3가지 방법이 아래에 설명되어 있다. 한 가지 방법은 곱해지는 수를 분해해서 부분곱의 합을 구하는 것이다. 예를 들어, 이 방법으로 26×67를 계산하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
26\times 67 &= (3+4+5+6+8)\times 67 \\
&= 201+268+335+402+535 \\
&= 1{,}742
\end{aligned}
$$

<그림 3> Pacioli가 소개하고 있는 곱셈 계산 방법 (I)

선대인들이 이 방법을 사용했다는 것은 이 방법이 전형적인 곱셈 알고리듬으로 넘어가는 중간 과정 중의 초기 형태를 가장 잘 보여 주는 예이다. 즉, 곱해지는 수를 그 자체로 인수로 생각하지 않고 이 수를 부분으로 분할하였다는 점과 이 분할이 십진기수법에 의한 분할(즉, 20과 6)이 아니라 곱셈을 하기 용이한 작은 수의 합으로 분할하였다는 점이다. Pacioli(1494)가 소개하고 있는 전형적인 곱셈 알고리듬에 가깝게 진화한 방법은 곱해지는 수나 곱하는 수를 십진 기수법에 따라서 분할하여 곱하는 것(아래의 예에서, 12를 10과 2 또는 135를 100, 30, 5로)이다. 하지만, 전형적인 알고리듬과는 달리 큰 자리 수부터 곱셈을 한다. 이 방법으로, 예를 들어, 135×12의 계산을 하면 다음과 같다.

```
 135
 12
-----
 12
  36
   60
-----
1620
```

(a)

```
 135
12
-----
 135
 270
-----
1620
```

(b)

<그림 4> Pacioli가 소개하고 있는 곱셈 계산 방법(II)

이 방법은 분명히 전형적인 곱셈 과정의 원리를 따르는 듯 하다. 전형적인 곱셈 알고리듬과 다른 점이 있다면, 전형적인 곱셈 알고리듬에서는 작은 자리 수부터 곱셈을 하는데 반하여, 위의 방법은 큰 자리 수부터 곱셈을 한다는 점이다. 곱셈의 계산에서 큰 수부터 곱셈을 하는 것은 당시에는 전세계적으로 사용되던 방식인 듯하다. 예를 들어, 인도에서 사용하던 '비껴지우기 방법'도 순서는 큰 수부터 계산을 한다[Groza, 1968; Kamii(1994) 재인용 및 참고]. 또한, 독일에서 사용하던 방식도 다르지 않다(Menninger, 1969). 독일에서 사용한 방법은 곱하는 수를 필요할 때 마다 다시 적는다는 점에서 독특하다. 예를 들어, 765×321을 독일에서 사용하던 방식으로 계산을 해 보자.

	2	4	5	5	6	5	
3			1	5			
′				1	0	5	
2		1	8				
′			1	2	6		
1	2	1					
′		1	4	7			
				7	6	5	(b
1		3	2	1			(a
2			3	2	1		
3				3	2	1	

<그림 5> 독일에서 사용한 곱셈 계산 과정(Menninger, 1969)

위의 곱셈 계산 방법은 다음과 같은 순서로 이루어진다. 먼저, 처음 수를 a, b로 표시한다. 이때 곱하는 수의 가장 작은 단위(321의 1)를 곱해지는 수의 가장 큰 단위 수(여기서는 백의 자리 수인 7) 아래에 적는다. 7을 연속해서 321에 곱한다(7×1=7, 7×2=14, 7×3=21). 여기서 얻어진 부분곱들을 1′줄에 7의 왼쪽으로 맞추어 적는다. 그리고나서, 곱하는 수 321를 오른쪽으로 한 칸 옮기고, 6과 321의 부분곱을 구하고 다시 2′줄에 6의 왼쪽에 맞추어 적는다. 321을 다시 오른쪽으로 한 칸 옮기고, 5와 321의 부분곱을 구하고 구한 곱을 3′줄에 5의 왼쪽에 맞추어 적는다. 곱을 구하기 위해서, 곱해지는 수 위에 적혀 있는 모든 수를 각 열별로 합해서 3′줄 위에 적으면, 적은 것이 구하고자하는 곱이 된다. 15세기 무렵에 오늘날의 알고리듬과 유사한 알고리듬이 일반적으로 사용됐었지만, 위에서 보여 준 것 처럼 계산의 순서나 숫자들의 상대적인 위치는 오랫동안 해결되지 않은 채로 남아 있었다. 예를 들어, 곱하는 수 45는 곱해지는 수 34 위에 나타난다. 이런 배열(<그림 6> 참고)은 1424년경 파리에서 발견된 한 원고에서 발견된다(Smith, 1925).

			4
			5
		3	4
		2	0
	1	6	
	1	5	
1	2		
1	5	3	0

<그림 6> 곱하는 수와 곱해지는 수의 상대적인 위치가 오늘날과 다른 배열

지금까지 살펴 본 곱셈 알고리듬에서 알 수 있듯이, 전형적인 알고리듬이 완성되기 이전에 다양한 형태의 곱셈 알고리듬이 발달했었고 널리 활용되고 있었다는 점은 널리 받아들여지고 있다. Piaget는 발생론적 인식론에서 지식이란 이런 성장 과정을 거치는 것이며 사회발생적으로 고유한 아이디어는 같지만 다른 형태로 발전한다고 설명한다. Piaget는 어린이들에게 자유롭게 생각할 수 있도록 허용한다면 어린이들은 선대인들이 예전에 했었던 것과 마찬가지로 점차적으로 효과적인 방법들을 창안 할 수 있을 것으로 기대한다. 이렇게 스스로 지식을 창안하였을 때 지식이 지니는 내재적 의미를 어린이들은 이해할 수 있고, 자신의 고유한 지식으로 구성할 수 있다. 전형적인 알고리듬을 지도하는 것을 최선의 교육 목표로 삼고 있는 공공교육에서는 이런 중간 과정들을 생략함으로써, 어린이들은 구성과정을 정신적으로 경험할 수 있는 기회를 박탈당하게 되고, 결과적으로 자신들이 학습한 지식을 이해할 수 있는 기회를 상실하게 된다.

III. 어린이들이 "두 자리 수 곱하기 두 자리 수"를 계산하는 방법

구성주의 원리를 교육에 적용하고자 하는 연구자들은 교사가 학생이 스스로 지식을 구성할 수 있는 교육환경을 조성할 것과 학습자가 현재 알고 있는 지식으로부터 교수·학습이 시작되어야 함을 강조한다. 구성주의자들은 어린이들도 지식을 생성(구성)할 수 있는 능력이 있다고 믿고 있다. 앞서 진술하였듯이, Piaget가 주장하는 발생론적 인식론이란 입장에 서 있는 구성주의자들은 어린이들이 지식을 스스로 구성해 가는 과정에서 선대인들이 겪은 인지적 과정들을 겪을 것이란 가정을 하고 있을 뿐만 아니라, 스스로 완성된 지식을 구성할 수 있을 것이라고 가정한다. 본 절에서는 이런 가정을 지지해 줄 수 있는 증거를 Kamii(1994)와 김수환 등(2004)에서 찾아 논의한다. 이 두 연구에서는 학생 스스로 지식을 구성할 수 있다는 신념하에 수행되기 때문에 교사가 지식을 전수하는 활동은 일어나지 않는다. 이런 환경에서 학생들이 접하게 되는 문제 상황은 대개 자연발생적 실상황을 학습소재로 다루고 있다. 자연발생적으로 생기는 문제 상황을 해결하는 과정에서 학습자들은 지식을 구성하게 된다.

Kamii는 많은 3학년 학생들은 12×23의 해를 구하기 위해서 12를 10과 2로 분할하는 대신에 예를 들어 3개의 4로 분할하고, 23+23+23+23의 합을 구하고, 그 합을 3번 더한다. 이것은 정확하게 부분곱을 구해서 곱셈을 하는 방법에 대한 원형이라고 할 수 있다. 아래에서 논의되는 예들은 구성주의 교실에서 수업을 받은 3학년 학생들이 '두 자리 수 곱하기 두 자리 수' 문제 상황에서 보인 반응들에 대한 분석이다(Kamii, 1994). 첫 번째 문제 상황은 수학여행을 하고 난 후 한 학생이 제시한 문장제 문제에 대한 여러 학생의 반응과 이에 대한 분석이다.

3학년 학생 중 51명의 어린이들이 각각 땅콩 한 봉지씩을 샀습니다. 각 봉지에는 34개의 땅콩이 들어 있습니다. 3학년 어린이들이 먹을 수 있는 땅콩의 개수는 모두 몇 개 있습니까?

3학년 어린이들은 이 문제를 51×34로 적었지만, 이 문제를 해결하기 위해서 사용한 방법은 곱셈이 아니라 덧셈을 포함한 다양한 방법이며, 앞 절에서 살펴보았던 방법들과 매우 유사한 방법임을 알 수 있다.

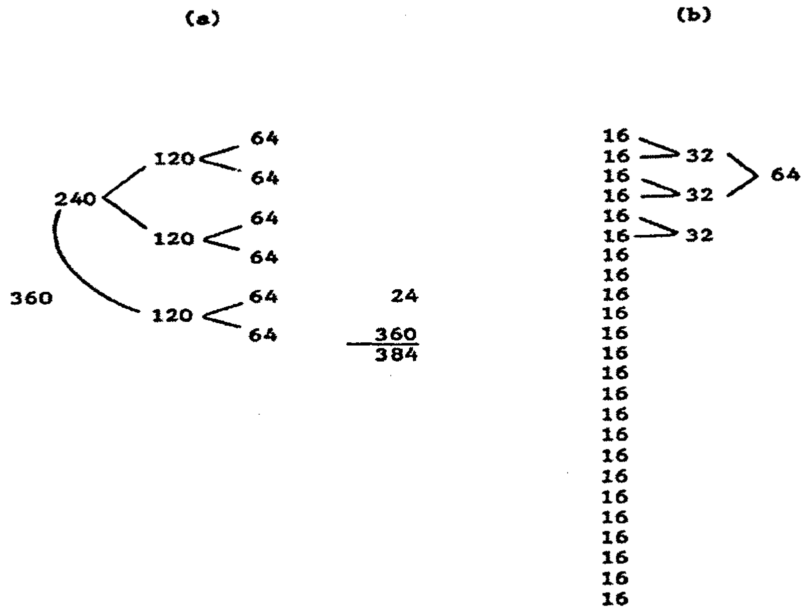
```
(a)  51                          (b) 102
     51                              102
     51     510     51               102
     51     510     51               102
     51     510     51               102
     51    1539     51               102
     51     204    204               102
     51    1743                      102
     51                              102
     51                              102
    510                              102
                                     102
                                     102
                                     102
                                     102
                                     102
                                     102
                                    1734

(c) 51 x 10 = 510   (d) 50 x 30 = 1500   (e) 10     (f)  51
    51 x 10 = 510       50 x 4  =  200       x51          34
    51 x 10 = 510       1 x 34  =   34        10         204
    51 x 4  = 204                 1734       500          30
             1734                            510        1500
                                             x 3        1734
                                            1530
                                           + 204
                                            1734
```

<그림 7> 51×34의 풀이 과정

방법(a)는 부분곱을 이용하기 앞서 부분합을 이용하였다. 51×10의 부분곱을 덧셈을 이용하여 구하고, 그 결과를 3번 적고 51를 4번 더한 값을 적어서 최종 합을 구하고 있다. 이런 방법은 전형적인 덧셈을 활용한 곱셈이라고 할 수 있다. 따라서, 어린이들은 곱셈을 곱셈으로 해결하는 것이 아니라,

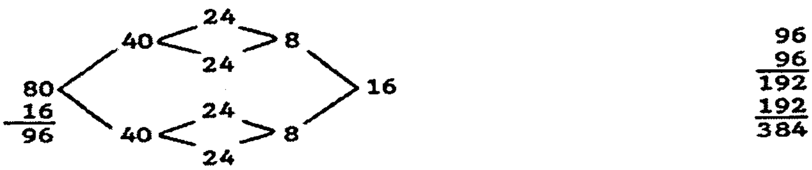
덧셈-곱셈 방법을 사용한다. 즉, 덧셈과 곱셈을 혼용하여 곱셈 문제를 해결한다. 방법(b)는 '2배하고 반으로 하기' 방법으로 발전할 수 있는 모형이다. 즉, 51×34=102×17이다. 이 어린이는 계속해서 이런 방법으로 계산을 하도록 하였다면, 204를 8번 적고 17을 한 번 적어 계산하였을 것이다. 방법(c)는 방법(a)의 진화이다. 곱하는 수 34를 10+10+10+4로 분할하여 부분곱을 구하고 구한 곱들을 합해서 해를 구하고 있다. 방법(e)는 곱하는 수 34의 30를 방법(c)와 달리 3×10의 형태로 하였음을 알 수 있다. 이에 비하여, 방법(d)와 방법(f)는 방법(c)보다 더 진화한 것으로 볼 수 있다. 방법(d)에서는 곱해지는 수 51을 50과 1로 분할하고 곱하는 수 34를 30과 4로 분할하였다. 단지 전형적인 알고리듬과 다른 점이 있다면, 1×34를 하였다는 점이다.

24×16을 다양한 방법으로 해결하도록 학생들에게 요청하였을 때, 학생들이 보인 다양한 반응들 또한 전형적인 알고리듬 이전의 계산 유형과 유사함을 보여 준다. <그림 8>은 24×16에 대해 한 학생이 보인 풀이 과정이다. 첫 번째 풀이 과정은 '2배하기' 과정의 전과정으로 해석할 수 있다. 준채가 한 이 계산에서 64를 구하는 과정까지는 정확하게 '2배하기' 방법이지만, 그 이후로 수의 크기가 커짐에 따라서 십단위와 단단위를 개별적으로 '2배하기' 하였음을 보여주고 있다.



<그림 8> 준채의 24×16 = 12×32 = 6×64에 대한 설명

<그림 9>는 또 다른 학생의 반응이다. 이 학생의 방법은 4×24×2×2에 가깝다. 이 학생은 24를 4번 더한 값(96)을 구하고, 96을 2배하고, 그리고 나서 192를 2배하였다. 이 방법은 이집트인의 '2배하기' 방법과 유사하다.



<그림 9> 24×16=(24의 4배)×2×2에 대한 설명

어린이들이 스스로 곱셈지식을 구성해 가는 과정에서 보이는 반응들은 분명히 전형적인 알고리듬이 완성되어 사용되기 이전에 유행하던 방법들과 매우 유사하다는 점을 위의 반응들은 보여주고 있다. 그렇다면, 어린이들은 전형적인 알고리듬도 발견할 수 있겠는가하는 점이다. 이런 의문에 대한 긍정적인 답을 59×69를 해결해 가는 어린이들의 인지적 진화 과정이 담긴 예화에서 찾아 볼 수 있다 (Kamii, 1994). 한 학생이 "59개의 케이크가 있습니다. 각 케이크 위에 69개의 초가 올려져 있습니다. 모두 몇 개의 초가 있습니까?"라는 문제를 제시하였다. 학생들은 개별적으로 문제에 대한 답을 구하고 나서 각자 구한 답(3,081, 4,079, 2,955, 4,161)을 발표하였다. 다음은 교사와 학생들간의 대화이다.

교사: 영수(첫 번째 답을 말한 학생), 답을 구한 방법을 설명해 볼래?

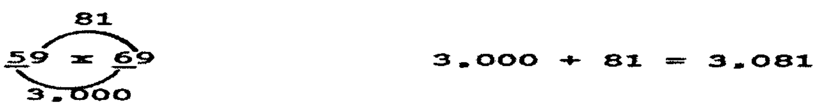
영수: ["59×69"라고 적으면서 5와 6에 밑줄을 긋는다.(<그림 10> 참고)] 50의 10배는 500이고, 500의 6배는 3000입니다.

학생A: 어떻게 그것을 구했니?

영수: (칠판에 부분 답을 하면서 아래의 수를 썼다.)

500	10 배
500	20
500	30
500	40
500	50
500	60
3,000	

영수: "9"을 9번 적고, 다 더했어. "81"이지. (자신이 썼던 "59×69"로 되돌아가서, 영수는 <그림 8> 처럼 5와 6을 선으로 연결하고, 9와 9를 선으로 연결하였다. 그런 후, 각 곱을 나타내는 "3000"과 "81"을 썼다. 영수는 최종 답으로 "3000+81=3081"라고 적었다.)



<그림 10> 영수의 59×69에 대한 반응

영철: 9곱하기 50도 해야 하지 않니?

영일: 그래, 맞아.

경희: 영수는 50×60과 9×9만을 했어요.

교사: (개입하여야 할 시기임을 직감하고, 칠판에 "2×12"를 쓰면서), 영수야, 이 문제는 어떻게 풀겠니?

영수: 2곱하기 10과 2곱하기 2를 할 것입니다.

교사: [<그림 11(a)>처럼 선을 그은 후, 곱해지는 수 2 앞에 "1"을 적었다(<그림 11(b)>)]. 이 문제(12×12)를 풀어보아라.

(a) 2 x 12

(b) 12 x 12

<그림 11> 영수의 2×12=(2×10)+(2×2)라고 한 반응에 대한 교사의 문제 변형

영수: (침묵)

경희: 영수는 10×10=100과 2×2=4만 하고, 104를 답이라고 했을 거예요.

영철: 계산이 끝나지 않았어.

은희: 나는 암산으로 12를 12배 해 봤어. 답이 104보다 커. 영수야, 50곱하기 9와 9곱하기 60를 해야 해. 내가 앞에 나가서 그것을 보여줘도 돼?

영수: (동의를 표한다.)

은희: (은희는 아래와 같이 칠판에 적었다. 그런 후) 50곱하기 9를 9곱하기 50으로 바꾸는 것이 더 쉽다. 그렇게 바꾸면, 9곱하기 50을 3곱하기 50을 3번 하는 것으로 바꿀 수 있어.

9×50	50		50		50
	50		50		50
	50		50		50
	150	+	150	+	150 = 450

은희: 9곱하기 60을 하는 더 쉬운 방법을 알고 있어. 15더하기 15는 30이고, 30더하기 30은 60이야. 9곱하기 15를 하고, 그리고 그 답에 4를 곱하면 돼.

9× 60 9×15 = 90 + 45 =135

135 ×4 = 400 + 120 + 20 =540

은희: 영수가 구한 답 3081에 450과 540을 더해야만 해.

3,081
450
540
4,071

어린이들이 보인 반응은 '두 자리 수 곱하기 두 자리 수'의 전형적인 알고리듬에서 나타나야 하는 4번의 계산 과정을 보여주고 있다. 어린이들은 4번의 계산을 다 하지 않았을 때 계산의 결과가 잘못됨을 인식하고 생략된 과정을 찾아 가는 능력을 보여 주고 있다. 이 수업이 있은 다음날 교사는 다음과 같은 곱셈 상황을 제시하였다.

우리 반 어린이들은 몇 명이지요? (학생들: 24명이요.) 선생님이 크리스마스 선물로 여러분에게 과자 16개씩 주려고 해요. 선생님은 과자를 모두 몇 개 사야하지요?

모든 어린이들이 답이 384라고 동의하였고, 교사는 이것을 칠판의 왼쪽 위에다 썼다.

교사: 철수, 어떻게 풀었니?
철수: (철수는 다음과 같이 칠판에 썼다.)

$20\times10=200$
$20\times6\ =120$
320
$4\times10=40$
$4\times6\ =24$
64
320
384

교사: (철수가 한 계산을 어제의 혼란과 관계를 짓기 위해서, <그림 10>을 적으면서), 철수가 첫 번째 한 것은 20×10과, 20×6[<그림 12(a)>]이고 4×10과 4×6을[<그림 12(b)>] 했어요. 그러나, 어제 어떤 어린이들은 단지 이 부분(20×10을 지적하며)과 이 부분(4×6을 지적하며)만을 했었어요. 철수의 방법이 어제 한 학생과 어떻게 다르지요?

영수: 철수의 방법은 빠진 것 없이 모두 계산했어요.
학생들: (동의)

(a) 24 x 16

(b) 24 x 16

<그림 12> 철수가 두 자리 수 곱하기 두 자리 수를 계산한 방법

위의 대화들에서 영수의 대답은 주목할 가치가 있다. 영수는 전 날 잘못된 연산을 수행한 학생이다. 그럼에도 불구하고, 잘못된 연산에 대한 학생들 간의 논의로부터 철수가 수행한 연산이 완성된 것임을 인식할 수 있을 만큼 영수는 지적으로 성장하여 있음을 그의 반응으로부터 알 수 있다. 이 시점에서 전형적인 알고리듬의 이동이란 주제가 대두된다. 즉, <그림 12>에서 (b)를 먼저 하고 (a)를 하는 경우와 (a)를 먼저 하고 (b)를 하는 경우에서 선택의 문제이다. 어린이들에게 궁극적으로 지도하고자 하는 것은 전자이지만, 어린이들 스스로 전자의 효과를 생각해 낼 것을 기대하기는 어려울 것이다. 교사의 개입이 필요한 시기이다. 아주 유사한 경우인 덧셈에서도 어린이들은 같은 문제에 직면한다. 덧셈에서도 어린이들은 왼쪽으로부터 오른쪽으로 이동해 가는 덧셈 알고리듬을 구성한다. 자연스런 사고 방식인 후자를 버리기를 강요하고 전자를 강요해서는 안 된다(Kamii, & Dominick, 1998). 다음의 덧셈의 예는 이런 문제를 해결하는데 시사하는 바가 있다(김수환 등, 2004, pp. 138-140).

한 학생이 268+147에 대한 답을 구하고, 자신이 구한 방법을 설명한다.

학생: 2와 1을 더하면 3이지만, 3이라고 쓸 수 없어요. 왜냐하면 십의 자리에서 또 다른 백을 얻을 수 있기 때문이에요. 6과 4를 더하면 십이 되는데 여기서 또 다른 백이 생겨요. 그래서 저는 백의 자리에 4를 썼어요. 그리고 십의 자리에 0을 쓰지 않았어요. 왜냐하면 일의 자리로부터 또 다른 십을 얻을 수 있기 때문이죠. 8과 7을 더하면 15인데 여기서 또 다른 십을 얻어 십의 자리에 1을 썼어요. 그리고 나머지 5를 일의 자리에 썼어요. 그래서... 415입니다. (설명을 마친 후 자신의 활동을 되돌아보고 나서)

학생: 만약 반대편에서부터, 즉 일의 자리에서부터 계산을 시작했더라면 훨씬 더 쉽게 설명했을지 모른다고 생각합니다.

위의 학생의 마지막 반응은 충분히 주목할 만한 가치가 있는 반응이다. 이 학생의 반응은 학생 스스로 오른쪽에서 왼쪽으로 덧셈을 하는 자신의 고유하게 창안한 방법으로부터 왼쪽으로부터 오른쪽

으로 덧셈을 하는 전형적인 덧셈 알고리듬으로의 전이를 일으키는 바로 그 순간을 외현적으로 표현한 것이다. 학생들에게 나온 반응들을 참고로, 학생 스스로 완성된 지식에 매우 근사한 지식을 구성할 수 있다는 결론을 내릴 수 있을 것으로 본다. 이런 잠정 결론은 Piaget(1970)가 한 가정이 옳을 수 있음을 시사한다.

IV. 결론 및 시사점

Piaget는 인류가 지식을 구성해 온 방식과 유사한 방식으로 어린이들도 자신들이 학습해야 할 지식을 학습할 수 있다고 가정한다. Kamii는 이 가정을 확인하고자 하는 열망으로 실험교수법을 이용한 수학 수업을 실시하였다. Kamii가 3학년 학생들로부터 얻은 두 자리 수 곱하기 두 자리 수에 대한 반응은 Piaget가 한 가정을 지지하기에 충분하다. 어린이들이 보인 반응들은 전형적인 곱셈알고리듬으로 전이해 가는 과정에서 나타날 수 있는 다양한 유형의 방법들을 보여 주고 있으며, 또한 어린이들은 완성된 곱셈 알고리듬도 충분히 구성할 수 있는 지력이 있음을 보여주고 있다. 이런 지력은 학생들에게 충분히 자율성을 허용하였을 때 발현된다. Piaget가 말하는 자율성은 일반적인 의미에서의 자율성과는 다른 의미를 지닌다. Piaget가 말하는 자율성이란 옳고 그른 것을 판단하는 능력, 선과 악을 구분할 수 있는 능력, 미와 추를 구분할 수 있는 능력이다. 옳고 그른 것을 판단할 수 있는 능력이란 타인의 의견과 나의 의견을 비교해서 그 중 보다 합리적이고 이성적인 의견에 복종할 줄 아는 것도 포함한다. 이런 의미에서의 복종은 인지발달의 중추적 기능을 하며, 지식 구성에 있어서 상호작용이 매우 중요한 매개 역할을 한다.

학생들에게 자율성을 허용하는 교수·학습 환경을 구성하기 위해서는 몇 가지 고려할 점이 있다. 첫 번째, 학생들에게 사고할 수 있는 시간적 여유를 주어야 한다. 두 번째, 학생들 상호간에 의사교환 할 수 있는 시간을 주어야 한다. 세 번째, 같은 주제를 다루더라도 학습 목표를 개별화해야 한다. 네 번째, 학생들이 완성된 지식을 이해하기 위해서는 학생들에게 이 완성된 지식이 형성되기 이전의 중간 과정들을 구성하도록 교육환경을 구성해 주어야 한다. 다섯 번째, 학생이 자기 자신의 고유한 생각을 촉진시키기 위해서는 학생의 생각을 교사가 형성하고 있는 판단기준으로 평가해서는 안 된다. 여섯 번째, 인지적 영역에서의 자율성은 도덕적 영역에서의 자율성과 관련 있으므로, 도덕적 자율성 또한 교실에서 강조되어야 한다.

참 고 문 헌

김수환 · 박영희 · 이경화 · 한대희 (2004). 어떻게 이해하지?. 서울: 경문사.

Eves, H. (1992). *An introduction to the history of mathematics with cultural connections*. Orlando, FL: Saunders College Publishing.

Geary, D. C. (1994). *Children's mathematical development: Research and practical application*. Washington, DC: American Psychological Association.

Kamii, C. (1994). *Young children continue to reinvent arithmetic, 3rd grade*. New York Teachers College Press.

Kamii, C. (2001). *Young children reinvent arithmetic*, 1st grade(2nd Ed.). New York Teachers College Press.

Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The Harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow, & M. J. Kenney (Eds.), The teaching and learning of algorithms in school mathematics: *National Council of Teachers of Mathematics* 1998 Yearbook, pp.130-140. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Menninger, K. (1969). *Number words and number symbols: A cultural history of numbers*. New York: Dover Publications, Inc.

Nelson, D., Joseph, G. G., & Williams, J. (1993). *Multicultural mathematics: Teaching mathematics from a global perspective*. New York: Oxford University Press.

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. New York: W. W. Norton & Company, Inc.

Smith, D. E. (1925). *History of mathematics*, Vol. II. New York: Dover Publications, Inc.