韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 19집 제 1호, 2005. 1. 167-189

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 19, No. 1, Jan. 2005. 167-189

초등 영재교육에 적용 가능한 이산수학 프로그램 개발 연구

최 근 배 (제주교육대학교)
안 선 영 (사계초등학교)

본고에서는 영재교육에서 실제 학습자료의 부족과 이산수학의 중요성이 부각되고 있는 최근의 동향을 감안하여, 초등학교 영재교육에 적용 가능한 이산수학 프로그램을 개발하고자 한다. 우선 프로그램의 개발에 선행하여 관련 이론에 대한 고찰을 하였으며 제 7차 초등학교 수학과 교육과정의 이산수학 관련 내용을 분석하여 교육과정의 내용을 심화·발전할 수 있는 방안에 초점을 두었다. 특히 이산수학과 관련된 기존의 수학학습 프로그램들은 대부분 순수 수학적 이론을 제시하고 그에 따른 문제를 풀어보는 형식으로 구성되어 있는데, 본고에서는 이산수학의 이론을 중심으로, 문제해결에서 알고리즘적으로 사고하는 능력을 키울 수 있도록 하는 것에 초점을 두어 프로그램을 개발하고자 한다. 즉, 프로그램 자체가 하나의 수학적 원리를 탐구해 가는 과정이 되는 것이다. 또한 이산수학이 수학적 문제해결 학습과 연관됨에 착안하여 프로그램은 Polya의 문제해결학습을 바탕으로 구성하고자 한다.

I. 서 론

21세기 정보화 사회에서는 교육을 통하여 창의력과 문제해결력, 그리고 단순한 지식의 습득이 아닌 새로운 지식의 창출을 요구하고 있다. 뿐만 아니라 학습자 개개인이, 자신이 가진 능력을 최대한 발휘하고 그것을 통하여 자아실현을 이룩하는 것을 교육의 목표로 삼고 있다. 이러한 측면에서 오늘날 영재교육의 중요성이 부각되고 있으며, 영재교육은 개인의 능력 실현뿐만 아니라 국가 경쟁력의 차원에서도 주목받고 있다.

이에 우리나라에서도 국가차원에서 영재교육의 중요성을 인식하여 제도적으로 영재교육 진흥법이라는 법적인 장치(법률 제6215호)를 마련하였고, 대학교, 교육청 등에서 영재교육센터 등을 운영하고 있으며, 2003년부터는 각 시·도 교육청에서 5, 6학년을 대상으로 한 영재학급을 설립하여 운영하는 노력 또한 보이고 있다. 하지만 이러한 노력에도 불구하고 이제까지 우리나라에서 발표되고 있는 영재 교육에 관한 연구결과들을 살펴보면 영재교육에 관한 이론적인 내용의 연구가 대부분이고 실제 운영 프로그램이나 학교현장에서 직접 활용할 수 있는 구체적인 영재 학습 프로그램은 그 양이 많지 않다(고길철, 2004). 송상헌(1999)도 우리나라 영재 교육의 활성화를 위해 가장 시급히 해결해야 할 일에 대한 조사에서 교수나 현장교사 모두가 실제로 수업에 적용할 수 있는 학습자료의 개발을 제 1 순위로 꼽고 있다고 그의 연구에서 밝히고 있다.

그렇다면 초등영재교육을 위한 학습자료는 무엇을 주제로, 어떻게 구성해야 할 것인가?

오늘날은 지식의 변화속도가 과거 산업사회와는 비교가 되지 않을 정도로 빠르며 단순히 알고 있

는 것만으로는 변화하는 사회에서의 문제에 적응하고 그것을 해결하는 것이 어려운 실정이다. 이러한 사회적 흐름의 변화요인 중의 하나로 컴퓨터의 보급과 인터넷의 확산을 들 수 있다. 그리고 이러한 시대적 흐름의 변화는 교육의 변화에도 영향을 미쳤다. 과거 산업사회에서는 미분, 적분 등과 같은 연속수학을 중요시하였고 그 결과 연속수학 중심의 교육이 이루어졌다. 그러나 오늘날의 정보화 사회에서는 컴퓨터를 통하여 대량의 정보가 유통되고 있다. 또한 이들 컴퓨터는 이산수학적 개념을 통하여 자료가 입출력되고 모델링되어 처리되는 특성이 있다. 즉, 이산수학의 개념 및 알고리즘을 모르고서는 비연속적인 자료들을 주로 다루는 오늘날의 정보화 사회에서 정보를 처리하는 것에 한계가 있다. 이러한 시대적 조류에 힘입어 교육과정에서도 그 변화를 실감할 수 있다.

NCTM의 Standard(1989)에서는 이산수학의 교육적 가치를 대수, 기하, 미적분 등과 같은 수준으로 평가하고 있으며, 대학 진학을 희망하는 학생들뿐만 아니라 모든 학생들에게 이산수학을 가르칠 것을 권장하고 있다. 이에 대해 Hart(1991)는 그 이유를 다음과 같이 들고 있다.

첫째, 수학에 생동감이 있기 때문이다. 학생들은 수학에서 전혀 새로운 것을 발견할 수 없다고 여기고 있다. 하지만 이산수학의 많은 주제들은 새롭고 흥미로운 것들이며 수학적 배경이 거의 없는 학생들도 배울 수 있어 이런 문제점을 극복하고 교실 수업에서 학생들에게 수학의 활력과 흥미를 불어넣을 수 있다.

둘째, 이산수학은 문제해결에서 알고리즘적으로 사고하는 능력을 키울 수 있으며, 새로운 수학적 모델링을 풍부하게 제시하기 때문이다.

셋째, 이산수학은 상업, 산업, 정치에서 폭넓게 사용되기 때문이다. 예를 들어 그래프 이론은 최단 시간에 큰 프로젝트의 모든 부분업무의 계획을 짜는데 사용된다.

넷째, 이산수학은 전통적인 교육과정을 보충하며 향상시키고 수학 교육과정을 폭넓고 풍부하게 하기 때문이다. 예를 들어 그래프 이론에서는 기하에서의 다각형과 다면체를 더 풍부하게 다룬다.

이상에서 오늘날의 사회적 흐름과 NCTM의 Standard(1989)에 나타난 이산수학의 교육적 가치를 살펴보았는데, 이를 통하여 이산수학의 중요성을 짐작할 수 있다.

그리고 이러한 변화에 부응하여 우리나라의 제 7차 수학과 교육과정에서도 이산수학을 고등학교 과정의 심화 선택과목으로 포함시켜 가르치고 있으며 최근의 몇몇 연구에서도 새롭게 주목받고 있는 이산수학에 대한 논의가 이루어지고 있다. 그러나 이러한 교육과정이나 연구들이 아직은 중등중심의 것이 대부분이고 초등학교에 적용할 만한 것은 그 수가 제한되어있어 초등교육에 적용 가능한 연구가 절실히 필요한 때이다.

현재 우리나라의 영재교육은 이론적인 기반은 마련되어 있으나 아직 실질적인 학습 프로그램은 부족한 실정이다. 이러한 시점에서 영재교육 학습 프로그램의 주제를 NCTM의 Standard(1989)에서도 이미 그 가치를 언급하고 있으며, 오늘날의 사회적 흐름을 통해 그 중요성이 점차 대두되고 있는, 이산수학으로 선정하여도 부족함이 없을 것이다.

본 연구에서는 영재교육에서의 학습자료의 부족과 이산수학의 중요성이 부각되고 있는 최근의 동향을 감안하여, 초등학교 영재교육에 적용 가능한 이산수학 프로그램을 개발하는데 그 목적이 있다.

이산수학과 관련된 기존의 수학학습 프로그램들은 대부분 순수 수학적 이론을 제시하고 그에 따른 문제를 풀어보는 형식으로 구성되어 있는데, 본 연구에서는 이산수학의 이론을 중심으로, 문제해결에서 알고리즘적으로 사고하는 능력을 키울 수 있도록 하는 것에 초점을 두어 프로그램을 개발하고자 한다. 즉, 프로그램 자체가 하나의 수학적 원리를 탐구해 가는 과정이 되는 것이다. 또한 이산수학이 수학적 문제해결 학습과 연관됨에 착안하여 프로그램은 Polya의 문제해결학습을 바탕으로 구성하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 영재의 정의와 특성

영재교육을 위한 학습자료를 개발하기 위하여서는 우선 영재의 정의와 그들의 특성을 알아야 한다. 하지만 어떤 아동을 영재로 볼 것이며 그들에게 나타나는 특성이 어떠하다라는 데에는 학자나 기관마다 의견이 다르며, 사회의 가치관과 시대의 흐름에 따라서도 다르게 나타나고 있다. 여기에서는 가장 대표적인 정의로 받아들여지고 있는 1972년 미국 교육부의 정의와 Renzulli의 정의를 살펴보고, NCTM(1989)에서 제시한 수학영재들의 특성과 남승인(1998)이 제시한 영재의 특성을 살펴보도록 하겠다.

가. 영재의 정의

1972년 미국 교육부(강수경, 2004, 재인용)에 의하면, 영재는 전문가에 의하여 뛰어난 능력으로 인하여 훌륭한 성취를 할 것으로 보이는 사람으로 판별된, 자신과 사회에 기여할 수 있도록 하기 위해서 정규학교 프로그램 이상의 변별적 교육 프로그램과 서비스를 필요로 하는, 다음[1]의 한 분야 또는 여러 분야에서 이미 성취를 나타내거나 잠재 능력이 있는 아동들로 정의하고 있다. 또한 Renzulli(고길철, 2004, 재인용)는 역사적으로 기록에 남을 만한 업적을 남긴 사람들에 관한 다양한 문헌을 분석하여, 영재성은 세 가지의 심리적인 특성들, 즉, 평균이상의 능력, 높은 수준의 과제집착력, 높은 수준의 창의성이 역동적으로 상호 작용하여 나타나는 능력이라고 정의하였다. 고도의 일반적인 지적 능력, 창의성, 과제집착력이라는 세 가지 요인이 개인의 인성과 주변 환경의 영향을 받아 특정 분야에서 특출한 과업 수행을 해 낼 수 있는 역량과 그 가능성이라고 정의한다.[2] 특히, Renzulli는 영재

1) 일반지능(General Intellectual Ability), 특수 학문 적성(Specific Academic Aptitude), 창의적 또는 생산적 사고(Creative and Productive Thinking), 지도력(Leadership Ability), 시각적 공연 예술(Visual and Performing Art), 정신운동 능력(Psychomotor Ability).

가 될 가능성이 높은 준거로는 이러한 심리적 특성들이 각각 85% 이상이면서 적어도 한 가지 이상의 특성에서는 98%이상 일 때, 뛰어난 성취를 이루게 될 것이라고 밝히고 있다. 이러한 영재성의 결정요인 준거에 따르면 일반학생의 15~20%가 영재로 성장할 가능성이 있는 아동으로 영재교육의 대상이 되어야 한다고 주장하고 있다.

이러한 여러 정의를 살펴볼 때, 본 연구에서는 수학영재를 수학 영역에서 평균이상의 능력을 보이고 강한 과제 집착력과 창의력 및 수학적 의사소통능력 등의 수학적 잠재능력을 지닌 아동이라고 정의하도록 하겠다.

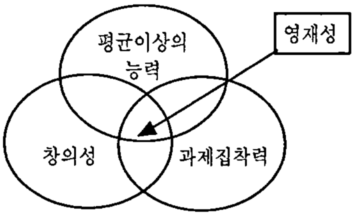
나. 수학영재의 특성

NCTM(1989)에서는 영재들의 행동특성을 크게 일반적 행동 특성, 학습 행동 특성, 창의적 행동 특성, 수학적 행동 특성의 4가지로 나누고 각각의 특성을 <표 1>과 같이 나타내고 있다(고길철, 2004, 재인용). 그리고 남승인(1998)은 여러 학자들의 연구를 종합하여 수학적 영재아에 대한 특성을 다음과 같이 정리하고 있다.

- 제시된 어떤 활동을 선택해야 할 때 수학과 관련 있는 활동을 선택하는 경향이 있다.
- 전통적인 학습내용을 보다 빨리 숙달하며 동료에 비해 어린 나이에 이를 이루어 낸다.
- 학습한 내용을 새로운 상황에 적용시킬 수 있으며, 일반적 수준의 문제해결에서 적용되는 알고리즘을 빨리 일반화한다.
- 문제해결 과정에서 중간 단계를 생략하는 경향이 있으며 예상치 못한 방식으로 문제를 해결하는 경향이 있다.
- 문제를 보다 구체적인 자료의 활용에 의존하기보다 추상적으로 다루려는 경향과 그러한 능력을 가지고 있다.
- 규칙성과 관계를 발견하기를 즐기며, 이에 대해 성공적이고 그것을 설명하려 한다.
- 수학적인 추론 과정을 단축할 수 있고 또한 사고의 과정을 뒤바꿀 수도 있다.
- 기억력이 뛰어나며 수학적 사실이나 관계, 증명, 문제해결방법 등에 대한 기억을 장시간 유지할 수 있다.

---

2) Renzulli의 세 고리 모델



<표 1> NCTM(1989)에서 제시한 수학영재의 특성

구 분	수학영재의 행동 특성
일반적 행동 특성	1. 조기에 뛰어난 이해력과 풍부한 어휘력을 가지고 독서에 열중한다. 2. 시, 노래, 이야기 등을 빨리 기억한다. 3. 기본 기술 습득이 빠르다. 4. 공간 지각력이 뛰어나다. 5. 다른 사람들을 이끌고 조직하는 능력이 뛰어나다. 6. 올바르고 공정한 판단력을 가진다. 7. 통찰력이 뛰어나다. 8. 추상적인 것을 조작하는 능력이 우수하다. 9. 오랫동안 독립적으로 작업하고 집중하는 능력이 있다. 10. 자발적으로 계획을 시행하는 능력을 소유하고 있다. 11. 호기심이 많고 활동적인 학습자이다. 12. 어떤 일을 행할 때 새로운 것과 새로운 방법을 즐긴다. 13. 체계화를 잘하고 능률적이다.
학습 행동 특성	1. 지적 활동을 즐거워한다. 2. 관찰력이 예리하다. 3. 추상화, 개념화, 종합화하는 능력이 뛰어나다. 4. 원인과 결과의 관계에 대한 통찰력이 뛰어나다. 5. 주어진 문제에 대해 의문을 가지고 정보를 찾으며 다양한 수단을 사용한다. 6. 의문을 많이 가지고 비판적이며 가치를 검토한다. 7. 기초지식과 회상하는 능력이 뛰어나다. 8. 중요한 원리를 파악하고 일반화하는 능력이 뛰어나다. 9. 유사성과 차이점 그리고 예외적인 것에 대한 지각력이 뛰어나다. 10. 효과적으로 사고를 전환하는 능력이 뛰어나다.
창의적 행동 특성	1. 유창한 사고자 : 많은 가능성과 결과들을 인식하는 능력이 뛰어나다. 2. 유연한 사고자 : 대안적인 접근방법을 사용하는 능력이 뛰어나다. 3. 조직적 사고자 : 관계를 파악하는 능력이 뛰어나다. 4. 정교한 사고자 : 새로운 응답을 발견하는 능력이 뛰어나다. 5. 추측과 가설을 잘 세운다. 6. 고도의 호기심을 가진다. 7. 풍부한 지적 활동과 상상력이 뛰어나다. 8. 창의력이 풍부하다. 9. 심미적인 것에 예민하다. 10. 충동적이고 감정적으로 예민하다. 11. 가끔 판에 박힌 과업을 싫어한다.
수학적 행동 특성	1. 수에 대한 조기의 호기심과 이해력이 높다. 2. 수와 공간적 관계에 대한 논리적이고 상징적인 사고 능력이 뛰어나다. 3. 수학적 패턴, 구조, 관계, 그리고 연산에 대한 지각과 일반화하는 능력이 뛰어나다. 4. 분석적, 연역적, 귀납적으로 추론하는 능력이 뛰어나다. 5. 수학적 추론을 간략화하고, 합리적이고 경제적인 해를 찾는 능력이 뛰어나다. 6. 수학적 활동에서 지적 처리과정의 유연성과 가역성이 높다. 7. 수학적 기호, 관계, 증명, 풀이방법 등을 기억하는 능력이 뛰어나다. 8. 학습한 것을 새로운 상황에 적용하는 능력이 뛰어나다. 9. 수학적 문제를 풀이하는데 있어서의 활동력과 지속성이 뛰어나다. 10. 수학적 지각력이 뛰어나다.

- 자신이 흥미를 갖는 한 문제에 대해 장시간 집중할 수 있으며, 문제해결방법이 만족스럽지 않을 경우 그 대안을 빨리 찾는다.
- 이미 해결한 문제와 새로 해결해야 할 문제 사이의 관계를 보다 잘 파악하며 독창적인 문제에 대해 관심을 많이 가지고 그러한 문제해결을 즐긴다.
- 실생활이나 문제해결 장면에서 좀 더 독립적이고 자기 주도적 활동을 살 수 있다.
- 일찍 양에 대한 호기심을 가지며, 수학 퍼즐과 수학적 게임에 도전 의욕이 강하고 실제로 즐겨한다.

이상에서 영재의 정의와 특성과 관련된 몇몇 선행자료들을 살펴보았다. 이들 자료를 통하여 알아본 바에 의하면 어느 정도 속진된 학습 프로그램일지라도 영재아들의 학습능력에 비추어 볼 때, 충분히 학습이 가능하리라고 사료된다. 왜냐하면 속진 프로그램의 기준은 교육과정과의 관련성에서 기인한 것으로, 영재 개개인의 특성과 학습능력에 따라서는 속진 프로그램이 아니라 심화 프로그램의 성격을 갖게 된다고 볼 수 있기 때문이다.[3] 이에 본 연구에서 개발하고자 하는 초등영재교육을 위한 이산수학 프로그램도 어느 정도는 속진의 성격을 지니고 있다.

2. 이산수학의 소개와 제 7차 교육과정에 포함된 이산수학의 내용

가. 이산수학의 소개

이산(discrete)의 사전적 정의는 '따로따로 떨어진, 분리된, 별개의' 등으로 나타낼 수 있다. 따라서 이산수학(discrete mathematics)은 대부분의 해석학과 관련된 분야에 토대가 되는 연속수학(continuous mathematics)의 고전적인 개념과 대조되는 의미로서, 이산적인 대상을 이산적인 방법으로 다루는 수학의 한 분야로 정의할 수 있다. 즉, 이산구조와 그 관계의 해석과 관련된 수학 분야이다. 해석학의 주된 주제들은 수 체(number field)를 근거로 하는 반면, 이산수학의 주제들은 개별적이거나 양의 정수와 같은 수들의 집합을 주로 다룬다. 다시 말해서, 원소들의 개수를 셀 수 있는 집합(countable set)인 이산 집합 위에 정의된 수학적 체계에 대하여 연구하는 학문 분야를 이산수학이라 할 수 있다.[4] 이산수학은 수학분야뿐만 아니라 자연과학, 공학, 사회과학 등의 다양한 분야에 응용될 수 있다는 점에서 최근에 급속히 발전하고 있는 현대 수학의 한 분야이다.

3) 남승인(2004b)은 영재들에게 제공되는 프로그램이 심화 프로그램과 속진 프로그램인지를 명확히 구별하는 것은 어려운 일이라고 그의 연구에서 언급하였다. 또한 그는 영재에게 투입되어지는 속진 프로그램과 심화 프로그램의 분류하는 연구를 하였다.

4) 연속수학을 실수의 집합과 같은 비가산 집합에 관련짓고, 이산수학을 정수, 유리수와 같은 가산 집합 과 관련짓는 이분법적인 사고로 이산수학과 연속수학을 다르게 말하는 사람들도 있다(Bogart, 1991). 일반적으로 조합론, 그래프 이론, 기호논리학, 이산적 최적화, 암호론, 부울 대수학, 알고리즘 분석 등의 수학분야들이 이에 포함된다.

이산적인 대상과 유한과정의 절차를 다룬다는 의미에서 이산수학이 유한개의 원소를 갖는 집합과 체계의 수학적 성질을 연구하는 유한수학과 매우 유사한 것처럼 보이지만, 같은 주제에 대하여 다룰지라도 그들은 다르게 정의된다.[5]

이산수학은 옛날에는 수학적 게임 등에 숨어있는 수학으로서 흥미 추구 내지는 오락 정도에 그쳤지만, 20세기 후반 이후로 순수 및 응용 수학에서 대단히 중요한 위치를 점하고 있는바, 근년에 이산수학이 그토록 각광을 받게 된 데는 다음과 같은 중요한 두 가지 이유가 있다.

전 시대에는 자연현상을 연속적인 모델로 보았지만 컴퓨터의 지배를 받고 있는 오늘날에는 오히려 연속적인 현상마저도 이산적 모델로 분석한다. 지난 반세기 동안 컴퓨터가 대형 문제를 많이 해결했지만, 컴퓨터는 프로그램에 의하여 움직이고 프로그램은 이산적 알고리즘에 의하여 작성된다는 것이 그 첫째 이유이다. 옛날에 무심코 간과했던 교육적 측면이 이산수학 속에 들어있다는 것이 두 번째 이유이다. 이산수학은 정해진 틀을 따르기보다는 수학적 센스를 요구하는 경우가 많고, 보통의 수학문제도 이산적인 아이디어를 사용하면 쉽고 멋지게 풀리는 경우가 많다(황석근 외, 2001).

Dossey(1991)는 이산 수학의 세기에 관련되는 문제(계수(計數)문제) 상황을 다음과 같은 세 가지 범주로 나누어 생각하였다.

첫째, 주어진 문제의 해가 있느냐 없느냐를 다루는 존재성 문제(existence problem)

둘째, 해가 있다고 알려진 문제에 대하여 얼마나 많은 해가 존재하느냐하는 세기의 문제(counting problem)

셋째, 특별한 문제에 대한 최선의 해를 발견하는데 초점을 두는 최적화의 문제(optimization problem)

가 그것이다. 이런 문제들에 대한 해를 구하는 알고리즘의 개발과 분석이 이산 수학의 핵심이다.

NCTM(1989)은 고등학교 수학과 교육과정의 열 두 번째 규준으로 이산수학을 설정하고 있는데 그 구체적 내용은 다음과 같다.

첫째, 학생들은 유한그래프, 행렬, 수열과 재귀관계와 같은 이산 구조를 사용하여 문제 상황을 표현할 수 있어야 한다.

둘째, 행렬을 사용하여 유한 그래프를 표현하고 분석할 수 있어야 한다.

셋째, 알고리즘을 개발하고 분석할 수 있어야 한다.

넷째, 세기와 유한 확률 문제를 풀 수 있어야 한다.

다섯째, 대학 진학 학생들은 선형 프로그래밍과 계차방정식을 이용하여 문제를 표현하고 해결할 수 있어야 한다.

여섯째, 알고리즘의 응용과 컴퓨터 타당화 과정에서 생기는 문제 상황을 탐구할 수 있어야 한다.

---

5) 예를 들어, 유한수학은 그래프 이론과 계차방정식을 포함하지 않으며, 이산수학은 알고리즘적 방법을 특히 강조하고 있다(Bogart, 1991).

나. 제 7차 교육과정에 포함되어 있는 이산수학의 내용

우리나라에서는 이산수학이 제 7차 교육과정에서 고등학교 선택 과목으로 채택되었으며, 제 7차 교육과정에서의 이산수학에 대한 연구가 이지현(2002), 구경주(2003), 전민경(2003) 등에 의하여 이루어진바 있다. 특히 이지현(2002)은 제 7차 중학교 교육과정에 포함된 이산수학의 내용과 제 7차 고등학교 교육과정에 포함된 이산수학의 내용을 <표 2>와 <표 3>과 같이 나타내고 있다.

<표 2> 제 7차 고등학교 교육과정에 포함된 이산수학의 내용

구 분	영 역	내 용
10단계	수와 연산	집합의 포함관계, 집합의 연산법칙, 명제의 뜻과 역, 이, 대우, 필요조건, 충분조건
	확률과 통계	산포도와 표준편차
수학 I (선택)	행렬	행렬과 그 연산
	수열	등차수열, 등비수열, 여러 가지 수열, 수학적 귀납법, 알고리즘과 순서도
	확률과 통계	경우의 수, 순열, 조합, 이항정리, 확률의 뜻, 확률의 계산, 확률분포, 통계적 추정
확률과 통계 (선택)	자료의 정리와 요약	도수분포표와 히스토그램, 줄기와 잎 그림, 대표값, 산포도
	확률	확률의 뜻과 성질, 확률의 계산, 조건부 확률
	확률변수와 확률분포	이산확률변수, 이항분포

<표 3> 제 7차 중학교 교육과정에 포함된 이산수학의 내용

단 계	영 역	내 용
7-가	수와 연산	집합
7-나	확률과 통계	도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형, 도수분포표에서 평균 구하기, 상대도수, 누적도수
8-나	확률과 통계	확률의 뜻과 기본 성질, 확률의 계산
9-나	확률과 통계	상관도, 상관표, 상관관계

그리고 제 7차 초등학교 교육과정에 포함된 이산수학과 관련된 내용에 대한 전반적인 분석은 전민경(2003)[6]에 의해서 다음과 같은 주제를 중심으로 제시되었다.

- 체계적인 목록 만들기, 세기, 추론
- 그래프와 수형도를 사용한 이산수학적 모델링
- 반복되는 패턴과 진행

6) New Jersey의 교육과정인 K-2, 3-4, 5-6학년에서 배우는 이산수학 내용 규준과 활동 및 우리나라 제 7차 수학과 교육과정에서 초등학교 과정에서 다루어지고 있는 이산수학 내용과 관련한 문제들을 분석하였다. 그리고 제 6차 교육과정의 초등학교 과정에서도 어떠한 이산수학적 문제들이 있는지에 대해서 분석하였다.

- 정보를 조사 분석하고 조작하기
- 알고리즘 지시 목록을 고안하고 작성하기(실생활과 관련된 문제)

3. Polya의 문제해결 수업모형[7)]

문제해결 수업모형에서 문제는 누군가가 무엇인가를 원하고 있지만 즉각 그것을 얻기 위해 무엇을 해야 할지 모르는 상황과 관련이 있다. 만약 문제가 너무 쉬워서 아동이 답을 얻는 방법을 알고 있거나 즉각 답을 구할 수 있다면 실제로 문제가 없는 것과 마찬가지이다. 또한 문제가 진정한 문제인지 아니면 단순한 연습문제에 불과한지는 그 문제를 다루는 사람에 따라 다르다(강완 외, 2003).

수학적 문제해결의 연구에서 Polya의 영향은 지대하다. Polya는 「어떻게 문제를 해결할 것인가?」라는 책[8)]에서 처음으로 문제해결에 대한 일반적인 전략과 문제해결의 4단계를 제시하였다. 문제해결 4단계는 "문제이해→계획작성→계획실행→반성"의 4단계로 구성되어있다. 각 단계를 개략적으로 살펴보면 다음과 같이 요약된다.

「문제이해」 단계는 학생들로 하여금 주어진 문제를 자기 자신의 것으로 만들기 위한 것이다. 이를 테면, 자기의 언어로 문제이해하기, 구하고자하는 것과 주어진 조건 분석하기, 문제와 관련된 이미지 형성하기와 표현하기 등이다.

「계획작성」 단계는 문제에 나타나있는 정보 또는 조건으로부터 문제를 이해하고 난 후의, 주어진 문제의 풀이에 대한 구상 단계로, 여기에서는 구하고자하는 것과 주어진 조건과의 관계, 주어진 문제와 관련된 과거의 경험(유사 문제 등) 또는 수학적인 지식, 전략의 구상(일반화, 특수화, 주어진 개별적 조건과 구하고자하는 것과의 관계 등)등과 관련된 문제풀이 계획을 작성한다.

「계획실행」 단계는 앞서 작성된 계획에 따라 실제로 활동을 하는 단계이다. 여기에는 수립된 전략에 따라 차례대로 문제를 해결하고, 풀이과정을 수시로 확인·검토 및 수정 등이 포함된다.

끝으로, 「반성」 단계는 얻어진 풀이를 점검하는 단계이다. 풀이과정의 모순성을 검정하거나 단순화하기, 결과나 방법을 다른 문제에 활용하기 등이다.

Ⅲ. 자료개발의 방향

1. 제 7차 초등학교 수학과 교육과정에 나타난 이산수학 내용 분석

제 7차 초등학교 수학과 교육과정에 나타난 이산수학의 내용을 영역 및 단계별로 <표 4>와 같이 분석하였다.

---

7) 문제해결모형에는 Polya, Schoenfeld, Krulik and Rudnick, Mason and Burton, 한국교육개발원, 카다기리 등이 있으나 여기에서는 대표적인 모형 중 하나인 Polya의 문제해결 수업모형을 채택했다.
8) Polya, G. (1945), How to Solve it, Princeton University Press, Princeton.

<표 4> 제 7차 초등학교 수학과 교육과정(교육부(1998))에 나타난 이산수학 내용 분석

영 역	단계	내 용	단 원
수와 연산	1-가	• 50까지의 수 • 간단한 수의 덧셈과 뺄셈 • 덧셈과 뺄셈의 활용	1. 5까지의 수 2. 9까지의 수 4. 가르기와 모으기 5. 더하기와 빼기 7. 50까지의 수
	1-나	• 100까지의 수 • 한 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 덧셈과 뺄셈의 활용	1. 100까지의 수 3. 10을 가르기와 모으기 4. 10이 되는 더하기와 10에서빼기 6-7. 더하기와 빼기(1), (2)
	2-가	• 1000까지의 수 • 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈의 도입 • 덧셈과 뺄셈의 활용	1. 세 자리 수 2. 더하기와 빼기(1) 4. 더하기와 빼기(2) 8. 곱하기
	2-나	• 곱셈구구 • 세 자리수 범위에서 덧셈과 뺄셈 • 덧셈, 뺄셈, 곱셈의 활용	1. 곱셈구구 2. 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈(1) 4. 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈(2)
	3-가	• 10000까지의 수 • 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 나눗셈의 도입 • 곱셈과 나눗셈	1. 10000까지의 수 2. 덧셈과 뺄셈 4. 나눗셈 5. 곱셈
	3-나	• 네 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈과 나눗셈	1. 덧셈과 뺄셈 2. 곱셈 4. 나눗셈
	4-가	• 다섯 자리 이상의 수 • 자연수의 사칙계산	1. 큰 수 2. 곱셈과 나눗셈 6. 혼합계산
도형	5-가	• 직육면체와 정육면체의 성질 • 여러 가지 모양으로 주어진 도형 덮기	2. 무늬 만들기 4. 직육면체
	6-가	• 쌓기나무로 모양 만들기	4. 쌓기나무
확률과 통계	1-가	• 한 가지 기준으로 사물을 분류하기	8. 분류하여 세어보기
	5-나	• 평균	7. 자료의 표현
	6-나	• 경우의 수와 확률	6. 경우의 수
문자와 식	3-나	• 문제를 규칙찾기의 방법으로 해결하기	8. 문제 푸는 방법 찾기
규칙성과 함수	1-가	• 규칙적인 배열에서 규칙 찾기	3. 여러 가지 모양
	1-나	• 자신이 정한 규칙에 따라 배열하기 • 1~100의 수 배열표에서 규칙 찾기	1. 100까지의 숫 2. 여러 가지 모양
	2-가	• 다양한 변화의 규칙 찾기 • 1~100의 수 배열표에서 뛰어 세는 규칙 찾기	1. 세 자리 수 3. 도형과 도형 움직이기
	2-나	• 곱셈표에서 여러 가지 규칙 찾기	1. 곱셈구구
	3-나	• 규칙에 따라 여러 가지 무늬 꾸미기	3. 도형
	4-가	• 다양한 변화의 규칙을 수로 나타내고 설명하기 • 규칙을 추측하고 말이나 글로 표현하기	8. 문제 푸는 방법 찾기
	4-나	• 규칙과 대응	8. 문제 푸는 방법 찾기
	5-가	• 여러 가지 이동을 이용하여 규칙적인 무늬 만들기	2. 무늬 만들기
	6-나	• 규칙과 대응	7. 연비

2. 프로그램 개발 방향

본 연구에서는 제 7차 초등학교 수학과 교육과정의 내용 중 이산수학과 관련된 내용을 분석하여, 이를 바탕으로 초등영재교육에 적용 가능한 이산수학 프로그램을 개발하였다. 또한 개발된 프로그램은 최근의 영재 교육의 동향이 속진보다는 심화학습의 개념을 강조하고 있으며, 수학 영재 프로그램에 있어서의 NCTM의 견해 또한 문제해결 기회를 제공하는 일련의 심화 프로그램을 기초로 할 것을 권고하고 있는 것을 감안하여 교육과정의 내용에 바탕을 두고 심화학습의 성격을 띠는데 초점을 두었다. 그러나 앞에서 살펴본 바와 같이 영재아의 특성과 학습능력에 비추어 볼 때 어느 정도의 속진 프로그램도 포함하고 있다. 또한 심화학습도 단순히 일반 교육과정과 유사하게 구성되면서 내용의 심화만을 의미하는 것은 아니다. 이와 관련하여 강수경(2004)은 심화학습 프로그램은 영재의 흥미와 관심 영역에 따라 관련 분야를 더 깊이 있고 폭넓게 다루면서 탐구해 나가야 한다고 지적하고 있다. 또한 영재 교육 전문가들이 말하는 심화학습의 요소를 다음과 같이 들고 있다.

- 심화학습 일지라도 적절한 학문적인 요소가 곁들어져야 한다. 즉 학문과 관련된 심화학습을 해야 한다.
- 적절한 학문적인 요소 외에도 창의성·문제해결력과 관련되는 활동을 심화학습에 넣어야 한다.
- 다양한 문화적인 경험을 제공해야 한다.
- 단지 바쁜 일만 하는 것을 말하는 것이 아니라 정규 교육과정 외에 의미 있는 활동을 할 수 있도록 지적인 자극을 받을 수 있는 심화학습의 활동을 의미한다.
- 영재교육의 활동으로서 심화학습이 보다 폭넓고 깊이 있게 다루어져야 한다. 일반 교육과정과 유사하다면 심화학습의 의미는 별로 없을 것이다.

또한 이산수학이 문제해결력을 신장시키는데 적합한 분야라는 점에 착안하여 문제해결력 신장에 초점을 두었으며, 그에 따라 프로그램의 학습활동은 Polya의 문제해결 학습모형을 따르고 있다.

3. 프로그램 구성 형태

프로그램 자료는 「학생용 학습 프로그램」과 「교사용 교수·학습 과정안」으로 구분하여 작성하였다. 두 자료는 같은 흐름의 프로그램으로 구성되어 있으나 「교사용 교수·학습 과정안」에 각 문제마다 Polya의 문제해결 4단계에 맞춘 발문을 제시하여 실제 수업 시 활용하도록 하였다. 각 프로그램의 학습 자료에는 다음과 같이 자료번호, 관련교육과정, 탐구주제, 학습목표, 학습교구[9]를 제시

9) 남승인(2004a)은 교구활용을 수학 영재 프로그램 개발에서 고려할 사항으로 지적하고 있다. 교구를 활용하는 구체적인 경험들은 서로 다른 적용에서 유래하는 특정한 수학적 추상화 능력을 평가하는데 유용하며, 수학적

하였다.

자료번호		관련교육과정	
탐구주제			
학습목표			
학습교구			

각 프로그램은 목표문제로 시작을 하는데, 이는 그 날의 학습에서 최종적으로 발견해야 하는 알고리즘과 관련이 있다. 다시 말해서, 목표문제의 선정은 탐구주제를 해결하기 위해서 고려된 것이다.

탐구문제는 목표문제의 해결이나 알고리즘의 발견을 위해 하나씩 밟아가야 하는 단계로 구성되어 있다. 각각의 탐구문제는 Polya의 문제해결 4단계에 따라 해결하도록 되어있다. 또한 탐구문제에서 다루었던 내용을 확인하거나 응용하기 위하여 연습문제를 두었다.

프로그램에서 새로 도입되는 용어는 약속하기를 통하여 정의하고 있는데 이는 현행 제 7차 교육과정의 초등 수학 교과서와도 맥락을 같이 하고 있다.

Ⅳ. 자료개발의 실제

1. 개발된 프로그램 목록

이산수학과 관련된 이론 고찰 및 제 7차 초등학교 수학과 교육과정 분석을 토대로 개발된 프로그램의 목록은 다음의 <표 5>와 같다.

<표 5> 프로그램 목록[10)]

영 역	자료번호	탐구 주제	활 동 내 용	관련 교육과정	시간
확률과 통계	1-1	비둘기집의 원리	· 평균의 원리	5-나-7. 자료의 표현	2
	1-2	이중계수의 문제	· 우리 반에서의 인사의 횟수 찾기	6-나-6. 경우의 수	2
	1-3	모임의 분할	· 우리 반을 소모임으로 분할하기	6-나-6. 경우의 수	3
	1-4	최소연결문제	· 최소 비용의 길 만들기	6-나-6. 경우의 수	3
	1-5	그래프 채색	· 지도 색칠하기	6-나-6. 경우의 수	3
	1-6	무게 재기	· 다른 무게의 구슬 찾기	6-나-6. 경우의 수	3

모델링과 사고 실험의 가치를 인식하도록 한다. 그러나 교구는 구체와 추상의 매개체이지 교구 조작자체가 학습의 대상은 아니라는 사실에 유의할 필요가 있다.

10) 제주대학교 과학영재교육센터 초등수학반의 심화·사사과정에서 사용하고 있는 프로그램 중의 일부이다.

영 역	자료번호	탐구 주제	활 동 내 용	관련 교육과정	시간
수와 연산 확률과 통계	2-1	자연수의 분할	· 주어진 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 표현하기	1-가-1, 2, 4, 5, 7단원 1-나-1, 3, 4, 6, 7단원 2-가-1, 2, 4 단원 2-나-2, 4단원 3-가-1, 2단원 3-나-1단원 6-나-6. 경우의 수	3
도형	3-1	정다면체의 분류	· 정다면체는 몇 개일까?	5-가-4. 직육면체	3
기타 (심화자료)	4-1	한 붓 그리기	· 우리 동네 산책하기	심화자료(문제해결)	3

2. 프로그램의 실제

교사용 교수 · 학습 과정안

자료번호	2-1	관련교육과정	<1-가> 1, 2, 4, 5, 7단원 <1-나> 1, 3, 4, 6, 7단원 <2-가> 1, 2, 4 단원 <2-나> 2, 4단원 <3-가> 1, 2단원 <3-나> 1단원 <6-나> 6. 경우의 수
탐구주제	자연수의 분할		
학습목표	자연수를 분할하는 방법의 수를 이해할 수 있다. 자연수를 분할하는 방법의 수를 구할 수 있다.		
학습교구	크기와 모양이 같은 구슬 10개, 크기와 모양이 같은 빈 종이상자 10개		

목표문제

주어진 서로 같은 □개의 구슬을 △개의 상자에 나누어 넣는 방법의 수는 모두 몇 가지인가? (단, △개의 상자는 서로 구별하지 않으며 빈 상자가 없이 나누어 담는다.)

▣ 문제의 이해

T: 구하려는 것은 무엇인가?

S: 서로 같은 □개의 구슬을 △개의 상자에 나누어 넣는 방법의 수

T: 주어진 조건은 무엇인가?

S: △개의 상자는 서로 구별하지 않으며 빈 상자가 없이 나누어 담아야 한다.

T: 주어진 조건은 구하려는 것을 결정하기에 충분한가?

S: 충분하다/불충분하다/모르겠다.

■ **계획의 작성**

T: 전에 이와 비슷한 문제를 본 적이 있는가?

S: 교과서에서 경우의 수를 찾는 문제를 풀어 본 적이 있다. 하지만 이 문제는 어떻게 해결해야 할지 잘 모르겠다.

T: 그렇다면 이 문제를 해결하기 위하여 아래의 탐구문제를 해결해보자. 그리고 그러한 과정에서 오늘의 목표문제를 해결할 수 있는 방법을 찾아보자.

탐구문제 1 서로 같은 구슬(●) 4개를 △개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법을 생각해보자.

■ **문제의 이해**

T: 구하려는 것은 무엇인가?

S: 서로 같은 4개의 구슬을 △개의 상자에 나누어 넣는 방법의 수

T: 그러한 방법이 항상 있을까?

S: 있다. / 없다.

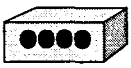
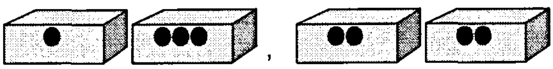
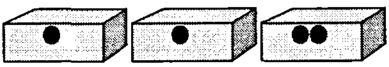
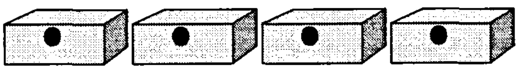
T: 만일 있다면, 상자가 몇 개정도 필요할까? 없다면 어떤 경우인가?

S: 상자가 5개 이상인 경우는 불가능하다.

■ **계획의 작성 및 실행**

T: 그렇다면 몇 가지 방법이 있을까? 실험을 통하여 알아보자.

S: (서로 같은 4개의 구슬과 서로 같은 4개의 빈 종이 상자를 가지고 빈 상자 없이 나누어 넣는 활동을 한다.)

- △=1 일 때,  : 1 가지
- △=2 일 때,  : 2 가지
- △=3 일 때,  : 1 가지
- △=4 일 때,  : 1 가지

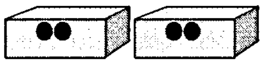
▣ **반성**

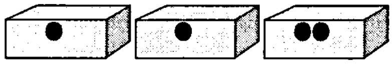
T: 서로 같은 4개의 구슬을 △개의 상자에 나누어 넣는 방법의 수는 모두 몇 가지인가?

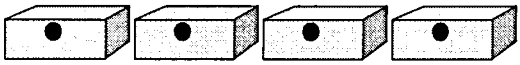
S: 5가지

T: 위의 상자를 보고 각 상자에 있는 구슬의 수를 숫자로 나타내어, 각 경우에 그 수를 덧셈으로 표현하여 보세요.

S:  : 4

 : 1 + 3,  : 2 + 2

 : 1 + 1 + 2

 : 1 + 1 + 1 + 1

T: 이와 같이 서로 같은 구슬을 몇 개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법 수를 **자연수의 분할수**라고 부릅니다.

※ 탐구 주제를 해결하기 위한 이 후의 탐구문제는 부록 참조.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 초등영재교육에 적용 가능한 이산수학 프로그램을 개발하는 것을 목적으로 하였다.

우선 프로그램의 개발에 선행하여 영재의 정의와 특징, 이산수학의 소개와 교육과정과의 관계, 그리고 프로그램의 교수·학습에 적용하게 될 Polya의 문제해결학습에 대한 이론적 고찰을 하였으며 제 7차 초등학교 수학과 교육과정의 이산수학 관련 내용을 분석하여 프로그램을 개발하였다.

본 연구에서 이론적 고찰 및 제 7차 초등학교 수학과 교육과정의 분석을 통해 개발된 프로그램의 특징은 다음과 같다.

첫째, 제 7차 초등학교 수학과 교육과정의 내용 중 이산수학의 내용을 분석하여, 그 내용들을 심화할 수 있는 방향에 초점을 두었으나 어느 정도의 속진은 허용하고 있다.

둘째, 개발된 프로그램은 실제 영재 교육 현장에서 활용할 수 있도록 「학생용 학습 프로그램」과 「교사용 교수·학습 과정안」으로 나누어 제작하였다. 즉 현장의 교사들은 「교사용 교수·학습 과정안」을 참고하여 현장의 특성이나 교사의 의도에 따라 수업을 진행할 수 있다.

셋째, 본 연구에서 개발된 프로그램은 단순한 원리의 제시와 문제풀이의 숙달이 아니라, 프로그램 자체가 하나의 수학적 원리를 찾아가는 방식으로 구성되어 있다. 즉 프로그램의 탐구문제들을 해결해 나가다 보면 학생들은 자연스럽게 이산수학의 알고리즘을 발견할 수 있다. 이는 본 연구의 목적이 이산수학의 이론을 중심으로, 문제해결에서 알고리즘적으로 사고하는 능력을 키울 수 있도록 하는 것에 초점을 두었기 때문이다.

넷째, 이산수학이 수학의 여러 분야 중에서 문제해결력을 신장시키기 위해 가장 적합한 분야라는 장점을 살려 문제해결력 신장에 초점을 두었으며, 그에 따라 프로그램의 학습활동은 Polya의 문제해결학습을 따르고 있다.

이상의 연구를 바탕으로 본 연구에서 개발된 프로그램을 활용함에 있어 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 개발된 프로그램의 활용에 있어서 교사의 활용 능력이 요구된다. 아직은 이산수학이라는 용어 자체가 널리 알려지지 않은 상태이고 그 동안의 이산수학적 내용들은 교육과정의 일부분 혹은 수학의 퍼즐이나 게임 등에만 한정된 것으로 생각하여, 특히 초등교육에 있어서는 그다지 주목을 받지 못했었다. 그러한 이유로 영재교육을 담당하여 이 프로그램을 활용하고자 하는 교사들도 이산수학의 내용을 생소하게 받아들일 수 있다. 그러나 몇몇의 연구에서 이산수학은 수학 학습에 흥미를 잃었거나 수학을 어려워하는 학생들에게 적용하여 성과를 거두었을 만큼 접근이 용이하고 새로운 수학적 아이디어를 창출할 수 있는 분야이기도 하다. 그래서 이 프로그램을 활용하게 될 영재담당 교사가 조금만 이산수학의 아이디어에 관심을 갖는다면 본 연구의 프로그램을 영재교육 현장에 맞게 변형하여 활용할 수 있을 것이다.

둘째, 본 연구에서는 초등영재교육을 위한 프로그램으로서 이산수학을 소재로 접근을 시도하였다. 앞으로 초등영재교육의 질적 발전을 위하여 제 7차 초등학교 수학과 교육과정과 연계된 자료의 개발이 더욱 필요하며 이때 기존에 개발되어지지 않은 다양한 수학의 분야를 소재로 하는 실험 정신이 필요할 것이다.

참 고 문 헌

강수경 (2004). 초등학교 중학년에 활용할 수 있는 수학 영재 교육 자료 개발, 제주교육대학교 교육대학원.

강완 외 (2003). 초등 수학 학습지도의 이해, 서울 : 양서원.

고길철 (2004). 초등 수학 영재아를 위한 심화학습 프로그램 개발 연구(저학년을 중심으로), 제주교육대학교 교육대학원.

교육부 (1998). 초등학교 교육과정 해설(Ⅳ), 서울: 대한교과서주식회사.

구경주 (2003). 제 7차 교육과정의 이산수학 연구, 신라대학교 교육대학교.

남승인 (1998). 초등학교 수학 영재 지도에 관한 고찰, 한국수학교육학회지 시리즈 F <수학교육 학술지> **제 2집**, pp.35-57, 서울: 한국수학교육학회.

남승인 (2004a). 심화학습 프로그램에 기초한 속진학습 프로그램 개발 방안, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **18(3)**, pp.29-44, 서울: 한국수학교육학회.

남승인 (2004b). 초등 수학 영재의 판별 방법 및 절차에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <

수학교육 논문집> **18(3)**, pp.103-116, 서울: 한국수학교육학회.

송상헌 (1999). 수학영재교육 프로그램개발을 위한 조사연구, 대한수학교육학회.

이지현 (2002). 7차 교육과정에서 새로 도입된 이산수학의 주제 연구, 건국대학교 교육대학원.

전민경 (2003). 제 7차 교육과정에서 초등학교 이산수학에 대한 연구, 단국대학교 교육대학원.

황석근 · 이재돈 · 김익표(2001). 이산수학, 서울 : 블랙박스.

Bogart, K. P. (1991). The Roles of Finite and Discrete Mathematics in College and High School Mathematics. Kenney, M. J. & Hirsch, C. R. (Ed.). *Discrete Mathematics Across the Curriculum K-12 1991 Year Book*, Reston: NCTM.

Dossey, J. A. (1991). Discrete Mathematics: The Math for Our Time. Kenney, M. J. & Hirsch, C. R. (Ed.). *Discrete Mathematics Across the Curriculum K-12 1991 Year Book*, Reston: NCTM.

Hart, E. W. (1991). Discrete Mathematics: An Exiting and Necessary Addition to the Secondary School Curriculum. Kenney, M. J. & Hirsch, C. R. (Ed.). *Discrete Mathematics Across the Curriculum K-12 1991 Year Book*, Reston: NCTM.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston: NCTM.

<부 록>

탐구문제 2 1개의 상자에 □개의 구슬을 넣는 방법과 구슬의 수와 상자의 수가 같은 경우에 구슬을 상자에 넣는 방법에 대하여 알아보자.

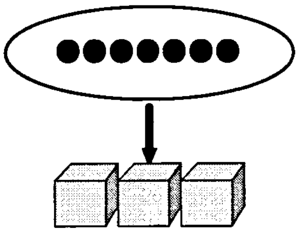
▣ **문제의 이해**
T: 구하려는 것은 무엇인가?
S: 1개의 상자에 □개의 구슬을 넣는 방법과 구슬의 수와 상자의 수가 같은 경우에 구슬을 상자에 넣는 방법

▣ **계획의 작성 및 실행**
T: 탐구문제 1의 결과를 문제 해결에 활용할 수 없을까?
S: 1가지이다.

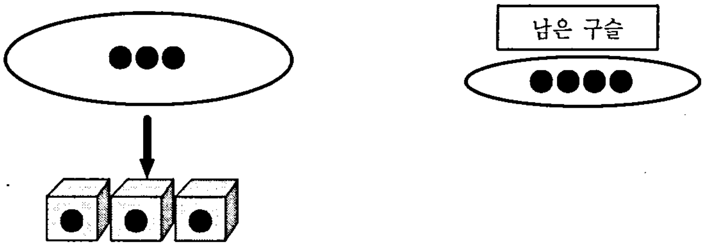
▣ **반성**
T: 1개의 상자에 □개의 구슬을 넣는 방법과 구슬의 수와 상자의 수가 같은 경우에 구슬을 상자에 넣는 방법이 왜 1가지인가?
S: 상자가 1개뿐이므로 □개의 구슬은 모두 그 상자에 넣어야 한다. 따라서 방법은 1가지이다. 또한 상자의 수와 구슬의 수가 같은 경우는 각 상자에 1개씩의 구슬을 넣어야 하므로 역시 방법은 1가지뿐이다.
T: 일반적인 경우에도 이것이 성립할까?
S: 성립한다.

탐구문제 3 서로 같은 구슬(●) 7개를 3개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법을 생각해 보자.

▣ **문제의 이해**
T: 구하려는 것은 무엇인가?
S: 서로 같은 7개의 구슬을 빈 상자 없이 3개의 상자에 나누어 넣는 방법
T: 그림을 그려보아라.
S:

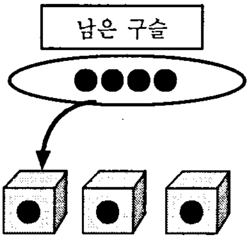


▣ **계획의 작성 및 실행**
T: 이 문제는 서로 같은 7개의 구슬을 3개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣어야한다. 이 조건을 이용하여 문제해결에 도움을 받을 수는 없을까?
S: 우선 빈 상자가 없어야 하므로, 먼저 각 상자에 구슬을 하나씩 집어넣으면 된다.



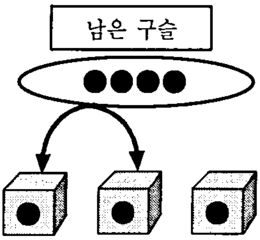
T: 이제, 남은 구슬은 어떻게 할까?
S: 남은 구슬 4개를 3개의 상장에 넣어주면 된다.
T: 남은 구슬은 어떻게 상자에 넣으면 될까? 몇 가지 경우가 생길까?
S: 남은 구슬을 1개, 2개, 3개의 상자에 넣은 3가지의 경우가 생긴다.
T: 각 경우에 대하여 그 방법의 수를 찾아보자.

(1) 남은 구슬을 1개의 상자에 넣는 경우
S: (남은 4개의 구슬을 1개의 상자에 넣어본다.)



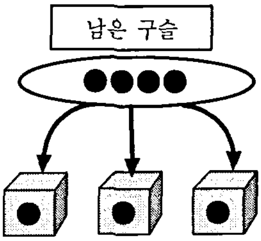
T: 몇 가지 방법이 있는가?
S: 1가지이다. / 3가지이다.
T: 왜 1가지라고 생각했는가?
S: 상자들의 구별이 없기 때문에 어느 상자에 넣어도 같은 경우이다.

(2) 남은 구슬을 2개의 상자에 넣는 경우
S: (남은 4개의 구슬을 2개의 상자에 넣어본다.)



T: 탐구문제 1의 결과를 활용할 수 있을까?
S: 예. / 아니오.
T: 왜 '예'라고 생각했는가?
S: 상자들은 구별이 없기 때문에 어느 것 2개를 선택해도 결과는 같다. 단지 4개의 구슬을 2개의 상자에 넣 는 방법만 달라질 뿐이다.

(3) 남은 구슬을 3개의 상자에 넣는 경우
S: (남은 4개의 구슬을 3개의 상자에 넣어본다.)



T: 탐구문제 1의 결과를 활용할 수 있을까?
S: 예.
T: 왜 '예'라고 생각했는가?
S: 4개의 구슬을 3개의 상자에 넣는 방법이다.

▣ 반성
T: 서로 같은 7개의 구슬을 빈 상자 없이 3개의 상자에 나누어 넣는 방법은 모두 몇 가지인가?
S: 4가지이다.
T: 문제를 해결하기 위하여 어떤 방법을 사용했는가?
S: 4개의 구슬을 3개의 상자에 넣는 방법을 생각하였다.
T: 왜 7개의 구슬을 빈 상자 없이 3개의 상자에 나누어 넣는 방법은 4개의 구슬을 3개의 상자에 나누어 넣는 방법과 같은가?
S: 빈 상자가 없게 하기 위해서 우선 3개의 상자에 각각 1개씩의 구슬을 넣는다. 그리고 남은 4개의 구슬을 3개의 상자에 넣어주면 된다.

연습문제 1 앞의 탐구문제 3의 탐구방법을 이용하여 다음의 각 경우를 해결해보자.

(1) 서로 같은 7개의 구슬을 2개의 상자에 넣는 방법의 수
(2) 서로 같은 7개의 구슬을 4개의 상자에 넣는 방법의 수
(3) 서로 같은 7개의 구슬을 5개의 상자에 넣는 방법의 수

(4) 서로 같은 7개의 구슬을 6개의 상자에 넣는 방법의 수

(5) 각 경우에 필요한 정보를 찾아보고, <표 6>의 빈칸을 채워 넣어 보자. 그리고 표에서 규칙을 찾아보자.

> (1) 서로 같은 7개의 구슬을 2개의 상자에 넣는 방법의 수: 3가지
> (2) 서로 같은 7개의 구슬을 4개의 상자에 넣는 방법의 수: 3가지
> (3) 서로 같은 7개의 구슬을 5개의 상자에 넣는 방법의 수: 2가지
> (4) 서로 같은 7개의 구슬을 6개의 상자에 넣는 방법의 수: 1가지

<표 6> 자연수의 분할 수

상자수 / 구슬수	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0
4	1	2	1	1	0	0	0
5	1	2			1	0	0
6	1					1	0
7	1	3	4	3	2	1	1

연습문제 2 <표 6>를 이용하여 몇 개의 자연수를 더하여 자연수 7을 만들 수 있는 방법의 수를 찾아라.

> 몇 개의 자연수를 더하여 7을 만드는 방법의 수는 서로 같은 7개의 구슬을 △개 이하의 상자에 나누어 넣는 방법의 수와 같다.
> 따라서 <표 6>를 이용하면 답은 1 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 = 15.

연습문제 3 일반적으로 <표 6>과 같은 표를 만드는 방법을 찾아라. 즉, 표의 크기를 확장하는 방법을 찾아라.

학생용 학습 프로그램

자료번호	2-1	관련교육과정	<1-가> 1, 2, 4, 5, 7단원 <2-가> 1, 2, 4 단원 <3-가> 1, 2단원 <6-나> 6. 경우의 수 <1-나> 1, 3, 4, 6, 7단원 <2-나> 2, 4단원 <3-나> 1단원
탐구주제	자연수의 분할		
학습목표	자연수를 분할하는 방법의 수를 이해할 수 있다. 자연수를 분할하는 방법의 수를 구할 수 있다.		
학습교구	크기와 모양이 같은 구슬 10개, 크기와 모양이 같은 빈 종이상자 10개		

목표문제

주어진 서로 같은 □개의 구슬을 △개의 상자에 나누어 넣는 방법의 수는 모두 몇 가지인가?
(단, △개의 상자는 서로 구별하지 않으며 빈 상자가 없이 나누어 담는다.)

탐구문제 1 서로 같은 구슬(●) 4개를 △개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법을 생각해보자.

탐구문제 2 1개의 상자에 □개의 구슬을 넣는 방법과 구슬의 수와 상자의 수가 같은 경우에 구슬을 상자에 넣는 방법에 대하여 알아보자.

탐구문제 3 서로 같은 구슬(●) 7개를 3개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법을 생각해보자.

연습문제 1 앞의 탐구문제 3의 탐구방법을 이용하여 다음의 각 경우를 해결해보자.

(1) 서로 같은 7개의 구슬을 2개의 상자에 넣는 방법의 수
(2) 서로 같은 7개의 구슬을 4개의 상자에 넣는 방법의 수
(3) 서로 같은 7개의 구슬을 5개의 상자에 넣는 방법의 수
(4) 서로 같은 7개의 구슬을 6개의 상자에 넣는 방법의 수

(5) 각 경우에 필요한 정보를 찾아보고, <표 6>의 빈칸을 채워 넣어 보자. 그리고 표에서 규칙을 찾아보자.

<표 6> 자연수의 분할 수

상자수 / 구슬수	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

연습문제 2 <표 6>를 이용하여 몇 개의 자연수를 더하여 자연수 7을 만들 수 있는 방법의 수를 찾아라.

연습문제 3 일반적으로 <표 6>과 같은 표를 만드는 방법을 찾아라. 즉, 표의 크기를 확장하는 방법을 찾아라.