

## 모델링을 통한 동치분수의 개념 이해

- 초등학교 5학년을 대상으로 -

이 강 섭 (단국대학교)

김 규 상 (단국대학교 대학원)

학생들이 분수 개념을 이해하기 위하여 분수 개념에 대한 표상과 현행 교과서에 기술되고 있는 분수 개념에 대한 실재를 살펴보았다. 그리고 5학년 남학생 3명과 여학생 3명을 대상으로 동치분수의 개념과 모델링이 동치분수를 이해하는데 어떤 역할을 하는지를 살펴보고자 하는 것이 본 연구의 목적이다.

### I. 서론

현행 7차 교육과정의 교실 현장에서 나타나는 분수 학습의 문제점을 기술해 보면, 첫째, 학생 스스로 지식을 구성하고 그 지식의 타당성을 인식하게 하기보다는 전통적인 절차를 일방적으로 제시한다. 둘째, 분수의 크기 비교나 연산을 다룰 때, 의미를 중요하게 생각하지 않는다. 기호라는 것이 많은 정보가 축약된 경제적인 의사 전달 수단이지만, 기호에 앞서 의미를 충분히 이해할 때 기호는 비로소 효과적인 수단이 된다. 셋째, 학생들이 일상생활에서 경험했던 지식이 거의 활용되지 않으며, 분수 개념과 연산이 실생활과 분리되어 있다. 넷째, 학생에게 다양한 활동과 학습 자료를 제공되지 않는다. 주로 기호를 가지고 학습하며, 교사와 학생, 학생과 학생간의 의사소통이 이루어지지 않는다. 수업에서 학생이 다양한 상황을 경험하고 상황간의 공통성을 이해함으로써 추상화에 도달할 수 있게 해야 한다. 다섯째, 분수의 양적인 이해에 대해 거의 고려하지 않는다. 수 개념의 바탕이 되는 것은 수에 대한 크기 감각이다. 일차적으로 분수에 대한 크기 개념이 없으면 크기 비교나 연산은 기계적으로 다루어 질 수밖에 없다. 양적인 개념의 발달 즉, 분수의 '크기'에 대한 인식은 분수를 의미 있게 이해하는 능력의 기초가 된다(김규상, 2003).

Armstrong과 Bezik(1995)는 아동의 분수 이해에 관한 연구들에서 대부분의 학생들은 충분한 이해보다는 기계적이고 절차적인 지식을 익히고 있으며, 의미에 기초한 규칙보다는 교과서 문제 해결에 초점을 두고 있으며, 그 문제 해결과정의 연산을 설명하기 위하여 모델을 사용하는데 어려움을 느끼며, 실제적인 조작과 기호 알고리즘을 잘 연결하지 못한다.

분수가 수학적으로 중요한 개념임에도 불구하고, 이와 같이 학생들의 분수 학습 결과가 좋지 못한 이유는 무엇인가? 분수 개념 자체가 어렵고 복잡한 것은 사실이지만, 상황을 더욱 악화시키고 있는 것은 수업 방법이 적절하지 못하기 때문이다. Streefland(1991)는 교사가 분수 개념의 복잡성에 대한

인식이 부족하고 기계적인 수업 접근을 하고 있다고 지적한다. 분수 개념은 부분-전체, 몫, 비, 연산자, 측정의 의미를 가질 뿐만 아니라, 퍼센트, 소수 등과 밀접한 관련이 있다. 그러나 분수 수업은 교육과정 상 다른 내용과 거의 연계 없이 제시되고, 고차원 수준의 추상화나 알고리즘화에 지나치게 치중하고 있다. 그러므로 교수법은 실재와 동떨어져 있으며, 틀에 박힌 규칙의 적용에 초점을 두고 있다.

교실 수업은 주로 칠판과 설명으로 이루어지고 있으며, 몇 개의 예제를 제시한 후, 학생들이 숙달될 때까지 반복해서 기능을 연습시킨다. 교사들은 학생들이 연산의 의미를 어떻게 알고 있는지 또는 기계적으로 알고리즘을 어떻게 적용하는지에 대해서 거의 고려하지 않는다. 교사는 현재의 수업 패러다임을 개선해야 하며, 학생들이 구체적 교구나 보조물을 가지고 다양한 상황을 경험할 수 있도록 해야 한다. 그리고 학생들이 각각의 상황을 이해할 수 있도록 충분한 시간을 제공하여야 할 것이다.

따라서, 본 연구자는 학생들이 분수 개념을 이해하기 위하여 분수 개념에 대한 표상을 살펴보고, 현행 교과서에 기술되고 있는 분수 개념에 대한 실재를 분석하고, 그리고 남학생 3명과 여학생 3명을 대상으로 동치분수의 개념과 모델링이 동치분수를 이해하는데 어떤 역할을 하는지를 살펴보고자 하는 것이 본 연구의 목적이다.

## II. 본 론

수학적 개념을 이해하는데 필수적인 것은 그 개념의 구조를 충실히 반영하는 정신적 표상과 정신 모델을 갖는 것이다. 다음에서는 분수개념에 대한 표상, 분수개념에 대한 실재, 동치 분수의 개념 이해, 동치분수의 개념 이해를 위한 모델링을 살펴볼 것이다.

### 1. 분수 개념에 대한 표상

분수개념에서 수학적 사고의 모델은 기저의 구조가 분명하게 나타나야 하고 학생들이 명확하게 이해해야 한다. 또한 효과적인 수학적 사고를 위해서 학생들은 기저와 목표의 관계를 이해해야 한다. 학생들이 피상적인 세부 항목이 아닌 기저의 구조적 속성을 추상화하는 것이 특히 중요하다. 만약 이러한 이해가 획득되지 않는다면, 기저에서 목표로의 대응은 가능할 수 없으며, 그러면 목표에 대한 추론을 이끌어 내기 위해 그 기저를 사용하게 된다. 분수에서의 기저의 명확성은 단위 분수를 정확하게 표현하고, 명확하게 이해하는 것을 의미한다. 만약 학생들이 의미 있는 추상개념을 형성하려면, 이들이 경험하는 예제들의 구조를 배워야만 한다. 좋은 수학적 사고는 기저의 예제들 사이의 대응이 학생들로 하여금 두 구조에서 대응하는 관계를 집중하도록 하기 때문에 도움이 되는 것이다. 이러한 것은 분수의 정의로부터 그들의 구조에서 대응하는 관계를 집중하는 것이고, 이것은 학생들이 분수의 개념을 어떻게 나타내는지를 알 수 있다. 이러한 분수의 개념을 통한 개념적 결합성의 원리는

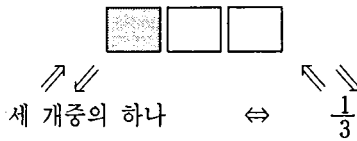
Gentner(1983)의 체계 원리에 따르면, 관계는 선택적으로 대응된다. 즉, 높은 차원의 순서 구조에 속하는 것들만 대응된다. 예를 들어, <그림 II-1>에 있는 분수의 모델에서 전체 블럭과 색칠한 블럭 사이의 관계는 분모의 숫자와 분자의 숫자 사이의 관계로 대응은 분수 사이의 관계 등을 포함하여 분수의 표상을 의미하고 있는 것이다.



$$\frac{7 \text{ (색칠한부분)}}{10 \text{ (전체부분)}}$$

<그림 II-1>  $\frac{7}{10}$ 에 대한 분수 모델로서 표상

분수개념은 단위분수에서 시작하며 단위 분수모델은 <그림 II-2>과 같이 표현을 할 수 있다.



<그림 II-2> 단위분수의 모델

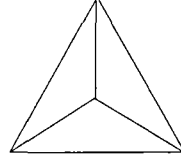
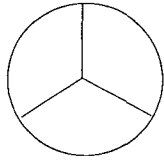
<그림 II-2>에서는 단위 분수인  $\frac{1}{3}$ 을 설명하기 위해서 녹색타일과 흰색타일을 사용하고 있다. 여기서 전체의 타일은 숫자 3을 의미하고, 그 전체 타일 중에서 녹색 타일은 숫자 1을 의미한다. 이 표현은 기저인 전체 타일 세 개의 단위타일은 분모의 숫자 3으로 대응되고, 색칠한 단위타일은 목표인 분자의 숫자 1에 대응된다.

## 2. 분수 개념에 대한 실제

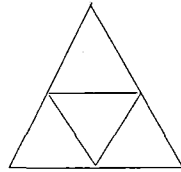
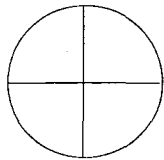
초등학생들이 분수개념을 어떻게 이해하는지를 3학년 수학 교과서의 내용을 중심으로 살펴보기로 하겠다. 본 연구자는 현행 초등학교 3학년 수학 교과서[3-가]에서 실려 있는 도형의 분할을 먼저 살펴보면, 【수학 3-가】 7단원 첫 부분에 [똑같이 나누어 봅시다]로 시작된다. 이 장에서는 사과를 이용하여 한 개를 반으로 똑같이 나누어 보거나 색종이를 이용하면서 분수의 등분을 이해시키고 있다. 그러나 본 연구자의 생각에 사과라는 대상물을 반으로 나눌 때 똑같은지를 묻는 내용에 대하여 조심스럽게 의구심을 갖는다. 처음 분수를 접하는 3학년 학생들에게는 조작적이고 시각적이며 명확한 등분에 대한 정확한 개념을 이해시키기 위해서는 색종이를 접어 보는 활동을 통해 사각형의 등분을 쉽게 이해할 수 있을 것이다. 학생들에게 먼저 반이라는 개념으로 출발하여 [전체와 부분의 크기를 알아봅시다]에서는 원, 사각형, 삼각형을 종이 접기를 이용해서 3부분으로, 4부분으로 나눠 보기의 활동

을 한다. 따라서 7차 교육과정 초등 수학 교과서에 실린 내용을 살펴보면,

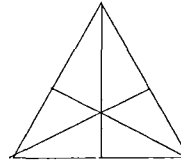
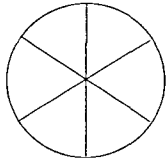
【수학 3-가】 88쪽에 [3부분으로 나누어 보기]가 있는데, 다음과 같은 모양들이 제공되고 있다.



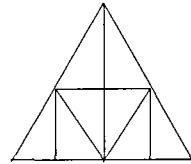
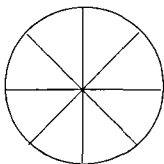
【수학 3-가】 92쪽에 [4부분으로 나누어 보기]가 있는데, 다음과 같은 모양들이 제공되고 있다.



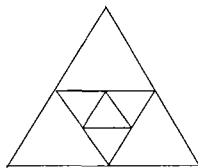
【수학 3-가】 99쪽에 [6부분으로 나누어 보기]가 있는데, 다음과 같은 모양들이 제공되고 있다.



【수학 3-가】 99쪽에 [8부분으로 나누어 보기]가 있는데, 다음과 같은 모양들이 제공되고 있다.



【수학 익힘책 3-나】 91쪽에 [좀 더 알아보기]가 있는데, 다음과 같은 모양이 제공되고 있다. 익힘책에서는 학생들에게 교과서에 익힌 경험을 토대로 아래와 같은 그림을 제공해서 가운데 있는 작은 삼각형이 전체의 몇 분의 몇인가를 묻는 문제로 재구성되어 있다.



위와 같이 현행 교과서에 실려 있는 것처럼 원과 삼각형을 여러 가지 부분으로 나누어 보는 경험을 통해 학생들은 분수 개념에 대하여 더욱 발전적 사고를 하게 될 것이다.

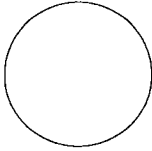
### 3. 동치분수의 개념 이해

먼저 본 연구를 위하여 초등학교 5학년 남학생 3명과 여학생 3명을 선정하여 분수의 기초개념을 얼마나 이해하고 있는지를 파악하기 위해 아래와 같은 예제를 제시하였다.

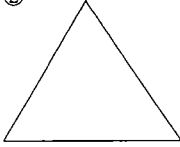
<분수 개념의 모델 검사도구 -1>

【 예제 2 】 다음의 도형을 다섯 부분으로 나누어 보시오.

①



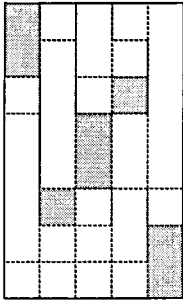
②



대체로 학생들이 잘 이해하고 있었으나 학생 B는 원을 다섯 부분으로 나눠보라는데 무조건 십자가를 그리듯이 네 부분으로 나눠보았다. 그리고 나서 아무렇게나 다섯 부분으로 조각만 나오면 된다고 생각하여 또 이리저리 줄을 그어 본다. 또한 삼각형에 대한 다섯 부분으로 나누는데도 좌우로 선을 그어본다. 한참 후에 학생 B는 각 꼭지점을 이용하여 여섯 부분으로 나누었다. 그리고 나서 세 부분으로 나누기까지 하였다. 학생 B는 등분에 대한 개념이 명확하게 알지 못하는 것 같다.

<분수 개념의 모델 검사도구 -1>

【 예제 4 】 다음의 색칠한 부분을 분수로 표현해 보시오.



분수로 나타내면? (            )

학생 E는 전체 블록을 하나씩 세어본다. 첫 번째는 4개, 두 번째는 5개, 세 번째는 6개, 네 번째 6개, 다섯 번째 3개로 세어 총 24개로 생각하고 그 중에서 블록의 크기에 상관없이 색칠한 부분을 다섯 개로 생각하였다. 그리고 ‘이십 사 분의 오’라고 답을 하였다. 이런 반응은 분수에 대한 개념을 전혀 이해하지 못한데서 일어난 것으로 볼 수 있다.

학생 D는 전체를 각각의 옆줄과 비교하여 세어보았다. 한 줄에 블록이 3개부터 6개까지 나뉜 것을 확인하였다. 첫 번째 블록의 색칠한 직사각형을 네 번째 블록의 색칠하지 않은 두 개의 작은 정사각형과 같다고 생각하여 색칠한 직사각형 3개를 반으로 나누는 것을 볼 수 있었다. 그리고 학생 D는 모든 블록을 정사각형의 크기로 옆으로 선을 그어 본다. 그러더니 각각의 정사각형을 모두 세기 시작하여 40개로 나뉜 것으로 확인하였다. 그 중에 색칠한 부분을 8개로 생각하였다. 분수 표현으로 ‘사십 분의 팔’이라고 답안을 작성하였다. 그렇지만, 학생 D는 ‘사십 분의 팔’이 ‘오 분의 일’과 동치분수라는 것을 생각하진 못하였다.

<분수 개념의 모델 검사도구 -2>

【 예제 1 】 다음 상자 안의 그림 중 검은 별이 나타내는 분수와 같은 분수로 표현될 수 있는 것을 모두 찾으시오.

☆ ★ ☆

① ☆☆☆☆                      ② ☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆                      ③ ☆☆☆☆  
 ④ ☆☆☆☆☆☆                      ⑤ ☆☆☆☆☆☆

학생 B와 학생 E가 오류를 범하였다. 다른 학생들은 블록 안의 검은별이  $\frac{1}{3}$ 라는 것을 이해했으나 학생 B는 흰 별(☆), 검은 별(★), 흰 별(☆)과 같은 패턴으로 생각하는 경향이 나타났다.

<분수 개념의 모델 검사도구 -2>

【 예제 2 】 10개의 바둑알이 있습니다. 검은 바둑알을 여러 가지의 분수로 표현해 보세요.

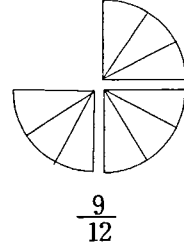
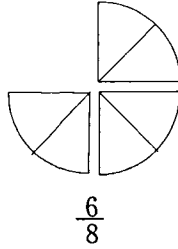
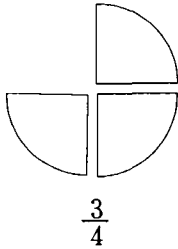

분수로? (                      )

여기에서는 블록 안의 검은 바둑알을 여러 가지의 분수로 표현해 보라고 했더니 학생 B는  $\frac{6}{10}$  을 찾고 나서 또 다른 분수표현을  $\frac{12}{20}$ ,  $\frac{18}{30}$ ,  $\frac{24}{40}$ ,  $\frac{30}{50}$ , ...이라고 나타냈다. 동치분수에 대한 개념이해가 부족한 것으로 나타났다.

4. 동치분수의 개념 이해를 위한 모델링

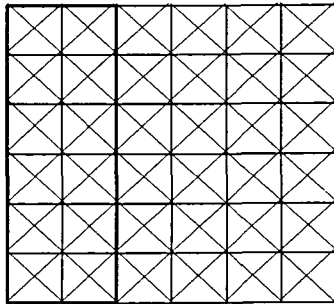
우리가 학교 수업에서 활용할 수 있는 보조물을 이용한 동치분수에 대한 수학적 사고의 모델을 살펴보면 다음과 같다.

㉞ 조각으로 영역 채우기 :

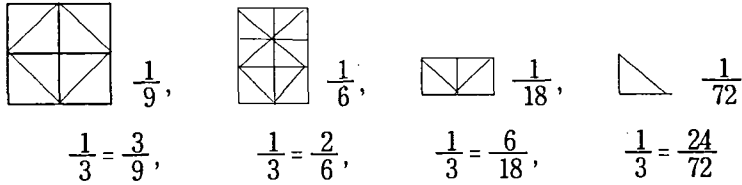


☞ 조각으로 영역 채우기는 학생들에게 익숙한 원에 대한 등분할을 부채꼴 모양의 조각을 이용하여 다양한 동치분수 개념  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{6}{8}$ ,  $\frac{9}{12}$ , ...으로 표현되는 것을 조작적이고 시각적으로 확인할 수 있다.

㉟ 모눈종이 활용 :



□□  $\frac{1}{3}$  □□



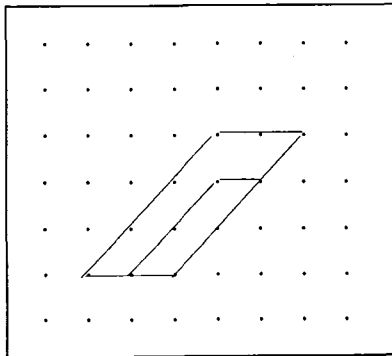
☞ 모눈종이 활용은 학생들이 가까운 보조물인데 반해, 그 활용도는 그다지 많지는 않다. 본 연구자는 우리가 쉽게 접할 수 있는 보조물인 모눈종이를 이용하여 교실에서 동치분수에 대한 개념을 설명한다면 학생들에게 유익할 것으로 생각된다. 위와 같은 6×6 평면에서  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{18}$ ,  $\frac{1}{72}$  등의 모양을 그려보게 함으로써  $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ ,  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ ,  $\frac{1}{3} = \frac{6}{18}$ ,  $\frac{1}{3} = \frac{24}{72}$  등등의 다양한 동치분수 개념으로 표현되는 것을 발견하게 될 것이다.

㉔ 종이 접기 :

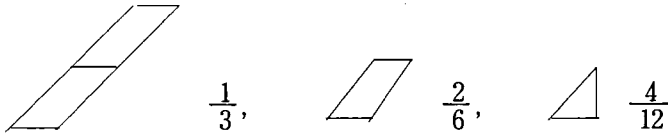


☞ 종이 접기는 교실에서 학생들이 친숙한 활동이다. A4용지를 활용하여 한 번 접어서  $\frac{1}{3}$ 을 만들어 보고, 두 번 접어서  $\frac{2}{6}$ 을 만들어 보고, 세 번 접어서  $\frac{4}{12}$ 을 만들어 본다. 이렇게 해 봄으로써 동치분수에 대한 개념을 익힐 수 있다.

㉕ 기하판 활용 :







☞ 기하판 활용에서 볼 수 있듯이, 우리는 기하판을 단지 도형이나 그려보는 교구로서 활용하고 있다. 그러나 위와 같이 다양한 형태의 모양을 제시한 후에 그 모양 안에 숨어있는 여러 가지의 분수를 찾게 해 봄으로써 동치분수에 대한 개념과 친숙해 질 수 있을 것이다.

이와 같이, 우리 주변에서 활용 가능한 다양한 대상과 교구를 이용해 조작적이고 시각적인 효과를 봄으로써 분수의 개념을 잘 이해할 것이다. 이러한 다양한 분수 모델을 통한 수업활동은 학생들에게 좁은 사고에서 폭 넓은 수학적 사고를 할 수 있도록 힘을 실어 줄 것이다.

### III. 결 론

본 연구는, 분수개념 이해를 위하여 현행 7차 교육과정의 초등학교 수학교과서에 실린 내용을 중심으로 개념에 대한 모델들을 먼저 살펴보았다. 초등학교 3학년 교과서에 실린 분수 개념 모델들을 보면, 대체로 원, 사각형, 삼각형을 대상으로 구성되어 있다. 학생들이 가장 편한 분수 모델 순서를 보면 사각형→원→삼각형 순으로 나타났다. 본 연구에서도 원과 삼각형을 중심으로 6명의 학생들에게 적용을 시켜 보았다. 그 결과, 교과서에서 볼 수 없었던 비정형적인 모델들에서는 다양한 반응들이 나왔다. 특히 다양한 상황 속에서 분수의 개념을 찾는 데는 많은 어려움을 겪는 것을 알 수 있었으며, 동치분수의 개념에 대한 이해도 약간의 부족한 상태였다. 따라서 이러한 어려움을 극복하기 위하여 교실에서 활용할 수 있는 교구나 보조물을 이용하여 동치분수에 대한 개념을 생각해 보았다. 특히, 우리가 주로 그림을 그리거나 그래프를 그리는데 이용하는 모눈종이나 도형의 모양을 시각적인 표현으로 이용하는 기하판을 가지고 분수의 개념을 지도하면 효과적인 결과가 나타난다는 것을 알 수 있었다. 끝으로, 계산 과정을 가르치기 전에 분수개념의 기초가 되는 의미들을 상기시켜 어떤 답의 크기에 대한 수학적 사고와 학생이 분수의 개념을 이해하는데 활용할 수 있는 정신모델들은 학습능률을 향상시킨다는 것을 알 수 있었다.

## 참 고 문 헌

- 교육부 (2004). 초등학교 수학 3-가, 서울: 대한교과서 주식회사.
- \_\_\_\_\_. 초등학교 수학 3-나, 서울: 대한교과서 주식회사.
- \_\_\_\_\_. 초등학교 수학 익힘책 3-나, 서울: 대한교과서 주식회사.
- \_\_\_\_\_. 초등학교 수학 4-가, 서울: 대한교과서 주식회사.
- \_\_\_\_\_. 초등학교 수학 4-나, 서울: 대한교과서 주식회사.
- 김규상 (1999). 초등학생의 수학교과에 대한 인식 및 학습부진에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 9, pp.73-81.
- \_\_\_\_\_. (2001). 초등수학교육에서 사고학습에 대한 소고. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 12, pp.83-91.
- \_\_\_\_\_. (2002). 초등수학교육에서 사고력 신장을 위한 수업방법에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 13, pp.97-105.
- \_\_\_\_\_. (2003). 분수학습에서 정신모델 구성을 위한 유추의 역할. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 15, pp.105-111.
- Armstrong, S. & Bezuk, N. (1995). *Multiplication and of Fraction*. pp.85-119, New York, NY. Academic Press.
- Gentner, D. (1983). Structure mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Psychology*, 7, pp.155-170.
- Streefland, L. (1991). *Fraction in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*, Dordercht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

【 분수개념의 모델 검사도구-1 】

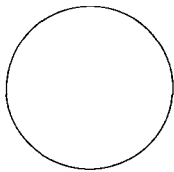
1. 전체를 5로 나눈 것 중의 3를 색칠하고 분수로 표현하시오.



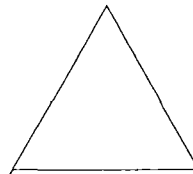
(분수로 : )

2. 다음의 도형을 다섯 부분으로 나누어 보시오.

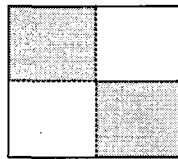
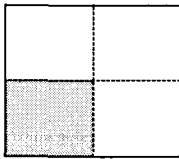
①



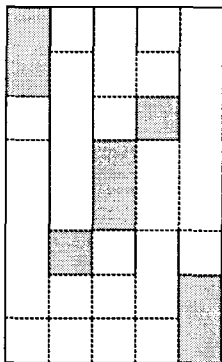
②



3. 다음의 색칠한 것을 모두 더하면 얼마인지 알아보시오.



4. 다음의 색칠한 부분은 모두 얼마인가?



분수로 나타내면? ( )

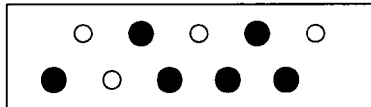
【 분수개념의 검사도구-2 】

1. 다음 상자 안의 그림 중 검은 별이 나타내는 분수와 같은 분수로 표현될 수 있는 것을 모두 찾으시오.



- ① ★☆☆☆
- ② ★☆☆☆☆☆☆☆☆
- ③ ★☆☆☆
- ④ ☆☆☆☆☆
- ⑤ ★☆☆☆☆

2. 상자 안에 10개의 바둑알이 있습니다.  
검은 바둑알을 여러 가지의 분수로 표현해 보시오.



분수로? (            )

3. 다음 (    ) 안에 >, =, < 를 넣으시오

- ①  $\frac{5}{7}$  (    )  $\frac{3}{7}$
- ②  $\frac{1}{6}$  (    )  $\frac{1}{8}$

4. 다음의 숫자 카드 중 3장을 골라 가장 큰 대분수와 가장 작은 대분수를 만드시오.



- 1) 가장 큰 대분수는? (            )
- 2) 가장 작은 대분수는? (            )