

불균질 대수층에서 유선 시뮬레이션을 이용한 다수 오염원의 용질 이동 모사

정승필 · 최종근*

서울대학교 지구환경시스템공학부

Solute Transport Modeling using Streamline Simulation in a Heterogeneous Aquifer with Multiple Contaminant Sources

SeungPil Jung · Jonggeun Choe*

School of Civil, Urban & Geosystem Eng., Seoul National University

ABSTRACT

This study presents a contaminant transport model suitable for a 2-dimensional heterogeneous aquifer with multiple contaminant sources. It uses a streamline simulation, which transforms a multi-dimensional problem into multiple 1-dimensional problems. It runs flow simulation, streamline tracking, and calculation of contaminant concentrations by turns. The model is verified with a Visual MODFLOW by comparing contaminant concentration distributions and breakthrough curves at an observation well. Due to its fast simulation, it can be applied to time consuming simulations such as in a fine-grided aquifer, an inverse modeling and other applications.

Key words : Solute transport, Heterogeneous aquifer, Streamline simulation

요 약 문

2차원 불균질 대수층에서 다수의 오염원이 있을 경우 오염물의 거동을 모사할 수 있는 방법을 제시하였다. 이 방법은 유선 시뮬레이션을 기반으로 하며 다차원의 계산을 다수의 일차원으로 분해하여 계산하는 방법으로서 불균질한 매질에서 수두 계산을 한 후, 관심영역에 유선을 분포시키고 그 유선을 따라 오염물이 전파되는 농도를 계산한다. 개발된 모델을 Visual MODFLOW를 이용하여 검증하였고 시간에 따른 농도 분포나 관측점에서의 용질 도달 곡선이 잘 일치함을 확인할 수 있었다. 개발된 모델은 시뮬레이션 수행 시간에 대한 효율 면에서 Visual MODFLOW보다 뛰어나 많은 연산을 필요로 하는 대규모 대수층의 용질거동 예측이나 반복 계산을 필요로 하는 역산 모델링에서 효과적으로 사용될 수 있다.

주제어 : 용질이동, 불균질 대수층, 유선 시뮬레이션

1. 서 론

유엔(UN)의 인구행동연구소에 따르면 우리나라는 물부족 국가군으로 분류되며 물기근 국가가 될 상황에 처해 있다고 한다. 이러한 상황에서 지하수 개발을 통한 수자원의 양적 확보도 중요하지만 또한 오염원으로부터 지하

수의 오염을 방지하고 정화하는 수자원의 질적 향상도 매우 중요한 일이다. 지하수의 오염을 방지하고 오염된 토양을 정화하기 위해서는 지하수와 오염물의 거동을 정확히 예측하여야 하며, 용질 거동 시뮬레이션은 지하수와 오염물의 거동의 예측에 효과적이다.

용질 거동 모델링은 크게 오일러리안(Eulerian) 방법과

*Corresponding author : jchoe@geofluid.snu.ac.kr

원고접수일 : 2004. 10. 11 게재승인일 : 2005. 2. 4

질의 및 토의 : 2005. 8. 31 까지

라그랑지안(Lagrangian) 방법이 있다(Neuman, 1984). 오일러리안 방법은 공간적으로 고정된 격자에서 지배 방정식을 푸는 방법으로서 유한차분법(FDM), 유한요소법(FEM) 등이 있다. 이 방법은 분산 지배적인 문제에 효과적이지만 해가 수치분산을 포함하거나 수렴하지 못하고 진동하는 단점이 있다(Anderson, 1979). 라그랑지안 방법은 용질 질량의 이동을 많은 입자들의 이동으로서 모사한다. 대표적인 방법으로 랜덤 워크(random-walk) 방법과 입자추적 기법(particle tracking technique) 등이 있다. 이 방법들은 수치 분산을 제거하여 이송 지배적인 문제에 효과적이지만 격자 단위에서 물질 평형이 유지되지 못 할 뿐만 아니라 모델의 정확도가 입자의 개수에 민감하다. 또한 매질의 불균질성이 심하거나 다수의 싱크(sink)와 소스(source)를 가진 필드에서는 수치적으로 안정하지 못하여 계산에 어려움이 따른다(Kitanidis, 1994).

유선 시뮬레이션(streamline simulation) 기법은 이러한 단점들을 극복하기 위하여 도입된 라그랑지안 방법의 하나이다. 유선 시뮬레이션 방법은 라그랑지안 방법의 장점인 수치분산을 최소화하면서 계산 속도와 안정성에 뛰어난 향상을 가져왔다. 복잡한 다차원의 유체거동을 1차원의 유선 거동으로 분해함으로써 기존의 방법들에 비해 10-1000배 계산 속도가 향상되며 1차원 방정식의 해를 이용함으로써 격자의 안정성 제한 조건을 완화시킬 수 있다(Keller et al., 1999; Kulkarni and Datta-Gupta, 2000; Wang and Kovysek, 2000).

유선 시뮬레이션 방법은 수년간 주로 저류층(reservoir) 시뮬레이션 분야에서 오일 회수량을 예측하는데 활발히 사용되었다. 최근에는 오일 회수량 예측뿐만 아니라 다공질 매질에서 유체 유동 및 물질 이동 분야에까지 확장되어 적용되기 시작했다(Crane and Blunt, 1999). 연산속도가 빠른 유선 시뮬레이션은 여러 번 반복 계산을 수행하여야 하는 역산 문제에 도입되어 효과적으로 사용되었다(Jang and Choe, 2002; Jang and Choe, 2004). 또한 단일 균열에서 용질 거동 모사(Jang et al., 2001)와 다공질 매질에서 횡방향 분산을 고려한 용질 거동 모사에 대한 연구가 시도되었다. 그러나 기존의 연구는 다양한 저류층내 오일회수나 단일 오염원에서 오염물 이동에 대한 연구가 대부분이다.

본 연구에서는 유선 시뮬레이션 방법을 이용하여 2차원 불균질 대수층에서 다수 오염원의 오염물 거동을 시뮬레이션 할 수 있는 모델을 개발하였다. 개발한 모델을 상용 프로그램인 Visual MODFLOW와 비교하여 그 정확성과 계산 효율성을 검증하였다. 검증된 모델을 이용하여 다수

의 오염원이 발생한 가상의 대수층을 가정하여 오염물의 시간에 따른 전파 양상을 분석하였다.

2. 연구방법

개발된 모델은 오염물 거동을 예측하기 위해 유선 시뮬레이션 기법을 사용하였다. 유선 시뮬레이션의 과정은 수두 분포 계산, 유선 입자 추적, 유선에 따른 이론해 매핑, 격자 농도 계산으로 나누어진다.

2.1. 수두 분포 계산

지하 토양에서 지하수의 수두를 계산하기 위해서 지하수 유동의 물질평형 방정식을 세워야 한다. 2차원 정적 상태에서 물질평형 방정식은 식 (1)과 같으며 식 (1)에 식 (2)의 Darcy 방정식을 대입하면 수두에 대한 유동 방정식을 세울 수 있다. 이 방정식을 수치적으로 풀기 위해서는 우선 전체 대상 영역을 격자 시스템으로 이산화 하여야 하며 이 때 경계조건을 고려해 주어야 한다.

$$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$v = -Ki = -K \frac{dh}{ds} \tag{2}$$

관심 영역의 전체 모습이 직사각형 모양이 아닌 불규칙한 모양이거나 비유동 조건, 일정 압력 조건, 일정 유동량 조건 등의 경계 조건이 있을 경우에는 유동 방정식을 변형시켜주어야 한다. 각 격자에서 만들어진 유동 방정식들로 구성된 선형 연립방정식은 반복법의 하나인 SOR (Successive Over Relaxation) 방법으로 계산하였다.

2.2. 유선 입자 추적

유선 입자 추적을 위해서는 관심 영역 전체의 속도장을 알아야 한다. 수두 분포를 얻게 되면 Darcy 방정식을 이용하여 두 격자 경계에서의 속도를 계산할 수 있다. 격자 내 임의 지점에서의 속도는 격자 내에서 속도장이 x, y 방향으로 선형적으로 변화한다고 가정하는 선형 내삽법을 이용하여 계산할 수 있다. 국소좌표계를 도입하여 격자 내 임의 지점(x)에서의 속도를 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$v_x = v_{x_0} + m_x(x - x_0) \tag{3}$$

여기서, x_0 는 좌표의 원점, v_{x_0} 는 x_0 에서의 속도, 그리고 m_x 는 식 (4)와 같은 속도의 변화량이다.

$$m_x = \frac{v_x \Delta x - v_{x0}}{\Delta x} \quad (4)$$

여기서, Δx 는 x 방향의 격자크기이다. 격자 내에서 유선 입자의 상주시간을 계산하기 위해서는 유선이 격자를 빠져나가는 방향을 알아야 한다. 유선이 x 방향으로 빠져나간다고 가정했을 때 상주시간은 식 (5)와 같이 계산할 수 있다.

$$\Delta t_{ex} = \int dt = \int_{x_i}^{x_e} \frac{dx}{v} = \frac{1}{m_x} \ln \frac{v_{xe}}{v_{xi}} \quad (5)$$

여기서, v_{xi} 와 v_{xe} 는 각각 x 방향으로의 입구속도와 출구속도이다. 유선이 y 방향으로 빠져나간다고 가정했을 때에도 상주시간은 같은 방법으로 계산할 수 있다. 격자 내에서 유선 입자의 실제 상주시간은 이렇게 구한 Δt_{ex} 와 Δt_{ey} 중 더 작은 값이 된다. 유선 입자의 상주시간이 계산되면 식 (3)과 식 (5)를 이용하여 유선 입자의 출구위치를 식 (6), 식 (7)과 같이 계산할 수 있다.

$$x_e = \frac{1}{m_x} [v_{xi} \exp(m_x \Delta t_e) - v_{x0}] + x_0 \quad (6)$$

$$y_e = \frac{1}{m_y} [v_{yi} \exp(m_y \Delta t_e) - v_{y0}] + y_0 \quad (7)$$

이러한 과정을 거쳐 유선의 경로가 결정되면 x - y 좌표계를 TOF(Time of Flight)의 개념을 이용한 유선을 따르는 좌표계로 변환한다. TOF는 수학적으로 식 (8)과 같이 정의되며 TOF의 값에 따라 일차원 유선에서의 위치가 결정된다(Batychy et al., 1997; Datta-Gupta and King, 1995; Thiele et al., 1996).

$$\tau(s) = \int_0^s \frac{d\zeta}{v(\zeta)} \quad (8)$$

여기서, ζ 는 유선을 따르는 좌표이다. 유선을 따라 임의의 위치에서의 TOF는 유선이 지나온 격자들에서 상주시간의 합으로 계산된다.

$$\tau = \sum_{i=1}^{N_b} \Delta t_{ei} \quad (9)$$

여기서, N_b 는 유선이 지나온 격자의 수이며 Δt_{ei} 는 격자 i 에서 유선 입자의 상주시간이다.

유선 입자의 추적이 시작되는 지점은 오염원이나 주입 정 또는 유량이 유입되는 경계격자이며 유량에 비례하여 유선의 개수를 할당해 준다. 유선의 추적은 생산정이나 유

량이 유출되는 경계격자를 만날 때까지 계속되어야 한다. 이때 유선 추적을 하면서 계산된 유선의 유량, 유선이 연결된 오염원의 농도, TOF 등은 격자별로 저장되어 나중에 격자 농도를 계산하는데 이용된다. 그런데 격자별로 지나가는 유선의 개수가 다르므로 효과적으로 이러한 정보를 저장하기 위해서 연결 리스트(linked-list)를 이용하였다.

2.3. 유선에 따른 이론해 매핑

대수층에서 비압축성, 정상상태 유동과 1차원 연속 오염원 조건을 가정하고 이송과 분산만을 고려하면 식 (10)의 지배 방정식을 세울 수 있다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = v \frac{\partial C}{\partial s} + D \frac{\partial^2 C}{\partial s^2} \quad (10)$$

여기서, C 는 농도이고 D 는 분산계수이다. TOF에 따른 좌표로 변환하기 위해서 식 (8)을 미분하면 좌표변환 관계식 (11)을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{v} \quad (11)$$

위 좌표 변환식을 이송-분산 방정식 (10)에 적용하면 식 (12)와 같이 TOF와 시간의 함수형태로 이송-분산 방정식은 변환된다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{P_{em}} \frac{\partial^2 C}{\partial \tau^2} \quad (12)$$

여기서, P_{em} 은 이송-분산비(advection-dispersion ratio)로서 식 (13)과 같이 정의된다(Jang et al., 2001).

$$P_{em} = \frac{v^2}{D} \quad (13)$$

TOF와 시간의 함수로 나타낸 최종 이송-분산 지배 방정식 (12)의 이론해는 식 (14)와 같다(Bear et al., 1993).

$$\frac{C(\tau, t)}{C_0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\tau - t}{2\sqrt{t/P_{em}}} \right) + \frac{1}{2} \exp(\tau P_{em}) \operatorname{erfc} \left(\frac{\tau + t}{2\sqrt{t/P_{em}}} \right) \quad (14)$$

이 해로부터 주어진 시간에서 유선 상의 임의의 위치에서의 농도를 그에 상응하는 TOF를 이용하여 계산할 수 있다.

2.4. 격자 농도의 계산

격자를 대표하는 격자의 평균 농도는 식 (15)와 같이 그 격자를 통과하는 많은 유선들의 기중 농도로 계산하며 이때 기중치는 각 유선의 유량에 비례한다.

$$C_b = \frac{\sum_i q_i \Delta \tau_i C_i(\tau)}{\sum_i q_i \Delta \tau_i} \quad (15)$$

여기서, C_b 는 격자의 평균농도이고 $\Delta \tau_i$ 는 i 번째 유선의 격자 내 상주시간이며 q_i 는 i 번째 유선의 유량이다. 다수의 오염원이 있을 경우에는 오염원의 농도가 선형으로 중첩할 수 있다고 가정하였다. 이를 위해서 격자별 유선 추적 정보를 저장하고 있는 배열을 오염원의 수만큼 생성하여 오염원별 농도를 계산하였다.

유선을 포함하지 않는 누락된 격자(missed gridblock)의 경우에는 TOF가 없으므로 격자 농도를 계산할 수 없다. 누락된 격자의 TOF를 계산하기 위해서 유선을 포함하는 가장 인접한 격자까지 새로운 유선을 추가하고 역추적(back-tracing)한다. 누락된 격자의 TOF는 식 (16)과 같이 근접격자의 TOF와 역추적에 소요된 시간을 더해서 결정한다.

$$\tau_{missed} = \bar{\tau}_b + \tau_{back} \quad (16)$$

여기서, $\bar{\tau}_b$ 는 근접격자의 TOF이고 τ_{back} 는 누락격자까지 역추적하는데 소요된 시간이다. τ_{back} 가 어느 값 이상일 경우 그 격자는 오염물의 이동에 관계없는 격자로 간주하여 격자에서 오염물 농도를 0으로 처리하고 계산을 중지한다.

3. 결 과

3.1. 모델 검증

개발된 모델의 정확성을 검증하고 연산속도를 비교하기 위하여 Visual MODFLOW를 사용하였다. 2차원의 등방균질한 대수층에서 오염물을 연속 소스의 형태로 정압으로 주입하고 생산정에서 정압으로 유체를 생산하고 있는 경우이다. 주요 입력 자료는 Table 1에 나타내었으며 저류층 모양과 유정의 위치는 Fig. 1과 같다. 이 때 각 유정은 대수층 상부에서 하부까지 모두 연결되어 있는 것으로 가정하였다. 검증을 위해 사용한 Visual MODFLOW MT3D 패키지의 시뮬레이션 설정은 Table 2와 같다.

Fig. 2는 개발된 모델과 Visual MODFLOW의 모델링 결과로서 각각 2,000일, 10,000일 경과 시 오염물의 전파

Table 1. Input Data used for the Verification

Aquifer size (m×m)	7,500×7,500
Number of gridblocks	30×30
Conductivity (m/s)	0.0001
Porosity	0.3
Dispersivity (m)	0.1
Injection well head (m)	2,000
Production well head (m)	20
Simulation time (days)	10,000

Table 2. Input Data used Visual MODFLOW for the Verification

Advection term	Hybrid MOC/MMOC(HMOC)
Dispersion and reaction terms	Implicit GCG Solver
Simulation time (days)	10,000
Particle tracking method	first-order Euler algorithm
Maximum number of particles	100,000
Minimum number of particles per cell	2
Maximum number of particles per cell	30

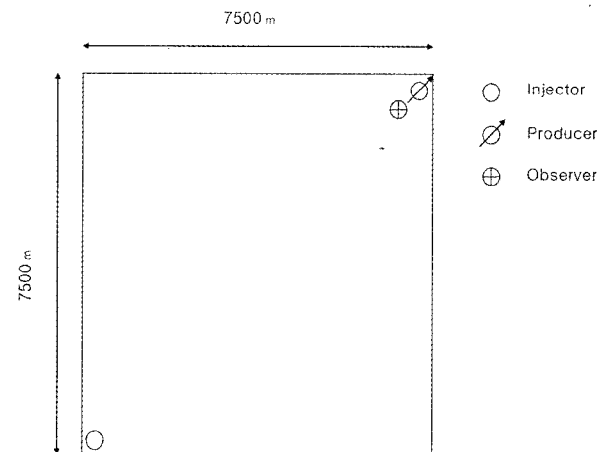


Fig. 1. System size and well locations for the comparison study.

양상을 나타낸다. Visual MODFLOW의 MT3D 패키지에서 수치분산이 작다고 알려져 있는 HMOC(Hybrid Method of Characteristics) 방법의 결과는 이 연구에서 개발한 모델의 결과보다 분산이 더 크며 이것은 FDM 방법 기반의 시뮬레이션에서 수반되는 수치분산의 문제로 생각된다. 그림에서 알 수 있듯이 약간의 수치분산으로 인한 차이를 제외하고 개발된 모델은 MT3D와 거의 동일하게 오염물 전파 양상을 예측하였다.

Fig. 3은 두 가지 모델에서 시간의 경과에 따른 생산정에서의 용질 도달 곡선을 나타낸 것으로 역시 잘 일치함

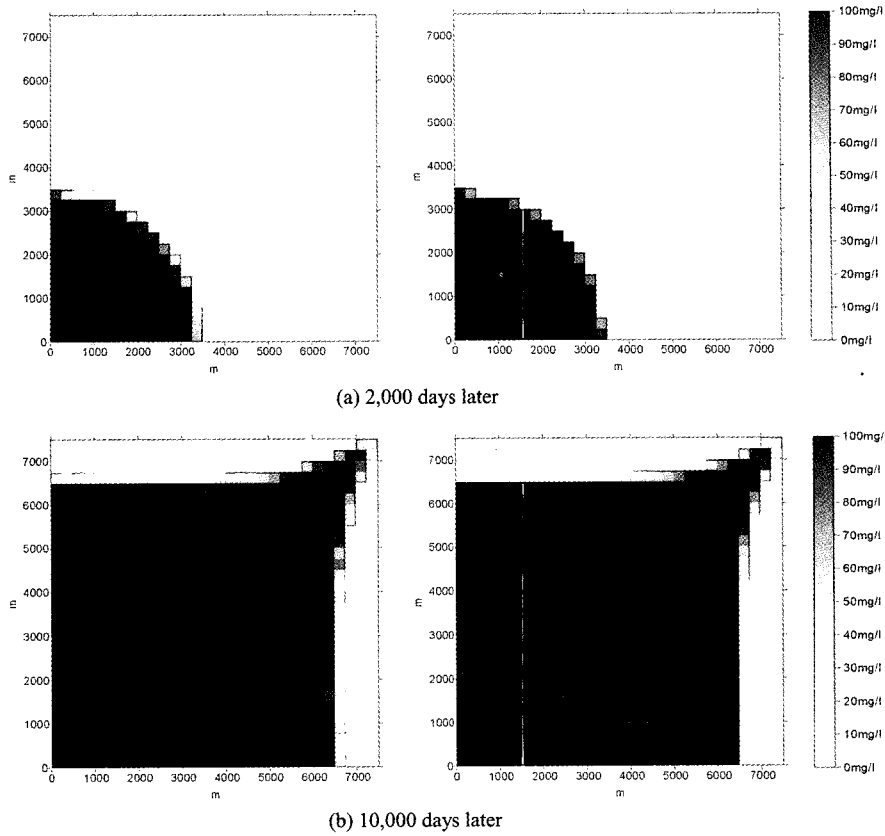


Fig. 2. Concentration distributions by Visual MODFLOW and the model in this study.

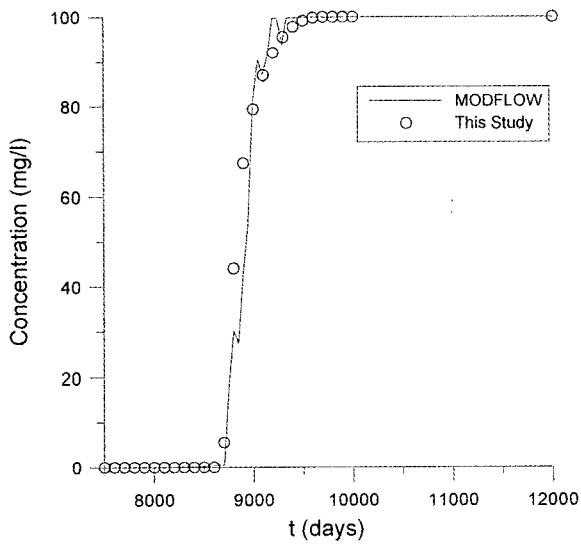


Fig. 3. Comparison of the two break-through curves.

을 알 수 있다. Visual MODFLOW의 경우 용질의 농도가 연속적으로 부드럽게 증가해야 함에도 불구하고 수치적인 진동이 일어나고 있는 것을 알 수 있다. Fig. 4는 연산 속도를 비교한 그림으로서, 정류상태일 때 본 연구

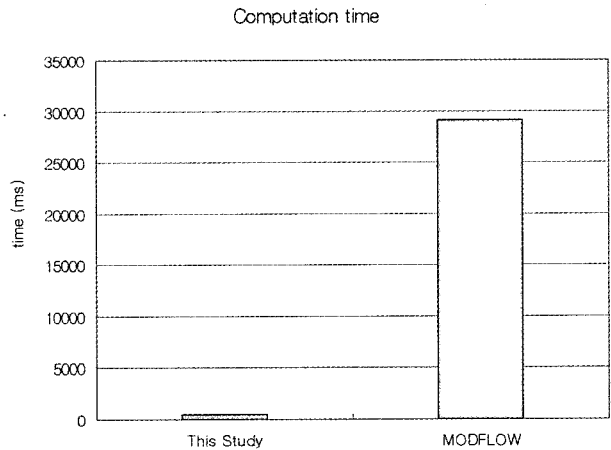


Fig. 4. Comparison of the computation times.

에서 개발된 모델이 Visual MODFLOW MT3D 패키지의 HMOC 방법보다 훨씬 빠르게 연산을 수행함을 보여 준다.

시뮬레이션 하는데 걸린 시간이 MODFLOW에서 29,150 ms인 반면 본 연구에서 개발한 모델은 484 ms 밖에 걸리지 않아 60배 이상 빠른 속도를 보였다. 이것은

Table 3. Contaminant Source Data

Location (m, m)	Concentration (mg/L)
(8625, 6875)	100
(7625, 5125)	50

Table 4. Input Data used in the Simulation

Aquifer size (m×m)	10,750×9,000
Number of gridblocks	43×36
Porosity	0.3
Advection-dispersion ratio	10
Injection well head (m)	2,000
Production well head (m)	20
Simulation time (days)	1,600

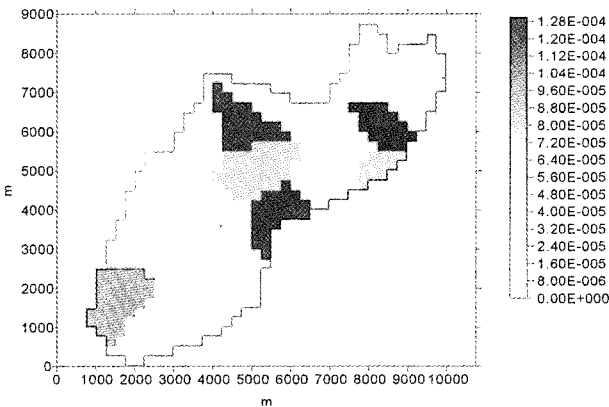


Fig. 5. Conductivity distribution used in the simulation.

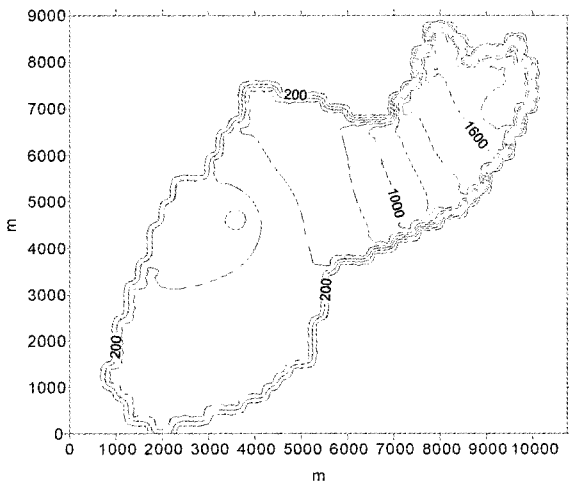


Fig. 6. Head distribution from the model.

유선 시뮬레이션 기법이 다차원의 문제를 다수의 일차원 문제로 분해하였기 때문일 뿐만 아니라 해석해를 사용하여 연산과정을 줄였기 때문에 가능한 것이다. 만약 정류

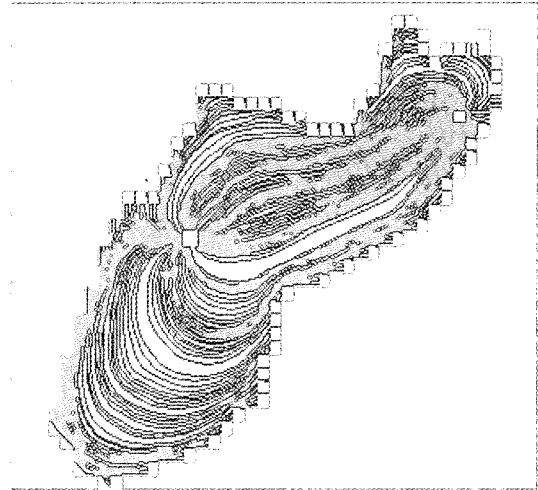


Fig. 7. Streamline distribution from the model.

상태가 아닌 전이상태(transient-state)에서의 시뮬레이션이라면 유동이 안정화될 때까지 매 시간 간격마다 유동 시뮬레이션을 하고 유선추적을 해야 하기 때문에 연산 시간 감소의 효과가 줄어든다. 그러나 다차원 문제를 1차원 문제로 분해하고 해석해를 사용하는 방법의 특성으로 인하여 여전히 시뮬레이션 시간에서 큰 이점이 있다. 이러한 이유로 개발된 모델은 용질 거동을 정확히 모사할 뿐만 아니라 Visual MODFLOW에 비해 안정적이고 빠르게 해를 구하는 것으로 판단된다.

3.2. 시뮬레이션 결과

검증된 모델을 이용하여 복잡한 형태의 대수층에서 다수 오염원이 있는 경우에 대해 시뮬레이션을 수행하였다. 하나의 주입정과 하나의 생산정이 있는 경우로서 2 개의 연속 오염원이 존재하며 그 위치와 농도는 Table 3에 제시되어 있다. 오염원을 제외한 기본 입력자료는 Table 4에 나타내었으며 불균질한 수리 전도도 분포는 Fig. 5에 나타내었다.

Fig. 6은 유동 시뮬레이션을 수행하여 수두분포를 계산한 결과이다. 오른쪽 상단의 주입정으로부터 왼쪽의 생산정까지 수두가 감소하는 것을 확인할 수 있다. Fig. 7은 계산된 수두분포를 이용하여 유선 궤적을 추적한 결과로서 유체의 이동이 일어나는 경로를 보여준다. 이 그림에서 유선이 조밀한 곳일수록 수리전도도가 크며 유동이 잘 일어나는 부분이다. Fig. 8은 300일, 600일, 1,500일 경과 시 오염물의 전파 양상을 나타낸다.

용질 도달 곡선인 Fig. 9에서 700일 경 하나의 오염원에서 퍼져 나온 용질이 관측정에 도달하여 농도가 증가하

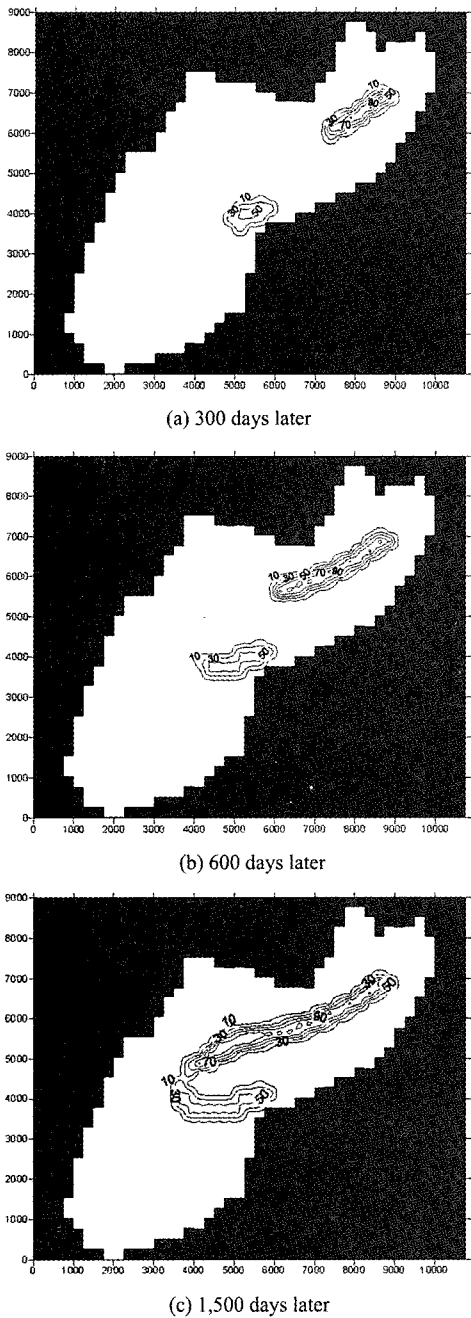


Fig. 8. Solute concentration distributions with simulation time in days.

기 시작하며 1,000일 경에 농도 증가가 완만해진다. 그러나 나머지 하나의 오염원에서 전파된 오염물이 관측정에 도달한 이후 또 다시 농도가 증가하기 시작하여 계단식으로 농도가 증가하는 것을 확인할 수 있다. 1,500일 후가 되면 두 개의 오염원에서 전파된 오염물이 모두 생산정에 도달하게 되고 그 이후에는 정상 상태가 되어 일정 농도를 계속 유지하게 된다.

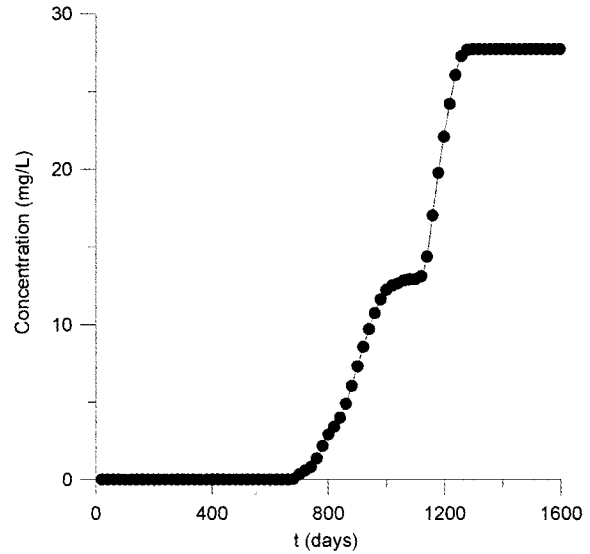


Fig. 9. Breakthrough curve for the two contaminant sources.

4. 결 론

본 연구에서는 유선 시뮬레이션 기법을 사용하여 2차원 지하수 유동과 오염원의 전파양상을 분석할 수 있는 모델을 개발하였다. 개발된 모델은 일정 수두 경계, 일정 유동 경계, 비유동 경계의 다양한 경계 조건들을 고려하여 다수의 오염원으로부터 시간에 따른 오염물의 전파양상을 분석할 수 있다. 개발된 모델을 기존의 오염물 거동 예측 모델인 Visual MODFLOW의 MT3D를 이용하여 검증해 본 결과, 시간에 따른 오염물의 전파양상과 용질 도달 곡선이 거의 동일하게 계산됨을 알 수 있었다. 뿐만 아니라 1차원 이론해를 이용함으로써 Visual MODFLOW보다 더 안정적인 해를 도출하며 매우 신속하게 연산을 수행하였다.

본 연구에서 개발된 모델로 다수의 오염원에 의한 오염물 거동을 분석한 결과, 다수의 오염원으로부터 전파된 용질이 관측정에 도달하는 순서에 따라 단계적으로 용질 도달 곡선이 상승하는 것을 알 수 있었다. 이 모델은 연산 회수가 많은 대규모의 복잡한 대수층에서 오염물 거동을 예측하는데 사용될 수 있을 뿐만 아니라 대수층 변수를 결정하기 위한 역산 모델링 등 다양한 분야에서 활용될 수 있다.

사 사

본 연구는 환경부의 “차세대 핵심환경기술 개발사업 (Eco-technopia 21 project)”으로 지원받은 과제이며 공학 연구소를 통하여 이루어졌습니다.

참 고 문 헌

- Anderson, M.P., 1979, Using models to simulate the movement of contaminants through groundwater flow systems, *Crit. Rev. Environ. Control*, **9**(2), 97-156.
- Batychy, R.P., Blunt, M.J., and Thiele, M.R., 1997, A 3D field scale streamline-based simulator, *SPE Reservoir Eng.*, **12**, 246-254.
- Bear, J., Tsang, C.F., and de Marsily, G., 1993, *Flow and Contaminant Transport in Fractured Rock*, Academic Press.
- Crane, M.J. and Blunt, M.J., 1999, Streamline-based simulation of solute transport, *Water Resour. Res.*, **35**(10), 3061-3077.
- Datta-Gupta, A. and King, M.J., 1995, A semianalytic approach to tracer flow modeling in heterogeneous permeable media, *Adv. Water Resour.*, **18**, 9-24.
- Jang, M. and Choe, J., 2002, Stochastic optimization for global minimization and geostatistical calibration, *J. of Hydrology*, **266**, 46-52.
- Jang, M. and Choe, J., 2004, An inverse system for incorporation of conditioning to pressure and streamline-based calibration, *J. of Contaminant Hydrology*, **69**, 139-156.
- Jang, M., Lee, J., Choe, J., and Kang, J.M., 2001, Modeling of solute transport in a single fracture using streamline simulation and experimental validation, *Journal of Hydrology*, **261**, 74-85.
- Keller, A.A., Roberts, P.V., and Blunt, M.J., 1999, Effects of fracture aperture variations on the dispersion of contaminants, *Water Resour. Res.*, **35**(1), 55-63.
- Kitanidis, P.K., 1994, Particle-tracking equations for the solution of the advection-dispersion equation with variable coefficients, *Water Resour. Res.*, **30**(11), 3225-3227.
- Kulkarni, K.N. and Datta-Gupta, A., 2000, Estimating relative permeability from production data: a streamline approach, *SPE Journal*, **5**(4), 402-411.
- Neuman, S.P., 1984, Adaptive Eulerian-Lagrangian finite element method for advection-dispersion, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **20**, 321-337.
- Thiele, M.R., Batychy, R.P., Blunt, M.J., and Orr Jr., F.M., 1996, Simulating flow in heterogeneous media using streamtubes and streamlines, *SPE Reservoir Eng.*, **10**, 5-12.
- Wang, Y. and Kovscek, A.R., 2000, Streamline approach for history matching production data, *SPE Journal*, **5**(4), 353-362.