韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 19집 제 1호, 2005. 1. 45-55

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 19, No. 1, Jan. 2005. 45-55

대학수학에서, 실수를 이용한 학습지도

김 병 무 (충주대학교)

대학수학 1학년 과정(미분적분학)에서 정리, 정의 등 개념의 이해를 도와주기 위해 학생들이 갖는 어려움을 그들이 자주 겪는 실수를 통해 찾아내어 분석하고 올바른 이해의 길로 안내한다. 실수를 탓하기 보다 학생의 편에 서서 이해하고 도움을 주도록 한다. 흔히 부딪칠 수 있는 예제 문제를 풀어보게 하고 공통으로 저지르는 실수를 제시하여 개념의 이해나 문제풀이를 바르게 하도록 이끌어 준다.

1. 서 론

실수가 실수로 끝나지 않도록 수학에서 학생들의 잘못을 분석하고 교육적 도구로 이들을 이용하는 경우가 있다(Abramovit B., Berezina M. and Berman A. 2002). 여기서 논의되는 많은 예제 문제들의 풀이에 대한 잘못은 학생들에게 미분적분학을 가르치고 반응을 알아보는 과정에서 나타난 것이다. 특히 시험은 이러한 잘못이 가장 많이 나타나는 학습 경험의 중요한 부분이므로 시험문제의 채점과정에서 유사한 잘못된 증명이나 풀이를 소개하여 잘못을 고치도록 하고 확실한 이해에 도움을 주도록 한다. 구체적으로 이러한 예들을 보여주고 가르치면서 학생들에게 잘못된 증명을 제시하고 실수를 하지 않도록 유도하는 것이 바람직하다. 필요에 따라 선다형문제로 재구성하여 제시하고 학생들이 시험이나, 숙제풀이에서 실수를 저지르는 구체적인 경우를 확인해 본다. 이런 형태의 문제가 학습에 도움을 주고 학생의 사고과정을 들어내고 지도하는 데 적극적으로 이용되도록 예제 문제를 정리하여 본다.

실수를 하며 배울 수 있음을 일깨어 주는 기회를 가져보고 실수의 분석이 수학적 개념을 배우는데 중요함을 알게 한다. 처음에 배울 때 학생들은 프린트나 칠판에 제시된 어느 증명을 의심 없이 받아들이게 되므로 수학에 대한 비판적인 접근을 기르기 위해 학생들의 수준에서 실수를 한 경우를 이용한 지도가 교수의 역할의 필요하고 중요한 부분이다(Buma Abramovitz & Miryam Berezina, 2003).

대학수학 1학년 과정에서 실수를 초래하는 구체적인 예제 문제를 제시하고 실수로 이끄는 주된 내용을 찾아본다(Lousie S. Grinstein 1974/Robert Anschuetz II & H. Sherwood, 1996/Jingcheng Tong, 1999). 특히 증명에 관한 객관식 문제가 정리나 개념의 이해에 쉬운 접근방법임을 보여준 여러 연구 결과가 실수를 이용한 지도에 도움을 준다(Berezina M. & Berman A.,2000/ Peter Hilton, 1993/Bruce R. Johnson, 1991/Milton P. Eisner, 1998).

2. 실수가 자주 일어나는 예제 문제

구체적인 예제를 통해 학생들이 정리나 개념을 잘못 적용하는 곳을 알아본다.

첫 번째 예제의 목적은 로피탈의 정리 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$가 $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$가 존재하지 않으면 사용될 수 없음을 보여준다.

(예제1) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{5x+2\sin x}$ … (1)을 구하여라.

다음은 (1)의 극한이 존재하지 않는다는 잘못된 증명이다. 직접 계산하면 $\lim_{x\to\infty}(3x+\sin x)=\infty$이고, $\lim_{x\to\infty}(5x+2\sin x)=\infty$이다. $(3x+\sin x)'=3+\cos x$이고, $(5x+2\sin x)=5+2\cos x$이므로 로피탈의 정리에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{5x+2\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\cos x}{5+2\cos x}$이다. $\lim_{x\to\infty}\cos x$는 존재하지 않으므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{5x+2\sin x}$는 존재하지 않는다.

이 증명은 잘못이다. 왜냐하면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$가 존재하면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$가 성립한다는 로피탈의 정리 때문이다. 따라서 이 예제의 풀이는 다른 방법을 이용한다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{5x+2\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{\sin x}{x}}{5+\frac{2\sin x}{x}}=\frac{3}{5}\text{ 이다.}$$

다음은 예제1의 변형으로 같은 이유로 실수를 하는 것을 보여준다.

(예제1') 다음은 $\lim_{x\to\infty}\cos x=0$의 잘못된 증명이다.

i) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x}=\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}\sin x)=\frac{1}{2}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}\sin x=\frac{1}{2}$이다.

ii) 로피탈의 정리에 의해 $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{2}$이다.

iii) 이들을 비교하면 $\frac{1}{2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{2}$이다.

iv) $\cos x=\frac{2(1+\cos x)}{2}-1$이므로 $\lim_{x\to\infty}\cos x=\lim_{x\to\infty}[2(\frac{1+\cos x}{2})-1]=2\cdot\frac{1}{2}-1=0$이다.

이 증명이 잘못이라는 것은 앞의 예제와 유사하다. $\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{2}$가 존재하지 않으므로 이 증명의 잘못은 ii)에 있다. 예제1과 예제1'로 돌아가서 알아보자.

(주의) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$보다는 $f(x_0) = g(x_0)$이므로 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$가 부정형일 때 로피탈의 정리가 흔히 이용되므로 학생들은 예제1과 예제1'에 대해 어려워할 수 있다.

(예제1'') 다음은 $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x} = 0$의 잘못된 증명이다. 실제로 이와 같은 경험을 갖지 않으면 잘못을 저지를 가능성이 높다. 또 다른 예를 보이면 다음과 같다.

i) 직접 계산하면 $\lim_{x\to 0}\frac{x + x^2\sin\frac{1}{x} + \sin x}{2x} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = 1$이다.

ii) 로피탈의 정리에 의해

$$\lim_{x\to 0}\frac{x + x^2\sin\frac{1}{x} + \sin x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1 + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + \cos x}{2} = 1\text{이다.}$$

iii) $\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{2} = 1$이고, $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$이므로 $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x} = 0$이 된다.

이 문제 역시 로피탈의 정리를 잘못 적용하여 $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x} = 0$이라는 것을 유도했다.

(예제2) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$임을 증명하여라.

다음은 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 1$의 잘못된 증명이다.

i) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ 이라 다시 쓴다.

ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$은 알고 있다.

iii) $t(x) = \frac{1}{x}$이라 하자.

iv) ii)에 의해 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin t(x)}{t(x)} = 1$이다.

이 증명이 잘못인 이유는 $\lim_{x\to 0} t(x)$는 존재하지 않기 때문이다.

불행하게도 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 1$은 많은 학생들이 실수하는 전형적인 문제이다. 학생들에게 이 극한이 0이라는 것을 증명하도록 하고 그 이유를 알아보았다. 극한이 0이라는 것을 알지만 왜 1이 아닌지는 어려워하였다.

다음 예제는 구간에 따라 함수가 다르게 되어 생기는 실수이다.

"$f(x)$가 구간(a, b)에서 미분가능하고 모든 $x\in(a, b)$에 대해 $f'(x)=0$이면 $f(x)$는 구간(a, b)에서 상수이다."를 이용하여 다음 예제를 증명한다.

(예제3) ' $\pi=0$ ' 이다.

$f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}$ 라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}\cdot\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0\text{이다.}$$

따라서, $f(x)=C$(상수)이다. 이 상수를 정하기 위해 한편, $f(0)=\frac{\pi}{4}$ 이고,

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{\pi}{2}+\arctan(-1)=-\frac{3}{4}\pi$임을 유의한다. $\lim_{x\to-\infty}C=C$, $-\frac{3}{4}\pi=\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\pi=0$이다.

이 증명이 잘못인 이유는 정의구간에 따라 함수가 $f(x)=C_1$ $(x<-1)$, $f(x)=C_2$ $(x>-1)$인 상수 C_1, C_2가 존재하고 $C_1\neq C_2$이기 때문이다.

다음도 구간에 따라서 $f(x)$의 원시함수가 다르기 때문에 일어나는 실수이다.

(예제4) 함수 $f(x)=\frac{1}{\cos^2x+3\sin^2x}$ 는 연속이고 양수이다. 따라서, $\int_0^\pi f(x)dx>0$이다. 그러나 다음 증명은 $\int_0^\pi f(x)dx=0$임을 보인다.

$\tan x=t$라 치환하면

$F(x)=\int\frac{dx}{\cos^2x+3\sin^2x}=\int\frac{dt}{1+3t^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\tan x)+C$이다. 미분적분학의 기본정리에 의해 $\int_0^\pi\frac{dx}{\cos^2x+3\sin^2x}=F(\pi)-F(0)=0$이다.

이 증명의 잘못은 함수 $F(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 정의되지 않으므로 $F(x)$가 구간 $[0,\pi]$에서 $f(x)$의 원시함수가 아니고, 구간 $[0,\pi]$에서 $f(x)$에 대한 원시함수는

$$G(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\tan x)+C_1, & x>\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\tan x)+C_2, & x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

단, $C_2=C_1-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ 이고 $G(\pi)-G(0)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}>0$이다.

다음 예제는 Cauchy 정리의 잘못된 증명이다.

(예제5) Cauchy의 정리는 다음과 같다.

$f(x), g(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 개구간 (a, b)에서 미분가능하며 모든 $x \in (a, b)$에 대해 $g'(x) \neq 0$이면 $\frac{f(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$인 $c(c \in (a, b))$가 존재한다.

다음은 잘못된 증명이다.

(i) $f(x)$는 Lagrange의 정리의 조건을 만족하므로 $f(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$인 $c \in (a, b)$가 존재한다.

(ii) 마찬가지로 $g(x)$도 Lagrange의 정리의 조건을 만족하므로 $g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$이다.

(iii) 따라서, $\frac{f(c)}{g'(c)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$이다.

(i)과 (ii)의 정확한 의미는 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(c_1)}{g'(c_2)}$이므로 이 증명은 잘못되었다.

Cauchy 정리의 바른 증명은(George B. Thomas, Jr. & Ross L. Finney, 1992)을 참고한다.

3. 왜, 무엇이 잘못인가?의 더 많은 예들과 학생들의 반응

다음 1)-10)의 잘못된 문제나 내용을 제시하여 그 이유를 학생들에게 알아보고 바른 답을 알아보자.

1) *임의의 함수의 도함수는 0이다.*

임의의 함수의 도함수는 x의 값에서 정의된다. 함수는 x의 값에서 상수이다. 따라서, 상수의 도함수는 0이므로 도함수는 0이다.

2) *2=1이다.*

$x^2 = (x)(x) = x + x + \cdots + x$, ($x$개를 더한다.)

$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d(x+x+\cdots+x)}{dx}$

$2x = 1 + 1 + \cdots + 1$(1을 x번 더한다.)

$2x = x$이고, 따라서 $2 = 1$이다.

3) *0=1이다.*

$\int \sin x \cos x dx$를 적분하는데 $u = \sin x$라 놓으면, $\frac{1}{2}\sin^2 x + C$를 얻는다. $u = \cos x$라 놓으면 같은 적분은 $-\frac{1}{2}\cos^2 x + C$ 가 된다.

이들 답이 같으므로 $\frac{1}{2}\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos^2 x$ 또는 $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$이다.

한편, 삼각함수의 등식에서 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$이므로 0=1이다.

4) $\frac{x^2+1}{x^2-1} \equiv \frac{2}{x^2-1}$ *이다.*

$\frac{x^2+1}{x^2-1}$를 부분분수로 분해하기 위해 $\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ 라면,

$x^2+1 = A(x+1) + B(x-1)$이고, x=1일 때 A=1이고, x=-1일 때 B=-1이다.

따라서, $\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$ 가 된다.

5) *cycloid의 호의 길이는 0이다.*

cycloid의 매개변수 방정식은 $x = t + \sin t,\ y = 1 + \cos t$이다. 호는 t=0에서 2π까지 움직일 때 만들어진다. S를 호의 길이라 하면, $S = \int_0^{2\pi} S' dt$이다.

$S' = \sqrt{(1+\cos t)^2 + (-\sin t)^2} = \sqrt{1 + 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}$

$= \sqrt{2 + 2\cos t} = 2\cos\frac{1}{2}t$ 에서, $S = \int_0^{2\pi} 2\cos\frac{1}{2}t dt = [4\sin\frac{1}{2}t]_0^{2\pi} = 0$이다.

6) $\pi = 0$이다.

$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$의 계산에서, $x = \frac{1}{t}, dx = -\frac{dt}{t^2}$라 치환하면

$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = -\int_{-1}^{1}\frac{dt/t^2}{1+1/t^2} = -\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2}$이고, $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = 0$이다.

다시 공식에서, $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = [\tan^{-1}x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$이다. 따라서, $\pi = 0$이다.

7) *0=1이다.*

$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-1}{x-1}$을 계산하기 위해 로피탈의 정리를 적용하면, $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{6x}{1} = 0$이다.

그러나 $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-1}{x-1}$=1이다. 따라서, 0=1이다.

8) *2=1이다.*

$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$는 알고 있다.

$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$라 하면

$\ln 2 + S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots)$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = S$이다. 따라서, $\ln 2 = 0$에서 2=1이다.

9) *$0=1=\frac{1}{2}$ 이다.*

$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$라면,

a) $S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0$,

b) $S = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1$,

c) $S = 1 - (1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S$이고, $S = \frac{1}{2}$ 이다.

10) *양항의 합이 음수일 수 있다.*

$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$, $2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$, 따라서, $2S = S - 1$이고, $S = -1$이다.

위의 설명이 잘못된 이유는 다음과 같다. :

1) 함수의 도함수는 x의 고정된 값에서 정의되고 함수는 x의 그 값에서 상수이다. x가 변할 때, 함수가 변하면 모든 x에 대해서 함수는 상수가 아니므로 그 도함수가 0일 필요는 없다.

2) 반복된 덧셈으로서 곱의 정의는 정수에 대해서만 타당하다. 따라서, 함수는 연속이 아니다. 이 정의에 대해 미분은 의미가 없다.

3) 적분상수가 무시되었다.

4) 본래의 가정이 잘못된 등식 $x^2 + 1 \equiv A(x+1) + B(x-1)$으로 이끈다. 우변은 선형이고 좌변은 이차이므로 이것은 불가능하다.

5) $(S')^2 = 4\cos^2 \frac{1}{2}t$는

$0 \le t \le \pi$에서, $S' = 2\cos\frac{1}{2}t$이고, $\pi \le t \le 2\pi$에서, $S' = -2\cos\frac{1}{2}t$를 의미한다.

6) t=0에 대해 치환 $x = \frac{1}{t}$은 의미가 없다. 따라서, 적분의 새로운 꼴 $\int_{-1}^{1} f(t)dt$는 무시되는 불연속을 포함한다.

7) 본래의 함수는 부정형이 아니므로 로피탈의 정리가 적용되지 않는다.
8) 결과는 S가 존재한다는 잘못된 가정에 근거했다.
9) a)에서 본래 급수의 짝수개 부분합만을 그룹으로 묶은 것이다.
b)에서 본래 급수의 홀수개 부분합만을 그룹으로 묶은 것이다.
c)에서 잘못은 S가 존재한다는 잘못된 가정에 근거했다.
10) S가 존재한다는 잘못된 가정에 근거했다.

충주대학교 1학년 학생 20명(성적우수자)의 정답수는 다음 표와 같다.

<표> 20명의 학생의 정답수

문항	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	계/평균
정답수	5	3	5	2	2	1	17	2	6	4	47/2.35

정답율은 낮았고 7번 문항이 정답자수가 많은 것은 로피탈이 정리를 이용한 문제 풀이를 한 주에 과제를 내주어 나온 결과이다.

한편 인터뷰를 통한 과제를 풀어본 학생들의 반응은 다음과 같다.

1) 오답 노트를 정리하여 잘못된 풀이의 원인을 분석하는 습관을 고등학교 시절부터 만들어 대처한 것이 수학에 대한 불안감을 씻고 확실하게 풀이에 접근하는 방법을 이해하고 확인하는 과정이 수학학습에 많은 도움이 되고 있다.
2) 이런 문제 유형에 처음 접하여 당황스러웠고 이러한 문제를 통해 기초지식과 개념에 대한 확실한 이해의 중요성을 깨닫고 새로운 경험을 하게 되었다.
3) 계산 결과도 중요하지만 왜 그렇게 되는지 그 이유를 확인하고 실수가 유발되는 것도 깨우쳐 수학이 사고력을 키워주는데 도움을 주고 기초의 중요성을 느꼈다.
4) 수학을 한줄 한줄 의미를 되새기며 읽어야 함을 알게 되었다.
5) 수학시간에 강조되는 내용을 확인하고 후회 없는 시간을 보내도록 최선을 다해야한다.
6) 더욱 열심히 책의 내용을 검토해야겠다.
7) 지금까지 해답을 위한 수학과 다름을 느끼게 되고 공부방법을 다시 한번 점검하게 되었다.

흥미 이외에 이들 예제들은 미분적분학 개념의 깊은 이해와 감상을 위한 도약대를 제공한다. 이와 같은 방법으로 예제들은 수학적 합리성에 대해 바람직스러운 정확성을 증대시키는데 도움을 주어야 한다. 이들 예제에 대한 학생들의 반응은 또 다른 어려움을 주었다. 학생들의 능력에 따라 반응은 이해에 도움을 주는가하면 올바른 내용 파악에 혼동을 더 초래하기도 했다.

4. 결 론

실제 문제를 해결할 수 있기 위해 수학에 대한 좋은 이론적 지식을 학생들이 필요로 하는 것은 잘 알려져 있다. 실수를 설명하는 것은 이론에 대해 학생들의 이해를 증진시키는 효과적인 방법이다. 시험은 학습과정의 본질적인 부분이고 학생들에 의해 고도로 중요시되는 부분이다. 이들 주의사항에 의해 자극 받아 미분적분학의 여러 면을 이해하도록 학생들을 돕는데, 주제의 이해를 증진시키는데 잘못된 증명의 여러 가지 예제를 다루었다. 주어진 예제들에 대해 학생들에게 잘못된 이유를 정확히 설명하도록 요구하고 답이 틀릴 경우 그 내용을 자세히 알려주면 이해를 하고 분명하게 개념이나 명제를 기억하게 된다.

주의할 점은 잘못된 증명이나 주장을 학생들에게 제공하는 것은 그들을 잘못 이끌 수도 있다. 이런 이유 때문에 더 주의를 기울이고 대부분의 문제해결에서 학생들이 증명과정이나 정리의 내용을 이용해야 할 경우 반례를 들어 강조점을 제시하는 것이 도움이 될 것이다.

많은 교사들은 학습에서의 오류를 태도가 나쁘다거나 노력이 부족하여 나타나는 나쁜 행실로 취급한다. 학습위기를 적절히 관리하기 위해서 이 두 가지는 명확히 구별되어야 한다. 진정으로 나쁜 태도는 받아주지 않는 것이 적절하다. 그러나 과제오류는 완성해가는 과정의 특성이며 학습상황의 일부로 간주되어야 한다. 오류는 감추어서도 안되고 자신이 모른다는 사실을 남들에게 감추고 싶은 마음에서 숨겨서도 안된다. 오히려 오류자체에 관심을 가져야 하며 오류에 대한 이해는 새로운 목표가 된다(리처드스켐프/ 황우형옮김,2000).

계산과 문제풀이 중심으로 생각했던 학생들도 이러한 접근에 수학도 한줄 한줄 문맥을 검토하며 이해하고 그 이유와 조건을 확인하는 수학으로 관점을 바꾸어 생각하게 되었다. 풀이만을 강조했던 수학도 필요하고 중요하지만 읽고 이해하는 과정도 소중함을 체험하는 기회를 제공했다.

마지막으로 오류의 지적을 통해 개념과 계산의 정확한 이해를 도와줄 예제를 만들어본다.

다음 예제는 절대값 개념의 중요성을 설명한다.

(예제) 주장 : 10=0

증명 : $(-5)^2 = 25 = 5^2$

$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{5^2}$

$-5=5$

$10=0$

여기서 잘못은 $\sqrt{(-5)^2} = -5$를 주장한 것이다. 이 예제는 $\sqrt{x^2} = |x|$를 설명하는데 도움이 된다. 우수한 학생들은 잘못을 찾아내는데 문제가 없었지만 수준이 낮은 학생들은 약간의 설명을 필요로 한다. 절대값의 개념의 중요성 $\sqrt{x^2} = |x|$임을 확인한 후 쉽게 이해하게 되었다. 이 예제는 다음 예제에서 다시 이용할 것이다.

(예제) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 를 구하여라.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}\doteq\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$ 따라서,

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$이고 $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$이다.

$x\geq0$인 경우에만 $\sqrt{x^2}=x$이고 일반으로 $\sqrt{x^2}=|x|$이므로 $\doteq$이 잘못이다. 따라서, 정답은 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=-1$이다. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1$은 전형적인 실수를 유발하는 문제이다. 학생들이 이런 실수를 저지르는 것을 경계시키는 효과적인 방법은 절대값을 이용하지 않고 $x\to\infty$일 때, 극한을 계산하게 하고 $x\to-\infty$일 때 극한을 계산하도록 요구하는 것임을 알았다.

처음에 정답을 찾아냈다면 배우지 못했을 내용까지 오답을 통해서 배우게 된다. 흥미로운 사실은 이해한 학습자들은 새로운 통찰력을 얻은 기쁨이 얼굴에 나타났으며 이해하지 못한 학습자들은 이 문제를 해결하려고 하는 진지한 태도를 볼 수 있다. 잘못된 증명의 이유를 찾아내는 것이 흥미를 끌어 내용을 다시 한번 확인하고 이해를 돕기도 하지만 반작용도 있음에 유의하고 수준별 지도로 차별화할 필요가 있다.

이러한 문항의 개발은 여러 해에 걸친 현장지도와 주의 깊은 관찰력으로 문제를 모으고 참고문헌을 통해 자료를 쌓아야한다. 학교 수준과 학생 수준에 따른 다양한 문제의 발굴에 수학교육자의 도움이 필요하다.

참 고 문 헌

리처드스켐프/ 황우형옮김 (2000). 수학학습심리학, 서울 : (주)사이언스북스.

Buma Abramovitz & Miryam Berezina (2003). Useful Mistakes, *Int. J. Math. Educ.Sci. Technol.*, **34**, pp.756-764.

Abramovit B., Berezina M. and Berman A. (2002). Incorrect but Instructives, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **33**, pp.465-475.

Berezina M. & Berman A. (2000). 'Proof reading' and multiple choice tests, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **31**, pp613-619.

Peter Hilton (1993). The Tyrany of Tests, *American mathematical Monthly*, Vol. **100**, No. **4**, pp.365-369.

Bruce R. Johnson (1991). New Scheme for Multiple-Choice Tests in Lower-Divison Mathematics, *American mathematical Monthly*, Vol. **98**, No. **5**, pp.427-429.

Robert Anschuetz II & H. Sherwood (1996). When Is a Function's Inverse Equal to Its Reciprocal?, *College Mathematics Journal*, Vol.. **27**, No. **5**, pp.388-393.

Jingcheng Tong (1999). The Mean Value Theorems of Lagrange and Cauchy, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **30**, pp.456-458.

George B. Thomas, Jr. & Ross L. Finney (1992). *Calculus and Analytic Geometry Part I*, Addison-Wesley Publishing Company.

Milton P. Eisner (1998). The Probability of Passing a Multiple-Choice Test, *College Mathematics Journal*, Vol.. **29**, No. **5**, pp.421-426.

Lousie S. Grinstein (1974). Calculus by Mistake, *Two-Year College Mathematics Journal*, Vol.. **5**, No. **4**, pp.49-53.