韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 19집 제 1호, 2005. 1. 137-149

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 19, No. 1, Jan. 2005. 137-149

수열단원을 중심으로 개인차를 고려한 교과서에 관한 연구

권 영 인 (경상대학교)
서 보 억 (계성중학교)

수학과 7차교육과정에서 가장 중요하게 생각하는 점이 수준별 단계형 교육과정이다. 특히, 수준별교육과정이 가장 핵심적인 역할을 하고 있다. 이에 따라 교육과정이 기본형, 심화형, 보충형으로 구분하여 제시하고 있는 실정이다. 이러한 교육과정에 따라 수학교과서가 수준별이라는 큰 틀 안에서 구성되어졌다고 볼 수 있다. 하지만, 실제 교육현장에서 현재 출판된 수학교과서에서는 이러한 교육과정의 이상을 충분히 반영하고 있다고 보기 어렵다고 교사들이 느끼고 있다. 이러한 현실에서 새로운 교육과정에서는 이러한 이상을 충분히 고려한 수학교과서가 요구되어지고 있으며, 이러한 요구에 부합한 러시아의 실험교과서를 바탕으로 하여 고등학교 수학I 수열단원을 중심으로 개인차를 고려한 새로운 교과서의 한 모형을 개발하여 제시하고자 한다.

I. 서 론

수학과 교육과정은 수학교육목표를 달성하기 위하여 무엇을 선정해서 어떻게 조직하여 가르칠 것인가를 종합적으로 묶은 교육의 전체적인 계획이다. 즉, 수학교실 환경 속에서 학생들이 갖게 되는 모든 수학적인 경험과 수학활동의 총체로서 제시되어지는 것을 의미한다. 하지만, 아무리 합리적이고 체계적인 교육목표와 교육내용, 교육방법, 교육평가가 이러한 수학과 교육과정을 통해 교사들에게 소개되어지더라도 이렇게 제시된 교육과정 그 자체로는 교육활동을 실시할 수는 없다. 새롭게 제시되어진 교육과정을 학교현장에서는 교육과정이 아닌 수학교과서로서 인식하고 받아들이게 된다. 교육과정의 이상을 가장 잘 반영한 수학교과서가 가장 현실적인 수학과 교육과정이라고 볼 수 있다.

따라서, 급변하는 사회의 변화에 따른 사회적인 요구와 변화 및 교육이론의 체계적인 소개를 교육과정을 통해서 제시되어지더라도 수학교과서가 이러한 요구와 부합되지 않거나 충분히 이해할 수 없는 형식으로 소개된다면 새로운 교육과정이 추구하는 목표를 실제 학교수학 현장에서 달성할 수 없을 것이다. 실제로 이러한 관점과 같은 맥락에서 현행 수학교과서의 문제점에 대해 다음과 같이 언급한다. 첫째, 수학적 사실의 전달도구로서의 교과서이다. 둘째, 동일한 수준의 대동소이한 교과서이다. 셋째, 형식적인 도입과 마무리가 이루어져 있다. 넷째, 교구사용 및 학생들의 조작활동 활성화의 어려움을 가지고 있다. 마지막으로 활발한 의사소통의 어려움을 지적하고 있다(황혜정 · 임재훈, 1998).

수학과 7차 교육과정은 소위 수준별 단계형 교육과정이라고 부르고 있다. 이것에 대해 교육과정에서는 '국민 공통 기본 교육 기간의 수학과 교육은 대부분의 학생들이 자기가 속하는 학년에 관계없

이 자기의 능력 수준에 맞는 단계에서 학습할 수 있게 하는, 이른바 단계형 수준별 교육 과정을 적용한다. (…) 학생들이 자기의 학습 능력과 속도에 맞는 단계에서 학습할 수 있게 한다. (…) 각 단계 내에서 발생하는 학생들의 수준 차이를 고려하여 보충 과정과 심화 과정을 설치하는데, 이에 대한 학습은 기본 과정 지도와 병행하여 또는 남은 기본 시간이나 학교장이 허용하는 재량 활동 시간을 이용할 수 있다.'라고 제시하고 있다(교육부, 1998). 이러한 수준별 단계형 교육과정의 취지는 새로운 교육과정에서도 지속적으로 추구해 나갈 목표라고 여겨지고 있으며, 이러한 교육과정의 이상을 충실히 반영하고 있는 새로운 교과서가 요구되어지고 있다.

우리는 여기서 이러한 이상을 잘 반영할 수 있는 교과서의 전형으로 러시아의 Gusev의 실험용 교과서를 제시할 수 있다. Gusev의 실험용 교과서는 학습자의 개인차를 고려한 수학교과서의 구현으로 볼 수 있으며, 이 교과서에서 제시되어진 교과서의 체계, 학습내용 및 연습문제의 틀과 내용이 수준별 수학교육을 위한 수학적 지식의 교수학적 변환의 사례라고 볼 수 있다(한인기, 2004).

따라서, 본 연구에서는 러시아의 실험교과서를 기초로 하여 수열단원에서 수열의 합을 중심으로 개인차를 고려한 새로운 교과서의 한 예를 제시하여 새로운 교육과정에 시사점을 찾고자 한다.

II. 연구문제

우리나라와 같이 국가수준의 교육과정에서는 교과서의 역할은 수학교육에서 절대적인 위치를 차지하고 있다. 이러한 위치에 있는 교과서에 대한 선행연구를 간단히 살펴보면, 수학교과서의 문제점에 대한 연구, 교과서의 국제 비교 연구, 교과서 내용 전개의 분석(김홍기, 2001; 서보억·신현용·전평국, 1995; 조영미, 2001)등에 치중하고 있다. 이러한 연구에서 새로운 수학교과서가 갖추어야할 방향에 대해서 다음과 같이 언급을 하고 있다. 수학교과서는 학습자의 능동적인 참여와 체험을 전제로 학습이 성립해야 한다(양미경, 1998). 수학교과서는 학생 중심적 개별화의 원리를 반영하여야 한다(박영배, 1996). 수학교과서는 수학적 지식의 조작적 성격의 구현과 학생들의 수준차를 고려한 다양한 수준의 수학교과서이어야 한다(황혜정·임재훈, 1998).

우리나라 교육과정에서 수열 단원에 대한 구체적인 언급이 제시되어지는 것은 고등학교 2학년이다. 고등학교 2학년부터는 선택중심교육과정으로 제시되어져 있으며 다음과 같은 기본방향을 설정하고 있다. 첫째, 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 강조한다. 둘째, 문제 해결력을 강조한다. 셋째, 학습자의 활동을 중시한다. 넷째, 계산기, 컴퓨터를 수학적 도구로 활용한다. 다섯째, 다양한 교수-학습 방법과 평가 방법을 활용한다. 또한, 이를 바탕으로 다음과 같은 수업활동이 이루어져야 한다고 교육과정에서 제시하고 있다. 첫째, 학생의 개인차에 따른 학습능력을 고려하여 개별화 학습 등을 강조한다. 둘째, 구성주의적 학습과 학습자 중심의 활동을 강조한다. 여기서 구성주의적 학습과 학습자 중심의 활동학습을 위해서는 학생의 사전 경험이나 직관을 중시해야 하며, 수학적 개념이나 원리를 구체적인 것에서부터 이해시켜 심화하는 것이 바람직하다고 보고 있다. 셋째, 문제 해결력을 신장시

키기 위한 문제 해결 과정을 적절히 활용하며, 문제 해결의 결과뿐만 아니라 해결 과정과 그 방법도 중시한다. 넷째, 컴퓨터, 계산기, 구체적 조작물을 교수·학습에 적극적으로 활용할 것을 강조한다.

앞에서 언급한 교육과정을 구체적으로 반영한 것이 교과서라고 볼 때, 우리나라의 교과서는 크게 두 가지 점에 중점을 둔 교과서이어야 한다고 분석할 수 있다. 하나는 학생의 개인차를 고려한 차등화된 교육을 통한 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙과 함께 문제 해결력을 강조하는 교과서이어야 한다는 것이다. 여기서, 교과서는 학습내용전개와 연습문제로 구성되어져 있으므로, 각각의 측면에서 개인차를 고려한 차등적 접근이 필요하다. 또 다른 하나는 구체적인 조작물이나 수학적인 도구(컴퓨터를 포함하여)를 적극적으로 활용하는 학습자 활동 중심의 교과서이어야 한다는 것이다.

여기서, 두 번째 중점 내용을 구체적으로 살펴보자. V.A. Krutetskii는 수학적인 문제해결활동을 수학적인 정보를 다루어 가는 활동으로 보고, 문제해결활동을 정보의 수집단계, 정보의 처리단계, 정보의 파지단계 3단계로 나누어 관찰 분석하였다(Krutetskii, 1976). 이 중에서 정보의 파지단계에 대한 그의 분석결과는 매우 흥미로운 점이 있다. 재능을 가진 학생의 경우 이 단계에서 문제의 유형, 풀이의 일반적인 방법, 추론도식 등을 오랫동안 지속시키는 반면, 구체적인 자료나 수치적인 자료 등은 빨리 잊어버린다. 반면에, 둔한 학생의 경우 문제의 일반적 요소의 파지는 짧으나 구체적인 수치, 숫자, 기하학 도형은 오래 기억됨을 보이고 있다. 구체적인 조작물에 대한 상반된 반응을 볼 때, 구체적인 조작물의 제시 또는 학생의 조작적인 활동 그 자체가 개인차를 고려한 것임을 알 수 있다.

지금까지의 선행연구와 교육과정에서의 사실을 바탕으로, 본 연구에서는 개인차를 고려한 교과서가 갖추어야할 하위 요소로 첫째, 구체적인 조작물에 의한 활동 중심을 통한 차등화, 둘째, 교과서 본문을 통한 차등화, 셋째, 연습문제의 제시를 통한 차등화로 나누어 구체적인 고찰을 하고자 한다.

III. 활동중심을 통한 차등화

수학적인 개념의 구성에 대해서 Dienes는 어린 아동의 경우에는 구체적에서부터 제공하여야 하며, 점차로 머리 속에서 하는 학습으로 서서히 도입할 수 있다고 한다. 즉, 그는 수학에서 기반이 되는 것으로서 학습자의 역동적인 활동을 통해서 학습자 스스로 수학적 개념을 점차적으로 구성해 나아가도록 한다는 것이다(김응태·박한식·우정호, 1992).

Vygotsky는 학생들이 서로 보완하는 학습 환경 내에서 활동을 협동적으로 할 때와 그들이 교사로부터 적절한 안내를 받을 때에 가장 효과적인 교수가 이루어진다고 주장한다. 각 아동의 발달 수준은 교사가 특징이 분명한 물리적 모델로 제공되는 도움 또는 역동적인 지원에 힘입어서 효과적으로 종사할 수 있는 과제의 범위를 시사해 주고 있다(이상하, 1998).

Freudenthal은 실재적인 수학교육의 근원으로써, 수학을 활동으로써 해석하고 있다(Freudenthal, 1973). Freudenthal은 수학자- 순수수학자이든 응용수학자이든 관계없이-들의 활동이 학습의 출발점이었다. 그는 수학적인 활동이라는 것은 현실 속에서 문제를 찾고, 해결하고, 문제를 구성하는 활동

이라고 성격을 부여하였다. Freudenthal 에 따르면, 여기서 중요한 활동은 조직화하고 수학화하는 것이다. Freudenthal 은 '수학화'라는 단어를 단순하게 일상적인 문제상황을 수학적인 개념으로 개조하는 과정을 지시하는 것보다는 더 폭넓은 관념을 가지고 있다고 본다. Freudenthal 의 관점에서, 수학화는 수학학습에서 수준의 향상과 관련이 있다. 이러한 수준의 향상에 대한 아이디어는 수학 학습에서 Freudenthal 이 주장하는 이론의 핵심이 되고 있다. 어느 한 수준에서 활동은 다음 수준에서의 해석을 제시하여 준다. 어느 한 수준에서의 조작적인 문제는 다음 수준에서는 당면문제가 된다고 보고 있다(Gravemeijer, 1994).

학습과정에 대한 차등화 방안들 중의 하나로써 학습자들에게 제시하는 활동 중심 학습과제의 다양화를 통한 차별적 접근을 교과서나 다양한 참고도서에서 살펴볼 수 있다. 그러나, 이러한 활동중심의 과제들이 학습주제나 내용과는 부합되지 않고, 일회성 흥미위주로 구성되어져 있는 경우가 많이 있다. 따라서, 개인차를 고려한 교과서에서는 학습자들의 인지적 특성, 재능, 흥미를 고려하여 활동이 구체적으로 제시되어지고, 구체적인 활동내용들이 내용면이나 수준면에서 교과서 본문의 학습내용과 체계적으로 연결되어 제시되어야 한다.

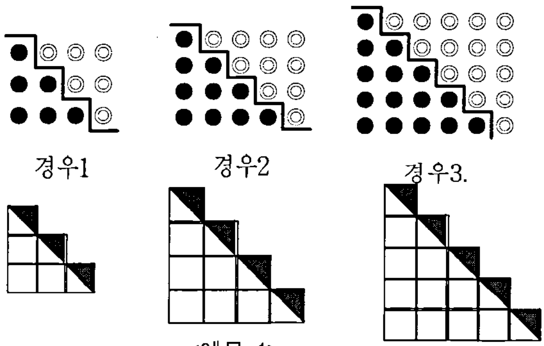
본 연구에서는 구체적인 활동중심의 차등화로서 현장 적용을 바탕으로 하여 다음 세 가지 수준으로 설정하였다. 첫 번째 수준은 구체물을 구성해 가는 수준이다. 이 수준에서는 학습주제와 관련하여 교사에 의해서 주어진 구체물을 직접 제작하면서 다루어보는 수준이다. 학생들이 구체물에 담겨져 있는 수학적인 원리를 알 수는 없지만 행동을 통해 직접 다루어봄으로써 직관적인 개념 형성을 만들어 가는 단계이다. 이 수준은 실제 활동이 중심이 되는 수준이다. 두 번째 수준은 구체물을 조작하는 수준이다. 완성되어져 있는 구체물이나 자신이 직접 구성한 구체물 속에 담겨져 있는 수학적인 의미를 파악하는 단계이다. 이 때, 구체물이 한 가지 형태가 아닌 다양한 형태로 제시되어지는 것이 타당하다. 이해가 빠른 학생은 한 두 가지 예를 통해 일반화가 가능하지만 그렇지 못한 학생은 더 많은 예를 조작하게 함으로써 일반화할 수 있는 능력이 생기게 된다. 이 수준은 실제활동과 사고활동이 모두 중심이 되는 수준이다. 세 번째 수준은 사고활동의 수준이다. 직접적인 경험없이 논증에 의해서 수학적인 의미가 파악되어지는 수준이다.

수열의 합을 흥미롭게 구하는 방법에 대해서는 여러 가지로 제시하고 있다(Nelsen, 1993). 여기서는 앞에서 제시한 이러한 세 가지 수준을 바탕으로 수열의 합을 구하는 구체적인 예를 다음과 같이 제시할 수 있다.

예시1) 제 1수준

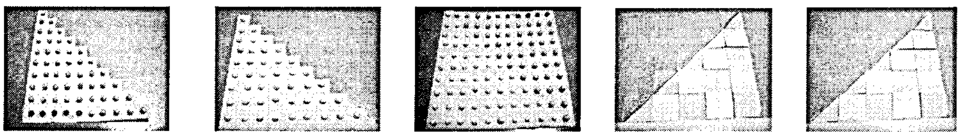
주제 : 자연수의 합을 구하는 것.

활동과제 : 아래 그림과 같은 모형을 조별로 직접 제작하여 만든 모형을 전시해 보자.



<예문 1>

활동결과물.



<예문 2>

예시2) 제 2수준

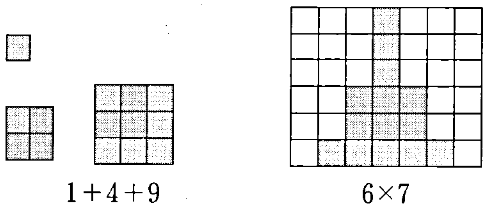
주제 : 자연수의 제곱의 합을 구하는 것.

활동과제 : 아래 활동을 통해 알 수 있는 수학적인 사실을 발표해 보자.

경우1. 아래의 왼쪽 그림의 사각형의 개수와 오른쪽 그림에 있는 사각형의 개수를 비교해서 알 수 있는 사실을 토론해 보자.

<예문 3>

경우2. 왼쪽 그림의 사각형의 개수와 오른쪽 그림에 있는 사각형의 개수를 비교해서 알 수 있는 사실을 토론해 보자.



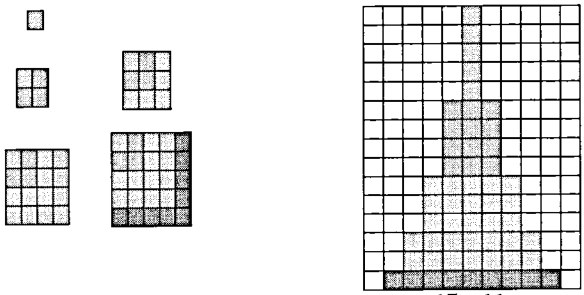
<예문 4>

경우3. 왼쪽 그림의 사각형의 개수와 오른쪽 그림에 있는 사각형의 개수를 비교해 토론해 보자.

$1+4+9+16$ 10×9

<예문 5>

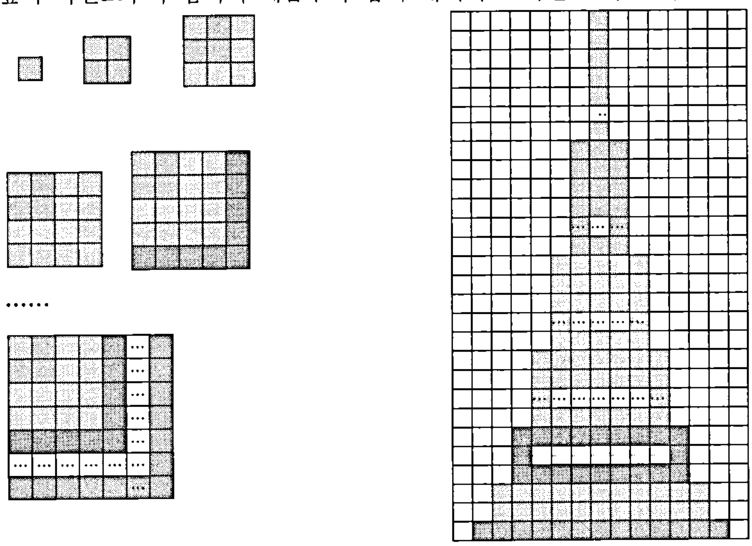
경우4. 왼쪽 그림의 사각형의 개수와 오른쪽 그림에 있는 사각형의 개수를 비교해 토론해 보자.



$1+4+9+16+25$ 15×11

<예문 6>

경우5. 앞의 사실로부터 임의의 제곱수의 합에 대해서는 어떤 결과를 가질 것인지 추론해 보자.



$1+4+9+16+25+\cdots+n^2$ $(1+2+\cdots+n)\times(2n+1)$

<예문 7>

예시3) 제 3수준

주제 : 자연수의 세제곱의 합을 구하는 것.

활동과제 : 조별로 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$을 이용하거나 다른 방법을 이용하여 $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$을 가짐을 확인하여라.

IV. 교과서 본문을 통한 차등화

본문의 차등화에 대한 이론적인 기초로서 우리는 Gusev의 실험교과서를 기초로 하여 제시하고자 한다. 본 연구에서는 Gusev의 실험교과서의 형식을 토대로 하여 우리나라의 실정에 맞게 수정 및 보완하여 교과서 본문의 차등화에 대한 새로운 방법을 제시하고자 한다. 그의 교과서에서처럼 우리는 해당학년의 수학과정에서 학생에게 필수적인 이론적 내용들은 아래의 <예문8>에서와 같이 본문의 왼쪽에 선을 긋도록 한다(Gusev, 1995). 이 부분은 수준별 차등화에서 가장 중요한 부분중의 하나인 필수적인 학습 내용의 양과 수준을 규정하고 있는 것이다.

한편, 수학에 대한 깊이 있는 공부를 하거나 해당 수학적인 내용의 활용에 관련된 내용들이 본문의 나머지 부분에 제시되어져 있다.(즉, 옆줄이 그어져 있지 않은 본문) 이 부분은 일부 학생은 단순히 읽어갈 수도 있고, 일부 학생은 거기에 제시된 과제들을 해결하려고 시도하고, 기술된 책이나 논문들을 찾아 읽을 수도 있을 것이다. 물론, 이 부분에서는 학생들의 흥미, 가능성, 재능에 상응하여 심화된 이론적인 학습자료를 제공하게 된다.(한인기, 2004)

수열의 합 $\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n$ 을 구하여라.

위의 수열은 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열이므로 아래와 같은 방법에 의해서 다음과 같다.

[공식1] $\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

□ 증명)

$$\begin{array}{rcl}
1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n & = & \sum_{k=1}^{n} k \\
n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1 & = & \sum_{k=1}^{n} k \\
\hline
(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1) & = & 2\sum_{k=1}^{n} k \\
\sum_{k=1}^{n} k & = & \frac{n(n+1)}{2}
\end{array}$$

따라서, $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$ **이 성립한다. 증명끝. ■**

이제, 위의 공식을 이용한 수학적인 예를 살펴보자. 첫째 항이 1이고, 공차 d가 각각 1, 2, 3, 4, 5, 6인 등차수열이 다음과 같이 만들 수 있다.

……

이처럼 첫째항이 1이고 일정하게 증가하는 수열들의 각각을 1차도형수 또는 선형도형수라고 한다.

<예문 8>

또한, 우리는 Gusev의 연구를 바탕으로 하여 교과서 본문에서 공식에 해당하는 것은 내용 앞에 [공식#]을 표시하는데, #은 공식의 순차적인 일련번호이다. 물론 이 경우에도 필수적인 학습내용인 경우에는 좌측에 선을 그어서 표시를 하도록 한다.

[공식3] $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(n-1)^2+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

<예문 9>

그리고, 제시되어져 있는 문장 중에서 중심적인 수학적 생각을 나타내기 위해서는 [핵심]을 함께 제시할 것이다. [핵심]과 함께 제시된 내용은 해당 단원이나 전체 수학과정의 학습에 있어서 중요한 역할을 하는 내용이다. 다음으로 정의에 해당하는 것은 [정의#]으로 나타내도록 한다.

이제 1차도형수로부터 새로운 수열을 만들어보자.
[핵심] 새로운 수열의 첫 번째 항은 1차도형수의 첫 번째항과 같고, 새로운 수열의 두 번째 항은 1차도형수의 첫 번째항과 두 번째 항과의 합이다. 즉, 새로운 수열의 n번째 항은 1차도형수의 첫 번째 항부터 n번째 항까지의 합과 같다. 이러한 수열을 만들어 보자.

[정의2] 1차도형수로부터 위와 같은 방법으로 얻어지는 새로운 수열 각각을 2차도형수, 평방도형수라고 부른다.

<예문 10>

마지막으로, 증명이 함께 제시되어져 있는 정리의 경우에는 [정리#]으로 나타내도록 한다. 만약에 증명이 없는 정리의 경우에는 [정리#]을 표시하지 않는다. 그리고, 이론적 내용의 기술에서 발생하는 다양한 물음이나 심도있는 문제들을 표시하기 위해서 우리는 [궁금증]이라는 표현을 사용하도록 한다.

지금까지 1차도형수로부터 2차도형수를 만들어 보았다.
앞에서 만든 첫 번째 수열은 1,3,6,10,15··· 라는 수열을 만드는데, 우리는 이 수들을 삼각수라고 부른다. 두 번째 수열인 1,4,9,16,25··· 라는 수열을 만드는데 우리는 이 수를 사각수라고 부른다. 세 번째 수열 1,5,12,22,35···은 오각수라고 부른다. 1,6,15,28,45··· 라는 수열은 육각수라고 부른다.

[궁금증] 위의 수열을 삼각수, 사각수, 오각수, 육각수라고 부르는 이유가 무엇일까?

[정리1] 삼각수를 n번째 삼각수를 T_n이라 하고, n번째 사각수를 S_n이라고 하면 $8T_n+1=S_{2n+1}$ 이다.

(증명) $T_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $S_n=n^2$ 이다. 따라서, $S_{2n+1}=(2n+1)^2$

$$\begin{aligned} 8T_n+1 &= 8\times\frac{n(n+1)}{2}+1=4n(n+1)+1 \\ &= 4n^2+4n+1=(2n+1)^2=S_{2n+1} \end{aligned}$$

<예문 11>

지금까지 제시한 내용들은 본문과 마찬가지로 [공식#], [정의#], [정리#], [궁금증], [핵심]의 내용에서도 필수적인 학습내용인 경우에는 왼쪽에 줄을 그어 구별하여 제시하여 주어야 한다.

결론적으로, 최소 필수 수준에 해당하는 이론적 내용을 교과서에 명확히 구분되어 표시되었기 때문에 교사가 이를 고려하여 수준별 차등화를 고려한 수학교육을 진행할 수 있으며, 수열 단원에서의 깊이 있는 이해나 활용에 관련된 심화된 내용도 함께 제시하여 교사가 다양한 수준의 수업을 운영할 수 있도록 배려하도록 할 수 있다.

V. 연습문제를 통한 차등화

일반적으로 많은 양의 문제가 교과서에 제시되어져 있다. 본 연구의 연습문제의 차등화에서는 Gusev가 제시한 방법을 기초로 하여 우리나라의 현실에 부합하도록 수정 및 보완하여 다음과 같이 교과서 문제를 여섯 가지 수준으로 구분하여 차등화하였다.

교과서의 연습문제들은 그 수준과 성격에 따라 다음 여섯 가지로 나눌 수 있다. 다음과 같은 유형의 충분한 양의 문제들이 수준별로 구성하여 학생들이 자신의 수준에 맞게 학습할 수 있도록 하는 것이 개인차를 고려한 교과서가 갖추어야할 필수적인 요소라고 생각되어진다.

첫째, 종합적인 연습문제이다. 이러한 유형의 문제의 경우는 연습문제를 통해, 결론을 도출하는 것, 문제의 조건들로부터 결론을 유도하는 것을 배우게 된다. 종합적인 연습문제는 기호로 [종합]이라고 나타내도록 한다.

둘째, 분석적인 연습문제이다. 이러한 유형의 연습문제는 자기조절 및 자기통제를 위해 제시된 좀 더 어려운 문제이다. 이들 문제에서는 문제의 조건으로부터 결론을 얻는 것 뿐 만 아니라 그러한 결론의 도출에 대한 원인을 설명해야 한다. 분석적인 연습문제는 [분석]이라고 표현한다.

[종합] 1. 다음 수식의 값을 구하여라.
$11^3+12^3+13^3+\cdots+20^3$
[종합] 2. 다음 식을 간단히 하여라.
(1) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ **(2)** $\sum_{k=1}^{n} k^2(k-2)$

<예문 12>

[분석] 1. $2^{n-1}(2^n-1)$**과 같이 나타내어지는 수는 이차도형수 중에서도 육각수임을 증명하여라.**
[분석] 2. $1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)$ **의 값은?**
[분석] 3. 집합 $S=\{1^3, 2^3, 3^3, \cdots, n^3\}$ **이 있다. 이 때, 집합 S의 모든 부분집합들에 들어 있는 모든 원소들의 총합은** $2^{\alpha}(n^2+n)^{\beta}$**이다. 이때,** $\alpha+\beta$ **의 값은 ?**

<예문 13>

셋째, 표준적인 연습문제이다. 수열의 학습에서 학습 부진아로 남지 않으려면 풀 수 있어야 하는 수준의 문제이다. 즉, 교육과정에서 제시된 최소필수학습요소에 해당하는 교육을 의미한다. 가장 평이한 문제를 해결하는 능력 등을 필요로 한다. 즉, 표준문제는 부진아를 대상으로 하는 교육에서 이들이 도달해야 하는 최소필수 수준의 목표점이라고 본다. 표준적인 연습문제는 [표준]라고 표현한다.

[표준] 1. 다음 값을 계산하여라.
$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$
[표준] 2. $2+4+6+\cdots+2n$ **의 값을 구하여라.**
[표준] 3. $2+4+6+\cdots+40=\sum_{k=1}^{\square}(\quad)$ **에서 □와 ( ) 에 들어갈 수식을 구하면?**

<예문 14>

넷째, 가장 기본이 되는 연습문제이다. 학교나 가정에서 학생들이 해결해야 하는 가장 일반적인 유형의 문제이다. 이들 문제를 통해 교과서에 제시된 기본적인 학습내용을 확실히 이해할 수 있다. 이 유형은 일반학생이 수학을 공부하면서 푸는 평이한 수준의 대부분의 문제이다. 기본이 되는 연습문제는 [기본]이라고 표현한다.

[기본] 1. 다음 제 n**항가지의 합** S_n**을 구하여라.**
$S_n=1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots+n(2n+1)$

[기본] 2. 다음 수열에서 $\frac{3}{15}$는 몇 번째 항인가?

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \cdots$$

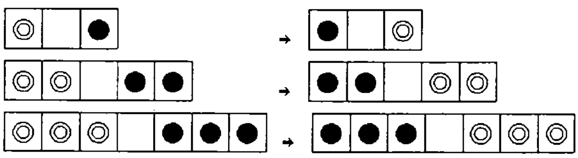
<예문 15>

다섯째, 창의적인 연습문제이다. 정형적인 방법으로는 문제가 해결되지 않으며 문제해결을 위해서는 어떤 수학적인 아이디어를 발명해야 하는 연습문제이다. 창의적인 문제에 있어서 난이도는 수학적인 아이디어의 수준에 의해서 좌우되어지므로 창의적인 수준의 문제는 학교수학에서 난이도 높은 수학문제이다. 창의적인 연습문제는 [심화]라고 표현한다.

[심화] 1. 1부터 1000000000 까지의 수에 사용된 각각의 숫자의 총합을 등차수열의 합을 구하는 것처럼 아주 간단하게 구하여 보아라. 수 그 자체가 의미있는 것이 아니라 사용된 각각의 자리에 위치한 숫자들의 합을 구하는 것이다.(예를들면, 2471은 2+4+7+1=14가 된다.)
[심화] 2. 2, 4, 6, 8, 10 이 있다. 이 때, 이들 중 연속하지 않는 서로 다른 두 짝수끼리의 곱의 합은 얼마인가?
[심화] 3. $28=1^3+3^3$, $496=1^3+3^3+5^3+7^3$ **과 같이 완전수가 홀수의 세제곱의 합으로 표현된다. 그럼, 8128은 어떻게 표현되어지는가?**

<예문 16>

[탐구] 1. 아래의 왼쪽 그림들과 같이 흰색 돌과 검은 색 돌이 배치되어져 있는데, 돌을 다음 두가지 규칙으로 이동하여 오른쪽 그림과 같이 바꾸고자 한다.
첫째, 돌의 인접한 곳에 빈 칸이 있을 때, 빈 칸으로 한 개의 돌을 이동할 수 있다.
둘째, 한 개의 돌을 건너뛰어 빈칸으로 돌을 이동시킬 수 있다.(두개의 돌을 건너뛸 수는 없다.)



1) 위 각각의 경우에서 돌을 이동하는 방법을 설명하고, 이동의 최소회수를 구하여라.
2) 만약 100개(n개)의 흰색 돌과 100개(n개)의 검은 색 돌이 좌우에 배열되어져 있다면, 위치를 바꾸기 위해 이동해야 하는 최소한의 횟수를 구하는 방법을 설명하여라.

<예문 17>

여섯째, 탐구 과제적인 연습문제이다. 이러한 문제의 해결을 위해서는 몇 몇 단원에서 배운 내용에 대한 종합적인 지식을 바탕으로 하며, 마치 수학자와 같은 진지한 탐구활동이 필요하다. 이들 문제는 수업시간에는 다루어지지 않고, 개인과제 시간이나 가정에서 숙제로 제시되어진다. <예문 17>과 같이 탐구 과제적인 연습문제는 [탐구]라고 표현한다.

VI. 결 론

본 연구는 7차 교육과정 이후 새로운 교육과정에 대한 새 교과서가 갖추어야 할 가장 중요한 조건이 수준별이라고 보고, 현재 우리나라의 수학교육의 발전을 위한 한 방법으로서 수준차를 고려한 수학교과서 구현을 위한 문헌연구이다. 이 연구를 위해서 러시아의 Gusev의 실험용교과서에 대한 한 인기의 분석을 기초로 하여 수열단원을 중심으로 우리나라 교과서에서의 실현가능성에 대해 구체적으로 적용하여 보았다.

본 연구에서는 개인차를 고려한 수학교과서가 갖추어야 할 기본적인 요건으로 지금까지의 선행연구와 교육과정을 바탕으로 세 가지를 제시하였다. 첫 번째 구성요소는 구체적인 조작물에 의한 활동중심을 통한 차등화, 두 번째 구성요소로는 교과서 본문을 통한 차등화, 세 번째 구성요소로 연습문제의 다양한 제시를 통한 차등화로 나누어 구체적으로 고찰해 보았다.

첫 번째, 구체적인 조작물에 의한 활동중심을 통한 차등화에서는 세 가지 수준을 설정하였다. 제 1수준은 구체물을 구성해 가는 수준으로 교사에 의해서 주어진 구체물을 직접 제작하면서 다루어 보는 수준이다. 학생들이 구체물에 담겨져 있는 수학적인 원리를 알 수는 없지만 행동을 통해 직접 다루어봄으로써 직관적인 개념 형성을 만들어 가는 단계이다. 제 2수준은 구체물을 조작하는 수준이다. 완성되어진 구체물이나 자신이 직접 구성한 구체물 속에 담겨져 있는 수학적인 의미를 파악하는 수준이다. 세 번째 수준은 사고활동의 수준이다. 직접적인 경험없이 논증에 의해서 수학적인 의미가 파악되어지는 수준이다.

두 번째, 교과서 본문을 통한 차등화에서는 필수적인 학습내용과 심화, 보충적인 학습내용을 구분하기 위해서 본문의 왼쪽에 선을 그어서 구분하였고, 분문에서 [공식#], [정의#], [정리#], [궁금증], [핵심]의 내용으로 세분화하여 중요한 수학적인 원리나 개념을 명료하게 구분하여 제시하도록 하였다.

세 번째, 연습문제의 다양한 제시를 통한 차등화에서는 충분히 많은 양과 다양한 수준으로 구분된 여섯 가지 유형의 연습문제를 제시하여 개인차를 고려하도록 제시하였다. 사고의 가장 기본이 되는 분석과 종합과 관련된 유형과 반드시 학습하여야 하는 최소한의 학습수준과 관련된 표준문제, 수업시간이나 자습을 통해서 가장 일반적으로 다루어지는 기본문제, 정형적인 방법으로는 문제가 해결되지 않으며 문제해결을 위해서는 어떤 수학적인 아이디어를 발명해야 하는 심화문제, 마지막으로 앞단원에서 배운 내용에 대한 종합적인 지식을 바탕으로 하며, 마치 수학자와 같이 진지한 탐구활동이

요구되어지는 탐구문제로 구분하였다.

이와 같은 다양한 방법을 통한 차등화는 개인차를 고려한 수업을 학교현장에서 교사가 실시할 수 있는 현실적인 도움을 줄 수 있을 뿐만 아니라 교사의 실질적인 선택의 폭을 확대시켜 줌으로서 수준별 수업의 실현 가능성을 더 높여 줄 수 있을 것으로 기대되어진다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정, 서울 : 대한교과서주식회사.

김홍기 (2001). 제7차 교육과정과 교과서의 문제점, 한국수학교육수학회지 시리즈 A <수학교육> **40(1)**, 서울 : 한국수학교육학회.

박영배 (1996). 수학 교수·학습의 구성주의적 전개에 관한 연구, 서울대학교 박사학위논문.

박한식·김응태·우정호 (1992). 수학교육학개론, 서울 : 서울대학교출판부.

서보억·신현용·전평국 (1995). 한·소 수학교육과정 비교 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **34(2)**, 서울 : 한국수학교육학회.

이상하 (1998). 근접발달영역과 수학성취도의 관계 연구, 한국교원대학교 석사학위 논문.

양미경 (1998). 교과서 구성의 문제와 발전과제, 교육과정연구 **16권 제1호**.

조영미 (2001). 학교수학에 제시된 정의에 관한 연구, 서울대학교 박사학위 논문.

한인기 (2004). 학습자의 개인차를 고려한 수학교과서에 관한 연구, 한국학교수학회논문집 **제7권, 제1호**, 충남 : 한국학교수학회.

황혜정·임재훈 (1998). 구성주의가 수학교과용 도서에 주는 시사, 1998년도 추계수학교육과연구발표대회논문집.

Freudenthal H. (1973). *Mathematics As an Educational Task*, Dordrecht-Holland : Reidel Pubishing Company.

Gravemeijer K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*, Culemborg : Technipress.

Gusev V. A. (1995). 기하학-6. 모스크바 : 아반가르드.

Krutetskii V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, Chicago : The university of Chicago press.

Nelsen R. B. (1993). *Proofs without words*, Washington : MAA Service Center.