韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 19집 제 1호, 2005. 1. 57-68

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 19, No. 1, Jan. 2005. 57-68

대학수학에 필요한 기초 개념 이해도 측정

김 병 무 (충주대학교)

무한, 극한, 연속, 미분가능과 같은 중요한 수학적 개념을 이해하는 것은 대학수학 교양과정의 미분적분학 수강생들에게 필수적이다. 이들 개념의 이해 수준을 부록1, 2, 3을 통해 알아보고 평가를 분석한다. 평가결과는 이해도가 낮은 학생들을 위한 새로운 교수법이 필요성을 알게 하고 수학적 기본개념의 이해를 증진시키는데 정의의 정확한 이해를 돕고 구체적인 예제를 제시하는 교수법 개발에 수학교수의 노력을 필요로 한다.

I. 서 론

대학수학을 공부하면서 중요하고 필요한 개념이 많지만 무한에 대한 직관적 사고에 대해, 미분적분에서 기본이 되는 극한, 연속과 미분가능의 개념에 대해 학생들에게 알아보려고 한다. 무한개념의 이해를 위해 Single 2문제, Pair 3문제, Triple 2문제인 <부록2>(Dina Tirosh & Pessia Tasmir, 1996)에 대해 조사하고, 극한, 연속과 미분가능의 개념에 대한 이해를 알아보기 위해 <부록3>(Jan Bezuidenhaut, 1998)을 조사하여 각 문제별로 분석을 하려고 한다. 조사 대상은 2003년 1학기 기초미분적분학의 이해(김병무, 2003)를 수강하는 충주대학교 1학년 209명의 주간학생과 기초통계의 이해(김병무, 2002)를 수강하는 야간학생 193명으로 학기 첫째 시간에 실시되었다. 이들에게 우선 기본대수 개념의 이해도<부록1>(Carmel Coady & John Pegg, 1994)를 조사하고 이들중 주간학생에 대해서만 무한에 대한 직관적 사고와 극한, 연속과 미분가능의 이해를 중간고사 볼 때 알아보았다.

수학의 학습에서 기능적인 계산도 중요하고 필수적이지만 기본개념의 이해는 새로운 명제의 개발과 원리의 발견에 필수적이므로 앞으로의 학습에 도움을 주고 사고력을 기르는데 밑바탕이 된다. 학습능력이 떨어지는 본 대학을 포함한 비슷한 수준의 학생들에게 개념의 이해를 지도하기 위한 자료를 마련할 기회가 될 것이다.

II. 본 론

1. 기본 대수개념의 이해도 조사

기본 대수개념의 이해도 조사를 위해 네 영역-일반화 표현, 대수에서 문자의 의미를 설명하기, 방정식 풀이, 지수의 이해에 대한 조사를 하였다. 이 영역을 선택한 이유는 다음과 같다. ㄱ) 유용한 대

수적 기술 ㄴ) 대수에서 문자의 의미를 어떻게 설명하고 지식을 어떻게 개발하는가? ㄷ)방정식을 푸는 능력은 대수 지도와 배움에 기본적이다. ㄹ) 지수의 이해는 중요한 역할을 한다. 수업 첫째 날 1학년 학생(주간 209명과 야간 193명)에게 강의 개요와 계획을 소개하고 <부록1>의 문항에 대해 조사를 하였다. 기초 대수 능력 검사의 결과는 다음 <표 1>과 같다.

주·야 학생들의 정답율 차이는 매우 컸고 전체 주·야 학생들의 정답율은 25.4%로 대학수학을 수업하기에 적절한 수준은 아니다. 대학수학 학습능력의 부족은 상당한 문제로 이의 원인 분석과 해결을 위한 대책이 절실히 요구된다.

<표 1> 기초 대수 능력 시험(총점/평균)

	expressing generalization (5)	interpretation ofthe meaningof letter(3)	solving equation (3)	indices (4)	종합문제 (7)	계(22)
주간(209)	441/2.11	174/0.83	189/0.90	364/1.74	395/1.89	1563/7.48
야간(193)	299.5/1.55	65/0.34	68/0.35	100/0.52	154/0.45	686.5/3.56
합계	740.5/1.84	239/0.59	257/0.64	464/1.15	549/1.37	2249.5/5.60

2. 무한에 대한 직관적 사고

두 무한집합의 동등에 대한 학생들의 직관적인 결정은 주로 두 집합이 주어지는 방법에 의해 결정되는가를 조사하기 위해 연구는 주로 다음중 어떤 표현이 높은 정답율을 갖는가 알아본다 (numerical-horizontal과 numerical vertical, 또 numerical-horizontal, numerical vertical과 numerical-explicit(geometric)). 14문제에 대한 반응을 조사하는데 같은 무한집합의 다른 표현이 제시된다. 다음 14개 문항에 대한 반응을 알아보자.

무한 집합에 대해 원소의 개수를 비교하고 어느 집합이 (많다, 같다, 작다)로 대답하고 답을 선택한 이유를 설명하는 문제이다. 209명의 학생의 반응을 문항별로 알아본다. 괄호안은 %를 나타낸다.

Single 1. A={1, 2, 3, 4, 5, 6, ⋯ }
B={-3 -2, -1, 0, 1, 2, ⋯ }

정답	오답	무응답
41(19.6)	150(71.8)	18(8.6)

Single 2. A={1, 2, 3, 4, ⋯ }
B={-1, -2, -3, -4, ⋯ }

정답	오답	무응답
162(77.5)	25(12.0)	22(10.5)

Pair 1. 1) A={1, 2, 3, 4, 5, 6, ⋯ }

B={ $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, ,$2\frac{1}{2}$, 3, ⋯ }

정답	오답	무응답
44(21.1)	133(63.6)	32(15.3)

2) A : 정삼각형의 한 변의 길이

B : 정삼각형에서 중점을 이은 선분의 길이 (그림 부록참조)

정답	오답	무응답
78(37.3)	63(30.1)	68(32.5)

Pair 2. 1) C={1, 2, 3, 4, 5, 6, ⋯ }

D={3, 6, 9, 12, 15, 18, ⋯ }

정답	오답	무응답
52(24.9)	102(48.8)	55(26.3)

2) C : 정삼각형의 한 변의 길이

D : 정삼각형의 둘레의 길이 (그림 부록참조)

정답	오답	무응답
75(35.9)	65(31.1)	69(33.0)

Pair 3. 1) E={1, 4, 9, 16, 25, ⋯ }

F={4, 8, 12, 16, 20, ⋯ }

정답	오답	무응답
58(27.8)	60(28.7)	91(43.5)

2) E : 정사각형의 넓이

F : 정사각형의 둘레의 길이 (그림 부록참조)

정답	오답	무응답
64(30.6)	50(23.9)	95(45.5)

Triple 1. 1) G={1, 2, 3, 4, 5, ⋯ }

H={3, 4, 5, 6, 7, ⋯ }

정답	오답	무응답
39(18.7)	62(29.7)	108(51.7)

2) G={1, 2, 3, 4, 5, … }

H={3, 4, 5, 6, 7, … }

정답	오답	무응답
42(20.1)	59(28.2)	108(51.7)

3) G : 사다리꼴의 윗변의 길이

H : 사다리꼴의 아래변의 길이 (그림 부록참조)

정답	오답	무응답
63(30.1)	35(16.7)	111(53.1)

Triple 2. 1) I={1, 2, 3, 4, 5, … }

J={ 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, … }

정답	오답	무응답
58(27.8)	37(17.7)	114(54.5)

2) I={1, 2, 3, 4, 5, … }

J={ 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, … }

정답	오답	무응답
60(28.7)	28(13.4)	121(57.9)

3) I : 정사각형의 한 변의 길이

J : 정사각형의 넓이 (그림 부록참조)

정답	오답	무응답
59(28.2)	35(16.7)	115(55.0)

각 문항에 대한 정답율은 18.7%에서 77.5%까지이고 정답율의 평균은 28.6%로 무한개념에 대한 이해가 낮음을 알 수 있다. 두 주어진 무한집합이 같은 수의 원소를 갖고 있다는 결정은 주로 이 문제들이 표현되는 방법에 달려있음을 조사 결과 알 수 있었다. 판단의 근거는 학생들은 같다는 이유를 대부분 '무한하기 때문에 비교할 수 없다', '수에 끝이 없다.', 원소의 수가 무한대이다.'이었고 '일대일대응'이라고 답한 학생은 단 1명이었다. 무응답의 이유는 "학생 개개인이 알고 있는 지식으로 설명할 수 없다."이고 다르다는 이유는 '세어본 결과'와 '한 집합이 다른 집합의 부분집합이다'로 답했다. 참고로 Dina Tirosh & Pessia Tasmir(1996)의 연구 결과를 보면 학생들이 같다는 판단의 근거는 '무한집합의 종류가 유일하다.'와 '일대일대응 관계'이다. 다르다는 이유는 '한 집합이 다른 집합의 부분집합이다.'와 '비교 방법이 다양하여 차이가 난다'이다. 표로 나타내면 <표 2>와 같다.

<표 2>무한에 대한 직관적 사고

문항	표현 방법	두 집합의 원소가 같다고 그 이유로 일대일대응(%)	원소가 같다는 이유로 모든 무한집합은 원소가 같다로 대답(%)
Single 1	numerical-horizontal	-------	23
Single 2	numerical-explicit	73	98
Pair 1	1) numerical-vertical	6	47
	2) geometric	45	80
Pair 2	1) numerical-vertical	9	52
	2) geometric	49	76
Pair 3	1) numerical-vertical	5	52
	2) geometric	37	82
Triple 1	1) numerical-horizonal	-----	25
	2) numerical-vertical	-----	49
	3) geometric	33	75
Triple 2	1) numerical-horizonal	52	86
	2) numerical-vertical	13	61
	3) geometric	33	85

3. 극한, 연속, 미분가능의 개념 이해

미분적분학의 기본 개념의 이해를 조사하기 위해 <부록3>의 필기시험과 몇 명의 학생에게 인터뷰가 이루어졌다. 함수의 극한과 한 점에서 함수의 연속에 대한 오해와 실수를 다루는 것이다. 209명의 학생에 대한 정답자수와 %는 다음과 같다.

Q1. 13명(6.22%), Q2. 1) 39명(18.66%), 2) 60명(28.71%), 3) 10명(4.78%)

Q1을 맞춘 13명의 학생에게 기말고사를 볼 때, 다시 같은 문제로 풀게하고 인터뷰를 하였다. 놀랍게도 정답을 한 학생은 한명도 없었고 개념의 이해에 대한 질문에서 정확히 이해를 하지 못함을 알 수 있었다. 개념의 이해를 가르치는데 새로운 방법이 시도되어야 함을 절실히 깨닫는 순간이었다.

III. 결 론

기초 대수능력 시험 결과 학생들의 수준은 대학수학을 학습하는데 필요한 기본적인 능력이 상당히 부족함을 알 수 있었다. 주·야간 학생의 능력 차이도 상당하지만 전체적으로도 대학수학을 수강하려면 기초 학습능력을 보충하여 진도를 나가야 한다. 현실적 여건에서 최선을 다하는 방법은 각 단원마다 필요한 선수학습 내용을 정리하여 알려주고 예습하도록 하는 것이다. 그룹을 4-5명씩 7-10

개 조로 나누어 기초 학습능력이 갖추어진 학생을 팀장으로 팀의 구성원과 협력학습을 하게 하고 팀장을 통해 학습진행 과정을 정기적으로 보고하게 한다. 팀장과 대화채널을 유지하고 그들을 통해 팀 구성원에게 전달학습을 하게 한다. 이런 노력을 팀별로 평가하여 각 팀의 구성원은 같은 점수를 받도록 하여 유대관계를 갖고 대처하도록 한다(김병무, 2000). 앞으로는 교재의 내용에 학생들의 수준을 반영하고 학습능력에 따라 반편성을 하고 대처하도록 한다. 학교 차원에서 대책을 수립하기 위한 연구를 하도록 학교 행정 담당자에게 건의한다.

무한에 대한 직관적 사고 검사를 통해 나타난 무한에 대한 개념의 이해를 함수에서 일대일대응을 정의하면서 무한집합에서는 진부분집합인 경우에 원소의 개수(농도)가 같을 수 있음을 구체적인 예를 들어 확인시킨다. 유한과 무한의 차이를 구별하는 기준을 찾아보게 하고 무한집합도 크기가 다름을 이해시키고 예를 들어준다. 집합의 표현 방법에 따라 이해도가 달랐지만 일대일대응 관계를 정확히 이해하고 기하학적 대응관계를 이용하여 무한집합이 같음을 확실히 알도록 한다.

극한, 연속, 미분가능의 이해를 정의와 기호를 다시 확인시키고 그래프를 통해 이해도를 높이며 시간을 더 많이 투입한다. 'x=a에서 함수 f(x)가 연속이다.'는 정의를 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ 또는 $\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=0$, $\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}=0$등 표현을 여러 가지로 나타내어 표현의 차이 때문에 연속임을 이해하는데 불편이 없도록 한다. 미분가능의 경우도 'x=a에서 함수 f(x)가 미분가능하다 .'는 표현을

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$ 로 나타내고, 구체적인 예도 함께 보여 표현이 다르더라도 같은 의미임을 이해시킨다. 함수 f(x)가 x=a에서 미분가능하면 함수 f(x)가 x=a에서 연속이다.'를 증명하는 문제를 주간학생 209명에게 조사한 결과 정답율은 10%가 안되었으며 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = f'(-1)$을 맞춘 학생은 5%가 안되었다. 특히 기말고사에서 조사한 정의에 의해 도함수를 구하라는 문제는 정답율이 1% 정도였다. 학생들은 정의를 이용하거나 개념을 이해하여 푸는 문제에 대해 상당히 낮은 정답율을 나타내었다. 기능적인 계산에만 관심을 갖고 있는 학생들의 태도는 바람직스럽지 않다. 이러한 태도는 시험문제를 통해 고쳐야 하고 교수-학습에서 강조를 정의와 개념의 이해에 중점을 두고 시간도 많이 투입해야 한다. 미적분 개념 형성과 Mathematica의 이용(김주봉 · 김병무, 1998)도 도움이 될 것이다.

현실의 제약은 주당 2시간의 수학 시간과 학생들의 수학에 대한 수강 기피로 통과 의례의 수학 수업이 이루어지고 있다. 수학의 중요성은 공대생에게 분명하지만 학생들의 수준은 수학 없는 공대 교육을 원하고 있다. 수학에 대한 기본적인 개념의 조사였지만 대학수학 교육에 대한 많은 것을 생각하게 한다. 획기적인 대책과 실천가능한 연구가 이루어져 대학수학 교육이 제자리를 찾도록 해야 한다.

참 고 문 헌

김병무 (2000). Math-Club을 이용한 대학수학 학습, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육논문집> 제**10**집, pp.271-282.

김병무 (2002). 기초통계의 이해, 서울 : 신성출판사.

김병무 (2003). 기초 미분적분학의 이해, 서울 : 신성출판사.

김주봉 · 김병무 (1998). 미적분 개념 형성과 Mathematica의 이용(1), 청주교육대학교 과학교육연구소 논문집 제**19**집, pp.90-105.

Goetz, B. E. (1996). *in Our Mathematical Heritage*, New York, Collier Books.

Dina Tirosh & Pessia Tasmir (1996). The Role of Representations in Students' Intuitive Thinking about Infinity, Int. *J. Math Educ. Sci. Technol.* Vol. **127**, No.**1**, pp.33-40.

Carmel Coady & John Pegg (1994). A Study of First Year University Students' Interpretation of the Meanings of Letters Used in Algebraic Contexts, *Australian Senior Mathematics Journal*, Vol.**7**, No. **2**, pp.21-31.

Jan Bezuidenhaut (1998). Limits and Continuity ; some conceptions of frst-year college students, Int. *J. Math Educ. Sci. Technol.* Vol. **129**, pp.389-399.

<부록1> <u>기초 대수 능력 시험</u>

* 다음 문제를 읽고 질문에 답하시오.

(Expressing Generalization)

<u>질문1</u> : 성냥개비로 주어진 다음 모양에 대해 (그림 생략)

1) 네 개의 삼각형, 다섯 개의 삼각형을 만드는데 몇 개의 성냥개비가 필요한가?

2) 대수적인 기호를 이용하여 이 패턴을 기술하는 규칙을 써라.

3) 15개의 삼각형을 만드는데 몇 개의 성냥개비가 필요한가?

4) 규칙을 문장으로 써보아라.

<u>질문2</u> : 다음 표에 대해 x와 y사이의 관계를 기술하여라.

x	1	3	6
y	1	7	16

(Interpretation of the meaning of letters)

<u>질문1</u> : 다음 그림은 부분적으로만 완성되었다. n개의 변을 갖는 각 변의 길이 2인 다각형의 둘레의 길이를 구하여라.

<u>질문2</u> : $2n$ 또는 $n+2$중 어느 것이 큰가? 그 이유를 설명하여라.

<u>질문3</u> : $e+f=8$ 이면, $e+f+g=?$

(Solving equations)

<u>질문1</u> : x=7 일 때, $(x+1)^3+x=519$를 만족한다면 $(5x+1)^3+5x=519$를 만족하는 x의 값은?

<u>질문2</u> : $\frac{3x}{4}-5=21$을 풀어라.

<u>질문3</u> : $4-\frac{1}{6}(x-2)=\frac{3}{4}x$ 를 풀어라.

(Indices)

<u>질문1</u> : $3^0=$

<u>질문2</u> : $8^{\frac{2}{3}}=$

<u>질문3</u> : $5^{-2}=$

<u>질문4</u> : $4^2 * 2^6=$

(종합문제)

1. 3n 과 2n+2는 어느 것이 큰가? 설명하여라.

2. x=6일 때, $(x+1)^3+x=349$이면 $(5x+1)^3+5x=349$인 x는?

3. $L+M+N=L+P+N$은 (1)항상 성립 (2) 때때로 성립 (3) 전혀 성립 안함.

4. 파란 연필은 한 자루에 50원, 빨간 연필은 한 자루에 60원이다. 파란 연필, 빨간 연필 모두 합쳐 900원을 지불했다. 파란 연필 b개, 빨간 연필 r개 샀다면 b와 r의 관계식은?

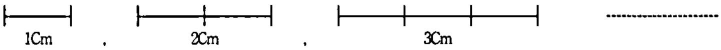
5. c+d=10이고, c가 d보다 작다면 c에 대해 무엇이라 할 수 있는가?

6. 그림이 완성되지 않은 도형이 있다. 한 변의 길이가 3cm이다. 모두 n개의 변이라면 둘레의 길이는?

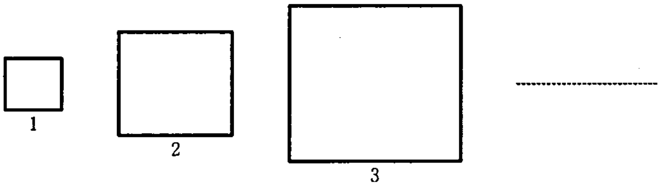
7. r=s+t이고 r+s+t=30이면 r의 값은?

<부록2> **무한에 대한 직관적 사고**

예제) 1. 선분의 무한집합



2.



A={1, 2, 3, 4, 5, … } ; 선분의 길이의 집합.

B={1, 4, 9, 16, 25, … } ; 사각형의 넓이의 집합.

a) 집합 A의 원소의 수가 집합 B의 원소의 수보다 (1.많다, 2.같다, 3.작다)

b) 답을 선택한 이유를 설명하여라. :

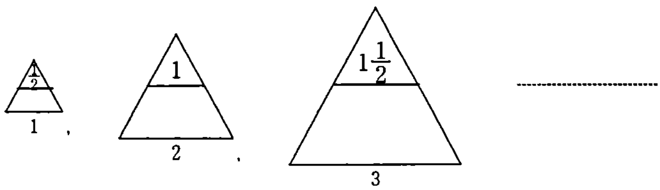
*** 위의 예제와 같이 다음 두 무한 집합에 대해 원소의 개수를 비교하고 어느 집합이 (많다, 같다, 작다)로 대답하고 답을 선택한 이유를 설명하여라.**

Single 1. A={1, 2, 3, 4, 5, 6, … }, B={-3 -2, -1, 0, 1, 2, … }

Single 2. A={1, 2, 3, 4, … }, B={-1, -2, -3, -4, … }

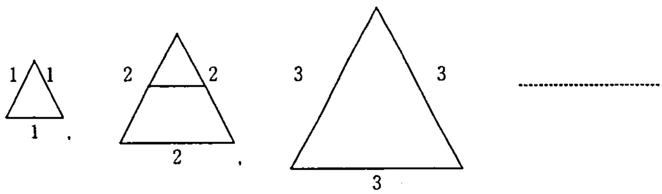
Pair 1. 1) A={1, 2, 3, 4, 5, 6, … }, B={ $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, ,$2\frac{1}{2}$, 3, … }

2) A : 정삼각형의 한 변의 길이, B : 정삼각형에서 중점을 이은 선분의 길이



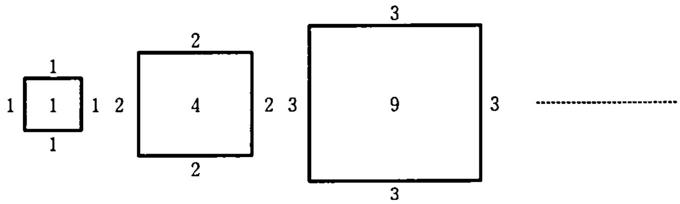
Pair 2. 1) C={1, 2, 3, 4, 5, 6, … }, D={3, 6, 9, 12, 15, 18, … }

2) C : 정삼각형의 한 변의 길이, D : 정삼각형의 둘레의 길이



Pair 3. 1) E={1, 4, 9, 16, 25, ⋯ }, F={4, 8, 12, 16, 20, ⋯ }

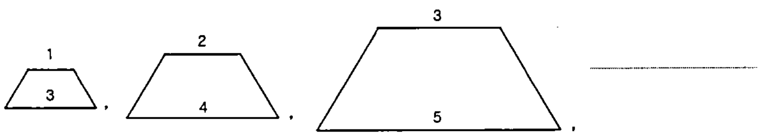
2) E : 정사각형의 넓이, F : 정사각형의 둘레의 길이



Triple 1. 1) G={1, 2, 3, 4, 5, ⋯ }, H={3, 4, 5, 6, 7, ⋯ }

2) G={1, 2, 3, 4, 5, ⋯ }, H={3, 4, 5, 6, 7, ⋯ }

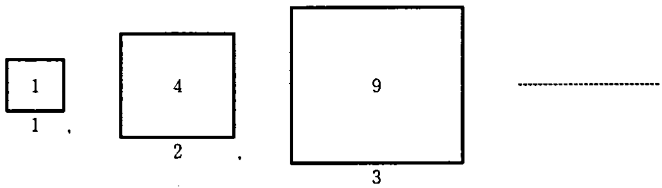
3) G : 사다리꼴의 윗변의 길이, H : 사다리꼴의 아래변의 길이



Triple 2. 1) I={1, 2, 3, 4, 5, ⋯ }, J={ 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, ⋯ }

2) I={1, 2, 3, 4, 5, ⋯ }, J={ 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, ⋯ }

3) I : 정사각형의 한 변의 길이, J : 정사각형의 넓이



<부록3> **Limit and Continuity의개념 이해**

Question 1.

함수 f가 $\lim_{x\to 2} f(x)=3$이면 1.1--1.6 중 반드시 참인 것에 O표 하시오.

이들 중 어느 것도 참이 아니면 1.6에 O표 하시오.

1.1 f는 x=2에서 연속이다.(　　)

1.2 f(x)는 x=2에서 정의된다.(　　)

1.3 f(2)=3이다.(　　)

1.4 $\lim_{h\to 0}\{f(2+h)-f(2)\}=0$ 이다.(　　)

1.5 f′(2) 가 존재한다.(　　)

1.6 위의 문장 어느 것도 참이 아니다.(　　)

Question 2.

다음 표는 x에 대응하는 f, f′의 값을 나타낸 것이다.

x	-2	-1.4	-1	-0.8	-0.4	0	0.8	1	1.4	2	2.8
f(x)	9	1.9044	0.25	0.0144	0.2704	1	2.1904	2.25	2.0164	1	0.0144
f′(x)	-1.8	-6.624	-2	-0.432	1.456	2	0.592	0	-1.136	-2	0.432

다음 물음에 답하여라.

2.1 주어진 표에서 $\lim_{x\to 2} f(x)$의 값을 구하는 것이 가능한가? 가능하면 답을 구하고 그 이유를 쓰시오.

2.2 x=-1에서 함수 f는 연속인가? 답을 쓰고 설명하시오.

2.3 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ 의 값을 구하시오.