

상호 상관관계가 있는 다중 재료상수의 불확실성에 의한 평면구조의 확률론적 거동

Probabilistic Behavior of In-plane Structure due to Multiple Correlated Uncertain Material Constants

노 혁 천†

Noh, Hyuk-Chun

(논문접수일 : 2004년 11월 29일 ; 심사종료일 : 2005년 9월 2일)

요 지

구조응답에 기여하는 중요성으로 인하여 추계론적 해석에서는 재료탄성계수의 불확실성에 의한 응답변화도에 대한 연구가 주로 진행되어 왔다. 그러나 추계론적 해석이 의미있는 값을 제공하기 위해서는 가능한 많은 인수에 대한 불확실성을 동시에 고려하여야 한다. 본 연구에서는 구조재료의 중요한 두 인수인 탄성계수와 포아송비에 나타나는 불확실성을 고려한 추계론적 해석을 위한 정식화를 평면문제에 대하여 제안하였다. 이를 위하여 이들 두 인수의 함수로 주어지는 구성행렬의 각 요소에 대한 다항식 전개를 채용하였으며, 두 인수의 불확실성에 따라 나타나는 자기 및 상호상관함수는 n-차 모멘트에 대한 일반식을 적용하여 구성하였다. 다항식 전개에 따라 부행렬의 무한함으로 변형된 구성행렬은 계산상의 편의를 위하여 요구되는 정확도 내에서 절삭하여 사용하였다. 제안된 방법의 검증은 위하여 단순 평면구조를 예제로 택하여 해석하였으며, 해석결과는 국부평균법을 채용한 고전적인 몬테카를로 해석 결과와 비교하였다.

핵심용어 : 추계론적 유한요소해석, 불확실 포아송비, 구성방정식, 응답변화도, 몬테카를로 해석.

Abstract

Due to the importance of the parameter in structural response, the uncertain elastic modulus was located at the center of stochastic analysis, where the response variability caused by the uncertain system parameters is pursued. However when we analyze the so-called stochastic systems, as many parameters as possible must be included in the analysis if we want to obtain the response variability that can reach a true one, even in an approximate sense. In this paper, a formulation to determine the statistical behavior of in-plane structures due to multiple uncertain material parameters, i.e., elastic modulus and Poisson's ratio, is suggested. To this end, the polynomial expansion on the coefficients of constitutive matrix is employed. In constructing the modified auto-and cross-correlation functions, use is made of the general equation for n-th moment. For the computational purpose, the infinite series of stochastic sub-stiffness matrices is truncated preserving required accuracy. To demonstrate the validity of the proposed formulation, an exemplary example is analyzed and the results are compared with those obtained by means of classical Monte Carlo simulation, which is based on the local averaging scheme.

keywords : *stochastic finite element method, uncertain poisson's ratio, constitutive relationship, response variability, monte carlo simulation*

1. 서 론

추계론적 해석에서 목적하는 바는 구조계 내의 해석/설계 변수에 존재하는 공간적 또는 시간적 임의성을 해석에

고려하여 이들 임의성이 구조계의 응답에 미치는 영향 정도를 파악하고 그 결과를 보다 안전하고 경제적인 구조의 설계에 적용하고자 하는 것이다. 다른 의미에서는, 확률론에 기본을 둔 구조해석을 통하여 기존에 사용하고 있는 안

† Department of Civil Engineering and Engineering Mechanics,
Columbia University, New York, NY 10027, USA
전화: +1-212-854-3143 ; Fax: +1-212-854-6267
E-mail: hcn2101@columbia.edu

• 이 논문에 대한 토론을 2005년 12월 31일까지 본 학회에 보내주
시면 2005년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

전도 개념에 보다 높은 차원의 수학적 및 역학적 배경을 제공하고자 하는 것이라고 할 수 있다. 구조계는 구조자체와 경계조건 그리고 작용하중 등으로 구성된다. 기존의 확정론적 해석에서는 이들 구조계 인수들이 공간적 및 시간적으로 확정된 값을 가지는 것으로 가정한다. 그러나 확정론에 의한 해석 결과는 일반적으로 실험에 의한 결과와는 많은 차이를 보이게 된다. 해석과 실험 사이의 이와 같은 상이함은 수치해석의 경우 기하 및 수치적 모델링 오차, 재료의 역학적 거동 모델의 오차 등에 기인하며, 실험의 경우 실험과정에 개입될 수 있는 다수의 환경적 요인에 의하여 나타날 수 있다. 그러나 이러한 요인들을 모두 배제한다고 하더라도 수치해석과 실험 사이에는 자연적인 차이가 존재할 수 있다. 이와 같은 자연적 상이함은 본질적으로 구조계에 존재하는 불확실성에 기인한다고 할 수 있다.

전술된 바와 같이 구조계 내의 모든 인수들이 자연적 불확실성을 가지고 있으나 이들 인수들의 확률적 특성이나 이들 인수들 사이의 상관관계 등은 많은 부분이 이론적 가정에 의하고 있으며, 이들 다중 인수들의 불확실성을 고려한 추계론적 유한요소해석 기법은 극히 제한된 상태에 있다. 최근까지도 많은 연구는 구조재료의 가장 중요한 인수인 탄성계수의 공간적 임의성을 다루는 부분에 집중되고 있다고 해도 과언이 아니다(노혁천, 2004; Choi 등, 1996; Deodatis 등, 1996; 2003; Falsone 등, 2002; Shinozuka 등, 1998; Papadopoulos 등, 2005). 그러나 재료적 측면에서의 추계성 모델링은 탄성계수의 공간적 불확실성은 물론 포아송비의 공간적 불확실성과 탄성계수와 포아송비 사이의 상관관계에 대한 내용이 포함되어야 한다(최상근 등, 1995; 1999; 1999; Noh, 2004). 다중 불확실 인수에 의한 영향 평가에 더하여 추계론적 해석이 지향해야 하는 한 분야는 응답변화도의 최대극한에 대한 이론적 평가이다. 이는 일종의 극한 개념으로서 불확실 인수에 의하여 나타날 수 있는 응답변화도의 최대값을 추구하는 것이다(Deodatis 등, 2003; Papadopoulos 등, 2005). 그러나 응답변화도의 최대극한에 대한 최근까지의 연구는 불확실 탄성계수에 국한되어 있으며, 따라서 다중 불확실인수에 의한 영향평가가 요구되고 있다.

본 연구에서는 재료적 측면에서 나타나는 다중 불확실 인수에 의한 응답변화도에의 영향 평가를 위한 정식화를 제시하고자 한다. 선행연구(노혁천, 2004)의 경우 평판에 대하여 동일한 문제를 다루고 있으나, 제안된 해석법은 평면응력 상태의 평면구조에만 적용이 가능하며, 따라서 평면변형률에 대한 별도의 정식화를 필요로 한다. 이를 위하여 포아송비의 함수로 표현되는 구성행렬의 요소를 다항식 전

개하여 추계장함수의 역항에 대한 인수로 분해하는 방식을 적용하였다(최상근 등, 1995; 1999; 1999; Noh, 2004). 두 불확실 인수 사이의 상관관계는 상관관계계수를 적용하여 나타내었으며, 상관관계함수는 자기상관함수와 동일한 함수를 사용하였다. 본 연구와는 달리 불확실 포아송비를 Lamé상수를 사용하여 간접적으로 다룬 연구는 참고문헌(Craham 등, 2001; Stefanou 등, 2004)에서 볼 수 있다.

비통계학적 영역에서의 추계론적 유한요소해석에는 섭동법, 급수전개법 등이 사용되는데, 본 연구에서는 급수전개법의 하나인 가중적분법에서 다중인수를 다루는 방법에 대하여 논하였다. 이 해석법은 추계장에 대한 유한요소영역에서의 가중적분(또는 추계론적 적분)으로 확률변수를 정의하여 사용한다. 가중적분법은 초기에 불확실 탄성계수를 고려한 해석을 위하여 제안된 이후(Deodatis 등, 1991), 불확실 기하인수를 포함한 해석(Choi 등, 1996)과 급수전개에서 고차항을 포함하는 해석(Choi 등, 2004) 그리고 응답변화도의 극한 산정(Papadopoulos 등, 2005) 등에 적용되었으며, 스펙트럼 밀도함수를 사용한 주파수 영역에서의 해석(Deodatis 등, 1991; Papadopoulos 등, 2005)과 자기상관함수를 이용하는 공간 영역에서의 해석(노혁천, 2004; 최상근 등, 1995; 1999; Choi 등, 1996; 2000; Noh, 2004)으로 나뉘고 있다. 본 연구는 자기상관함수를 사용하는 공간영역의 해석법을 제안하였다. 제안한 해석법의 검증을 위하여 국부평균법에 의한 몬테카를로 해석(MCS)을 동시에 수행하여 결과를 비교하였다.

2. 불확실성을 가지는 재료 상수

구조재료의 역학적 거동은 구성방정식에 의하여 정의된다. 구성방정식은 구조재료의 응력과 변형률의 관계에 의하여 구성되는 것으로서 일반적으로 재료탄성계수와 포아송비의 함수로 주어진다. 따라서, 구조 거동의 불확실성에 영향을 미치는 인자의 재료적 요인은 이들 재료상수의 공간적인 불확실성에 의한다고 할 수 있다(이들 재료상수의 시간 의존적인 불확실성은 본 논문에 포함하지 않는다). 이들 재료상수의 공간적 불확실성을 나타내는 일반적인 방법은 다음의 식에 의한다.

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}) &= E_o \{1 + f_E(\mathbf{x})\} \\ \nu(\mathbf{x}) &= \nu_o \{1 + f_\nu(\mathbf{x})\} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, 아래첨자 'o'로 나타낸 값들은 탄성계수와 포아송비의 평균값을 나타내며, $f_\alpha(x)$ ($\alpha = E$ or ν)는 탄성계

수와 포아송비의 공간적 불확실성을 나타내는 추계장함수로서 평균이 0인 등질의 함수이다. 이들 두 재료상수는 구조 영역내의 위치벡터인 $\mathbf{x} \in D_{str}$ 의 함수로 주어진다.

불확실성을 나타내는 추계장함수는, 일반적으로, 그 형태가 정확히 알려지지 않은 함수들로서, 추계장은 확률적 특성값들인 평균과 표준편차 등의 확률모멘트로 표현된다. 따라서 이들 확률장을 수치적으로 다루기 위해서는 이들 확률장의 특성을 간접적으로 나타내는 함수를 사용하게 되는데 자기상관함수(auto correlation function)와 상호상관함수(cross correlation function)가 이러한 목적으로 적용된다. Wiener Khintchine 정리에 따라 파동수(wave number)의 함수로 표현되는 스펙트럼 밀도 함수가 사용되기도 한다. 탄성계수와 포아송비의 확률적 특성에 대한 자기상관함수는 아래의 함수(식 2a)를 사용하였으며, 이 함수의 Wiener Khintchine 정리에 따르는 스펙트럼 밀도함수는 식 (2b)와 같다.

$$R_{EE}(\xi; \mathbf{x}^a, \mathbf{x}^b) = \sigma_{EE}^2 e^{-|\xi^a|/d_i}, R_{\nu\nu}(\xi; \mathbf{x}^a, \mathbf{x}^b) = \sigma_{\nu\nu}^2 e^{-|\xi^b|/d_j} \quad (2a)$$

$$S_{EE}(\mathbf{k}) = S_{\nu\nu}(\mathbf{k}) = S_{ff}(\mathbf{k}) = \frac{\sigma_{ff}^2}{\pi^2} \frac{d_x d_y}{(1+d_x^2 k_x^2)(1+d_y^2 k_y^2)} \quad (2b)$$

자기상관함수의 상대거리벡터는 두 점 a, b 에 대하여 $\xi = \mathbf{x}^b - \mathbf{x}^a$ 로 정의되며, $x_i^{ba} = x_i^b - x_i^a$ 이고, d_i 는 i 방향에서의 상관관계거리(correlation distance)를 나타낸다. 모든 주파수를 포함하는 형태인 백색잡음의 경우 d 는 0의 값을 가지며 d 가 무한대의 값을 가질 경우는 확률장이 구조 영역 내에서 상수값을 가지는 확률변수상태(Deodatis 등, 2003)를 나타낸다. $\sigma_{\alpha\alpha}$ ($\alpha = E$ or ν)는 탄성계수와 포아송비의 분산계수(coefficient of variation, COV)를 표시한다.

상호 상관관계가 있는 다중 재료상수의 공간적 불확실성을 다루기 위해서는 이들 재료상수들 사이의 상관관계를 나타내는 상호상관함수를 필요로 한다. 본 연구에서는 아래의 함수를 사용한다.

$$R_{\nu E}(\xi) = \rho_{\nu E} R_{\nu\nu}(\xi) = \rho_{\nu E} R_{EE}(\xi), \quad -1.0 \leq \rho_{\nu E} \leq 1.0 \quad (3)$$

두 확률인수 사이의 상관도는 상관관계계수(cross correlation factor, CCF) $\rho_{\nu E}$ 로 나타내었다. 상관관계계수는 $\rho_{\nu E} \in [-1, 1]$ 의 값을 가지며, 1과 1은 두 인수 사이의

음과 양의 완전상관관계를 나타낸다. 두 인수에 대하여 식 (2a)와 같이 동일한 자기상관함수를 가정할 경우 다음의 관계가 성립된다.

$$f_\nu(\mathbf{x}) = \begin{cases} f_E(\mathbf{x}) & \text{if } \rho_{\nu E} = 1 \\ -f_E(\mathbf{x}) & \text{if } \rho_{\nu E} = -1 \end{cases} \quad (4)$$

두 인수 사이의 식 (4)와 같은 관계는 몬테카를로 해석(MCS)에서 난수 발생에 필요한 메모리와 계산시간을 단축해 주는 장점이 있다. 본 연구에서 식 (2a)와 같이 두 인수에 동일한 자기상관함수를 사용한 것은 문제를 단순화하여 이들 인수의 불확실성에 의한 구조의 확률적 거동 특성을 명확히 파악하기 위한 것으로서, 두 인수가 각기 다른 형태의 자기상관함수를 가지는 경우에도 본 논문에서 제안하는 방법의 적용은 쉽게 이루어질 수 있다.

추계장함수 $f_\nu(\mathbf{x}), f_E(\mathbf{x})$ 는 평균이 0이고, 등질인 함수로서 두 함수가 표현하는 인수인 포아송비와 탄성계수의 물리적 특성을 유지하기 위하여 이들 함수는 다음의 범위 내에 있어야 한다.

$$\begin{aligned} -1 + \delta_{\nu 1} < f_\nu(\mathbf{x}) < 1 - \delta_{\nu 1}, & \text{if } \nu_o \leq 0.25 \\ 1 - \frac{\nu_{\max}}{\nu_o} + \delta_{\nu 2} < f_\nu(\mathbf{x}) < \frac{\nu_{\max}}{\nu_o} - 1 - \delta_{\nu 2}, & \text{if } \nu_o > 0.25 \\ -1 + \delta_E < f_E(\mathbf{x}) < 1 - \delta_E & \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, $\delta_{\nu 1}, \delta_E \in (0, 1)$ 그리고 $\delta_{\nu 2} \in \left(0, \frac{\nu_{\max}}{\nu_o} - 1\right)$ 이며, $\nu_{\max} = 0.5$ 이다. 이론적으로 탄성계수는 무한대의 양의 값을 가질 수 있으나 본 연구에서 불확실 탄성계수의 확률분포를 가우스분포로 가정하고자 하므로 $f_E(\mathbf{x}) < 1 - \delta_E$ 의 제한이 가해지게 된다(탄성계수가 양의 방향으로 큰 값을 가지는 분포에 대한 연구는 참고문헌(Papadopoulos 등, 2005)을 참고할 수 있다). 평균 포아송비 ν_o 에 따르는 추계장 $f_\nu(\mathbf{x})$ 의 범위도 동일한 이유로 제한된다.

3. 포아송비 추계장의 변형

평면문제에 대한 구성방정식은 평면변형률 및 평면응력 상태에 대하여 다음의 형태로 주어진다.

$$\mathbf{D}_\gamma = \frac{E}{D_\gamma} \begin{bmatrix} d_{11}^\gamma & d_{12}^\gamma & d_{13}^\gamma \\ & d_{22}^\gamma & d_{23}^\gamma \\ \text{sym.} & & d_{33}^\gamma \end{bmatrix}, \quad \gamma = \epsilon \text{ or } \sigma \quad (6)$$

평면변형률 상태의 경우, $D_\varepsilon = (1+\nu)(1-2\nu)$, $d_{11}^\varepsilon = d_{22}^\varepsilon = 1-\nu$, $d_{11}^\varepsilon = d_{22}^\varepsilon = 1-\nu$, $d_{12}^\varepsilon = \nu$, $d_{33}^\varepsilon = (1-2\nu)/2$ 이며, 평면응력 상태의 경우, $D_\sigma = 1-\nu^2$, $d_{11}^\sigma = d_{22}^\sigma = 1$, $d_{12}^\sigma = \nu$, $d_{33}^\sigma = (1-\nu)/2$ 이며, $d_{13}^\varepsilon, d_{23}^\varepsilon$ 는 0의 값을 가진다. 따라서 포아송비의 관점에서 볼 경우, 구성방정식은 $d_{ij}^\varepsilon/D_\varepsilon$ 의 함수로 표현할 수 있다. 여기서 $d_{ij}^\varepsilon/D_\varepsilon$ 는 아래와 같은 형태로 귀결됨을 관찰할 수 있다.

$$\frac{d_{ij}^\varepsilon}{D_\varepsilon} \triangleq (x) \frac{1}{1 \pm x} \quad (7)$$

기호 x 는 좌변이 형태에서 우변과 유사함을 나타내며, x 는 포아송비의 함수로서 ν , 2ν 또는 ν^2 등의 값을 가진다.

포아송비는 이론적으로 $\nu \in (0, 0.5)$ 의 개구간에 속하는 값을 가지며, 식 (7)의 우변은 다음의 조건을 만족한다.

$$(x) \frac{1}{1 \pm x} = (x)(1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \dots), \text{ if } |x| < 1.0 \quad (8)$$

식 (6), (7)에서 보듯이, $d_{ij}^\varepsilon/D_\varepsilon$ 에서 나타나는 x 의 최대 값은 $x = 2\nu$ 이고, $\nu \in (0, 0.5)$ 이므로 식 (8)의 수렴조건을 만족한다. 식 (8)의 전개식은 x 의 값이 0에 가까울수록 그 수렴이 빠르고 x 가 1에 근접할수록 수렴이 느려진다. 그러므로 비압축성 재료에 해당하는 $\nu \approx 0.5$ 와 평면변형률의 경우에 나타나는 형태인 $x = 2\nu$ 인 경우가 수렴이 가장 어려운 경우라고 할 수 있다. 그러나 본 연구에서 대상으로 하는 일반적인 구조재료의 경우 포아송비는 0.2~0.3정도의 값을 가지며, 이 경우 식 (8)의 수렴은 어렵지 않게 이루어진다. (비압축성 재료는 특수한 경우로서 이에 대한 추계론적 해석에 대한 연구는 전무한 상황이라고 해도 과언이 아니며, 본 연구에서는 논외로 하고자 한다).

따라서, 평면변형률과 평면응력 상태에 대한 구성행렬의 각 요소들은, 식 (1)과 (8) 그리고 식 (9)의 이항정리를 적용하면

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r, \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (9)$$

포아송비 본래의 추계장함수 $f_\nu(\mathbf{x})$ 의 멱항에 대한 전개 식으로 3.1과 3.2절과 같이 재 구성할 수 있다.

3.1 평면변형률상태의 경우

평면변형률상태에 대한 구성행렬 D_ε 의 각 요소들은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\mathbf{D}_{\varepsilon 11} = \mathbf{D}_{\varepsilon 22} = \frac{1-\nu(\mathbf{x})}{[1+\nu(\mathbf{x})][1-2\nu(\mathbf{x})]} = 1 + \frac{2}{3} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1, k \geq l}^{\infty} \{(-1)^k + 2^{k-1}\} \binom{k}{l} \nu_o^k f_l^\nu \quad (10a)$$

$$\mathbf{D}_{\varepsilon 12} = \frac{\nu(\mathbf{x})}{[1+\nu(\mathbf{x})][1-2\nu(\mathbf{x})]} = \frac{1}{3} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1, k \geq l}^{\infty} \{(-1)^{k+1} + 2^k\} \binom{k}{l} \nu_o^k f_l^\nu \quad (10b)$$

$$\mathbf{D}_{\varepsilon 33} = \frac{1}{2[1+\nu(\mathbf{x})]} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1, k \geq l}^{\infty} (-1)^k \binom{k}{l} \nu_o^k f_l^\nu \right\} \quad (10c)$$

3.2 평면응력상태의 경우

평면응력상태의 구성행렬 D_σ 의 각 요소들은, 평판에 나타나는 휨강성도(flexural rigidity)를 제외하며, 참고문헌 [3]에 제시된 평판구조의 경우와 동일하게 얻을 수 있다.

3.3 불확실 포아송비에 의한 구성행렬의 변형

평면변형률과 평면응력 상태에 대한 구성행렬은 포아송비의 공간적 불확실성에 따라 식 (10) 및 참고문헌 [3]의 식 (8)을 적용하여 다음과 같이 재 구성할 수 있다.

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\text{det}} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{D}_\nu^{(i)} f_\nu^i \quad (11)$$

행렬 $\mathbf{D}_\nu^{(i)}$ 는 각 응력상태에 대하여 식 (10)과 참고문헌 [3]의 (8) 식으로부터 얻어지는 행렬로 f_ν^i 의 계수들로 이루어진 행렬이며, \mathbf{D}_{det} 는 확정론적 유한요소해석에서 나타나는 구성행렬이다. 아래첨자 'ν'는 포아송비의 불확실성에 의한 행렬임을 나타내기 위하여 사용하였다.

4. 불확실 인수를 고려한 구성행렬

식 (11)내에 포함된 탄성계수를 식 (1)로 표현된 불확실 탄성계수 식으로 대치하면 식 (11)의 각 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\text{det}} &:= \mathbf{D}_{\text{det}} + f_\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D}_{\text{det}} \\ \mathbf{D}_\nu^{(i)} &:= [1 + f_\varepsilon(\mathbf{x})] \mathbf{D}_\nu^{(i)} \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)에서 ':' 기호는 좌변항이 우변항으로 대치됨을 나타낸다. 따라서 탄성계수와 포아송비가 모두 추계장함수인 경우에 대한 구성행렬은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(f_v, f_E) &= \mathbf{D}_{\det} + f_E(\mathbf{x})\mathbf{D}_{\det} + \sum_{i=1}^{\infty} [1 + f_E(\mathbf{x})]\mathbf{D}_v^{(i)} f_v^{(i)}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{D}_{\det} + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{D}^{(i)} f^{(i)}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서, $\mathbf{D}^{(0)} = \mathbf{D}_{\det}$, $\mathbf{D}^{(i)} = \mathbf{D}_v^{(i)}$ 이며, $f^{(0)}(\mathbf{x}) = f_E(\mathbf{x})$, $f^{(i)}(\mathbf{x}) = f_v^{(i)}(\mathbf{x})[1 + f_E(\mathbf{x})]$ 이다(여기서, $(\bullet)^{(i)}$ 는 합기호에 따르는 i 번째의 항을 나타내며, $(\bullet)^{(i)}$ 는 i 제곱을 의미한다).

4.1 부행렬 $\mathbf{D}^{(i)}$ 의 기여도 평가

식 (13)에서 보는 바와 같이 구성행렬은 확정론적 구성행렬 \mathbf{D}_{\det} 에 추가하여 무한함으로 전개되는 부행렬들로 구성된다. 그러나 구조의 응답변화도를 산정하기 위해서는 식 (13)의 무한합은 유한개로 제한되어야 한다.

그림 1은 식 (13)의 부행렬 $\mathbf{D}^{(i)}$ 의 행렬식을 통하여 각 행렬의 기여도를 간접 평가하여 나타낸 것이다. 그림에 보인 바와 같이 차수의 증가에 따라 기여도가 현저히 감소하고, 3차 또는 4차 이후의 기여도는 무시할 수 있을 정도로 적음을 알 수 있다. 기여도의 감소는 평면변형률 보다는 평면응력 상태의 경우 더 명확하게 나타나고 있다.

5. 추계론적 강성행렬의 구성

가중적분법을 통하여 탄성계수와 포아송비에 나타나는 공간적 불확실성을 고려한 추계론적 해석을 수행하기 위해서는 두 가지 사항이 먼저 해결되어야 한다. 첫째는 포아송비의 불확실성에 대한 고려이고(3장 참고), 둘째는 요소 강성행렬에 존재하는 확률변수에 대한 수학적 정의이다. 가중적분(또는 추계론적 적분)에 의한 확률변수의 정의는

다음과 같다.

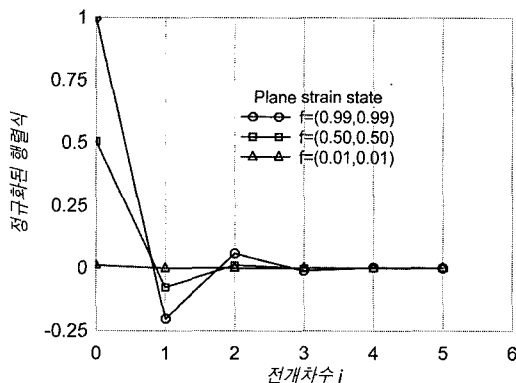
$$X = \int_V f^{(n)}(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) dV \quad (14)$$

여기서, $g(\mathbf{x})$ 는 기지의 함수이며, $f^{(n)}(\mathbf{x})$ 는 다중 추계장 함수를 다루기 위하여 일반화된 형태의 추계장 함수이다. 추계성을 가지는 유한요소 내의 확률변수를 식 (14)와 같이 정의하기 위해서는 변위 변형률 행렬인 \mathbf{B} 행렬을 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_i p_i$ ($i = 1, 2, \dots, N_p$)로 분해할 필요가 있다. 여기서, \mathbf{B}_i 는 독립인 다항식 p_i 에 곱해지는 상수만을 요소로 가지는 상수 행렬이다. 이 경우 요소강성행렬은 다음과 같이 쓸 수 있다.

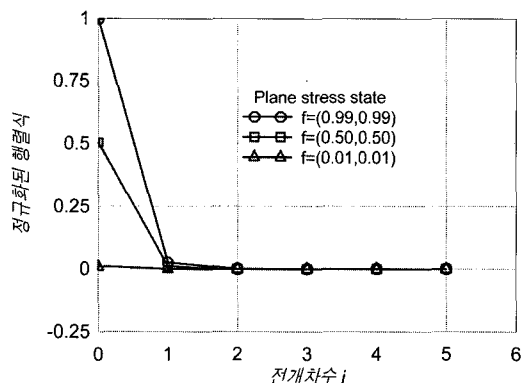
$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}(f_v, f_E) \mathbf{B} dV \\ &= \int_V \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}(f_v, f_E) \mathbf{B}_j p_i p_j dV \\ &\quad i, j = 1, 2, \dots, N_p \end{aligned} \quad (15)$$

N_p 는 행렬 \mathbf{B} 내에 포함된 독립인 다항식의 수를 나타내며, 반복되는 첨자는 합을 의미한다. 구성행렬이 $\mathbf{D} = \mathbf{D}(f_v, f_E)$ 로 주어지므로 식 (13)을 식 (15)에 대입하면,

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \int_V \mathbf{B}_i^T \left\{ \mathbf{D}_{\det} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{D}^{(k)} f^{(k)}(\mathbf{x}) \right\} \mathbf{B}_j p_i p_j dV \\ &= \int_V \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_{\det} \mathbf{B}_j p_i p_j dV + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{B}_j \int_V f^{(k)}(\mathbf{x}) p_i p_j dV \\ &= \mathbf{k}_{\det} + \sum_{k=0}^{\infty} \delta \mathbf{k}^{(k)} \\ &= \mathbf{k}_{\det} + \mathbf{k}_{\pm} \end{aligned} \quad (16)$$



(a) 평면변형률 상태



(b) 평면응력 상태

그림 1 차수 증가에 따른 부행렬 $\mathbf{D}^{(i)}$ 의 행렬식 변화

Note: 그림에서 추계장 쌍은 $f = (f_v, f_E)$ 를 의미하며, 모든 값은 $i=0$, $f=(0.99, 0.99)$ 에 대하여 정규화된 값임.

식 (16)은 가감강성행렬 k_{\pm} 가 가중적분으로 정의되는 확률변수 $X_{ij}^{(k)}$ 의 함수로 주어짐을 보여주고 있다. 여기서, 확률변수 $X_{ij}^{(k)}$ 는 식 (16)에 보이듯이 다음과 같이 정의된다.

$$X_{ij}^{(k)} = \int_V f^{(k)}(\mathbf{x}) p_i p_j dV \quad (17)$$

그러므로 요소강성행렬과 전체강성행렬도 확률변수 $X_{ij}^{(k)}$ 의 함수임을 알 수 있다.

5.1 평균강성행렬

식 (16)은 확률변수의 함수로 주어지는 요소강성행렬을 확정론적 강성행렬 \mathbf{k}_{det} 와 가감강성행렬 \mathbf{k}_{\pm} 의 합으로 나타내고 있다. 그러나 요소강성행렬의 평균은 확정론적 강성행렬과는 다른데, 이는 가감강성행렬에서 평균항에 기여하는 부분이 있기 때문이다. 평균강성행렬 \mathbf{k}_0 는 아래와 같이 얻을 수 있다.(여기서, $E[\bullet]$ 는 평균연산자를 나타낸다.)

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_0 &= E[\mathbf{k}] \\ &= \mathbf{k}_{det} + E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{B}_j \int_V f^{(k)}(\mathbf{x}) p_i p_j dV\right] \\ &= \mathbf{k}_{det} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{B}_j \int_V E[f^{(k)}(\mathbf{x})] p_i p_j dV \end{aligned} \quad (18)$$

식 (13)에서 정의된 수정자기상관함수 $f^{(k)}(\mathbf{x})$ 에 대한 평균을 살펴보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E[f^{(0)}(\mathbf{x})] &= E[f_E(\mathbf{x})] = 0 \\ E[f^{(k)}(\mathbf{x})] &= E[f_v^k(\mathbf{x})\{1 + f_E(\mathbf{x})\}] \\ &= \begin{cases} E[f_v^k(\mathbf{x})f_E(\mathbf{x})], & \text{if } k \text{ is odd} \\ E[f_v^k(\mathbf{x})], & \text{if } k \text{ is even} \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)에 나타난 평균 연산은 n-차 모멘트에 대한 일반식인 다음의 식을 통하여 수정된 자기상관함수로 구할 수 있다(Lin, 1967). 따라서 요소강성행렬을 $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \Delta\mathbf{k}$ 로 구성하면, 실제의 가감강성행렬 $\Delta\mathbf{k}$ 는 다음과 같다.

$$\Delta\mathbf{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta\mathbf{k}^{(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{B}_j \int_V E[f^{(k)}(\mathbf{x})] p_i p_j dV \quad (20)$$

변위의 평균값은 식 (18)의 평균강성행렬을 사용하여 구한다.

5.2 확률변수의 종류 및 전체 수

식 (16)에서 보는 바와 같이 확률변수는 k 에 따라 다른 형태를 가지며, 각 k 에 대하여 계산되는 확률변수의 수는 $N_{RV}^{(k)} = N_p(N_p + 1)/2$ 와 같음을 알 수 있다. 따라서 k 를 m 까지만 전개할 경우 전체 확률변수의 수는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$N_{RV} = \sum_{k=0}^m N_{RV}^{(k)} = (m+1) \frac{1}{2} N_p(N_p + 1) \quad (21)$$

여기서부터는 확률변수를 $X_{ij}^{(k)}$ 대신 전체확률변수에 대한 표기인 X_{RV} 또는 각 k 에 대한 확률변수의 표기인 $X_{RV}^{(k)}$ 를 사용하고자 한다. 따라서 확률변수벡터는 다음과 같이 두 가지의 형태로 표현이 가능하다.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \langle X_{RV}; RV=1,2,\dots,N_{RV} \rangle^T \\ &= \langle X_{RV}^{(k)}; k=0,1,2,\dots,m; RV^{(k)}=1,2,\dots,N_{RV}^{(k)} \rangle^T \end{aligned} \quad (22)$$

즉, 확률변수는 k 에 따라 다른 형태를 가지며 각 형태에 대하여 $N_{RV}^{(k)}$ 개의 확률변수가 존재하고, 전체적으로 $N_{RV} = (m+1)N_{RV}^{(k)}$ 개의 확률변수가 존재하게 된다.

6. 평면구조의 확률적 거동을 위한 정식화

가중적분법을 포함한 급수전개법에 의한 추계론적 해석 정식화에서는 주로 1차 Taylor 전개가 사용된다. 식 (16)에서 요소강성행렬이 N_{RV} 개의 확률변수의 함수로 표현되었으므로 강성행렬의 역변환과 확정론적 하중행렬의 곱으로 산정되는 변위벡터도 확률변수의 함수임을 알 수 있다. 따라서 변위벡터를 확률변수의 평균항에 대하여 1차 전개하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{U} \approx \mathbf{U}_0 + \Delta X_{RV}^e [\mathbf{U}_{(RV,e)}]_E; \quad e=1,\dots,N_e; RV=1,\dots,N_{RV} \quad (23)$$

여기서, \mathbf{U}_0 는 식 (18)의 평균강성행렬을 통하여 얻은 평균변위벡터이며, $\Delta X_{RV}^e = X_{RV}^e - X_{RV}^{eo}$, $X_{RV}^{eo} = E[X_{RV}^e]$, $[\mathbf{U}_{(RV,e)}]_E = [\partial\mathbf{U}/\partial X_{RV}^e]_E$, $[\bullet]_E$ 는 평균에서의 연산을 의미한다. N_e 는 요소수를 나타내며, N_{RV} 는 요소내의 확률변수 수로서 식 (21)에서 정의되었다. 반복되는 첨자(RV, e)는 각 첨자에 대한 합을 나타낸다. 식 (23)에서 변위벡터에 대한 편미분을 평형방정식에 대한 편미분에서 얻어지는

강성행렬에 대한 편미분으로 대치하면 식 (24)를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{U} \approx \mathbf{U}_o - \sum_{k=0}^m \Delta X_{RV^{(k)}}^{e(k)} \mathbf{K}_o^{-1} \left[\mathbf{K}_{\gamma(RV^{(k)}, e(k))} \right]_E \mathbf{U}_o; \quad e=1, \dots, N_e; \\ RV^{(k)} = 1, \dots, N_{RV}^{(k)} \quad (24)$$

식 (24)는 식 (23)을 확률변수의 종류별로 나누어 쓴 것으로(식 (17) 참고), 식 (16)에서 k를 m까지 제한한 경우에 대한 식이다. 여기서, $\Delta X_{RV^{(k)}}^{e(k)} = X_{RV^{(k)}}^{e(k)} - X_{RV^{(k)}}^{e(k)o}$, $X_{RV^{(k)}}^{e(k)o} = E[X_{RV^{(k)}}^{e(k)}]$ 이다. 확률변수에 대한 평균이 $X_{RV^{(k)}}^{e(k)o} = E[X_{RV^{(k)}}^{e(k)}]$ 로 주어지므로 식 (24)에 대하여 평균연산을 가하면 변위에 대한 평균 μ_U 는 평균강성행렬에 의하여 계산되는 값인 \mathbf{U}_o 가 됨을 알 수 있다.

$$\mu_U = E[\mathbf{U}] = \mathbf{U}_o \quad (25)$$

변위에 대한 표준편차와 그에 따르는 분산계수를 얻기 위하여 변위에 대한 공분산을 나타내면 다음의 식과 같다. 공분산은 $\Sigma_U = Cov[\mathbf{U}] = E[(\mathbf{U} - \mathbf{U}_o)(\mathbf{U} - \mathbf{U}_o)^T]$ 로 정의되므로 먼저 $\mathbf{U} - \mathbf{U}_o$ 를 나타내면 식 (24)로부터 식 (26)을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{U}_o = - \sum_{k=0}^m \Delta X_{RV^{(k)}}^{e(k)} \mathbf{K}_o^{-1} \left[\mathbf{K}_{\gamma(RV^{(k)}, e(k))} \right]_E \mathbf{U}_o \\ = -X_{RV}^e \mathbf{K}_o^{-1} \left[\mathbf{K}_{\gamma(RV, e)} \right]_E \mathbf{U}_o + \sum_{k=0}^m X_{RV^{(k)}}^{e(k)} \mathbf{K}_o^{-1} \left[\mathbf{K}_{\gamma(RV^{(k)}, e(k))} \right]_E \mathbf{U}_o; \quad RV=1, \dots, N_{RV} \\ = -\Xi_{RV} + \sum_{k=1}^m \Xi^{(k)} \quad (26)$$

식 (26)에서 k가 0일 경우는, $f^{(0)}(\mathbf{x}) = f_E(\mathbf{x})$ 이고 따라서 식 (16)에서 $E[X_{RV^{(0)}}^{e(0)}] = X_{RV^{(0)}}^{e(0)o} = 0$ 이므로, $\Xi^{(0)} = 0$ 이 되어 합기호의 첨자 k가 1에서 시작되는 것으로 수정되었다. 그러므로 변위의 공분산은 다음과 같다.

$$\Sigma_U = E \left[\left(-\Xi_{RV} + \sum_{k=1}^m \Xi^{(k)} \right) \left(-\Xi_{RV} + \sum_{k=1}^m \Xi^{(k)} \right)^T \right] \\ = E \left[\Xi_{RV} \Xi_{RV}^T \right] - \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m E \left[\Xi^{(r)} \Xi^{(s)T} \right] \quad (27)$$

식 (16)과 (20)으로부터 강성행렬은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{det} + \mathbf{k}_{\pm} \\ = [\mathbf{k}_{det} + (\square)] + [\mathbf{k}_{\pm} - (\square)] \\ = \mathbf{k}_o + \Delta \mathbf{k} \quad (28)$$

따라서, 식 (27)은 평균변위 \mathbf{U}_o 를 계산하기 위하여 평균강성행렬 $\mathbf{k}_o = \mathbf{k}_{det} + (\square)$ 를 사용함에 따라 추가항 (\square) (식 18 또는 20)를 보상하기 위하여 공분산의 연산에서 \mathbf{k}_{\pm} 대신 $[\mathbf{k}_{\pm} - (\square)]$ 를 사용한 결과와 등가의 것이라고 할 수 있다. 이러한 사실은 다음 절의 하중등가공분산행렬에 대한 고찰에서 나타나고 있다.

6.1 하중등가공분산행렬의 산정

식 (27)의 첫 항의 구체적인 형태는 다음과 같다.

$$\Sigma_U^{RV} = E \left[\Xi_{RV} \Xi_{RV}^T \right] \\ = E \left[\left(X_{RV^i}^{ei} \mathbf{K}_o^{-1} \left[\mathbf{K}_{\gamma(RV^i, ei)} \right]_E \mathbf{U}_o \right) \left(X_{RV^j}^{ej} \mathbf{K}_o^{-1} \left[\mathbf{K}_{\gamma(RV^j, ej)} \right]_E \mathbf{U}_o \right)^T \right] \\ = \mathbf{K}_o^{-1} \sum_{ei, ej=1}^{N_e} \left[\bar{\mathbf{F}}_{ei ej} \right]_E \mathbf{K}_o^{-T} \quad (29)$$

식 (27)의 두번째 항은 다음의 합으로 얻을 수 있다.

$$\Sigma_U^{(rs)} = E \left[\Xi^{(r)} \Xi^{(s)T} \right] \\ = \left(X_{RV^r}^{er} \mathbf{K}_o^{-1} \left[\mathbf{K}_{\gamma(RV^r, er)} \right]_E \mathbf{U}_o \right) \left(X_{RV^s}^{es} \mathbf{K}_o^{-1} \left[\mathbf{K}_{\gamma(RV^s, es)} \right]_E \mathbf{U}_o \right)^T \\ = \mathbf{K}_o^{-1} \left(\sum_{e=1}^{N_e} \int R_{VE}^{(r)}(\xi) \delta \mathbf{k}^{e(r)} dV \mathbf{U}_o \right) \left(\sum_{e=1}^{N_e} \int R_{VE}^{(s)}(\xi) \delta \mathbf{k}^{e(s)} dV \mathbf{U}_o \right)^T \mathbf{K}_o^{-T} \\ ; r, s = 1, \dots, m \quad (30)$$

여기서, 적분기호 내의 상관함수는 $R_{VE}^{(r)}(\xi) = E[f^{(r)}]$ 이며, $\delta \mathbf{k}^{e(r)}$ 은 식 (16)에서 정의된 불확실 재료상수들에 의한 추계성을 포함하는 부분강성행렬이다. 식 (30)은 요소 단위로 개별적으로 계산되므로 계산시간은 식 (29)에 비하여 매우 적으며 결과에 대한 영향도 매우 미세한 것으로 나타났다.

공분산의 계산을 완결하기 위해서는 식 (29)의 합기호에 포함된 항을 산정하여야 한다. 이 항의 형태는 다음의 식 (31)과 같으며, 평균연산자 내의 항에서 볼 수 있는 바와 같이 하중등가항에 대한 공분산이므로 이를 하중등가공분산행렬이라고 부르기로 한다.

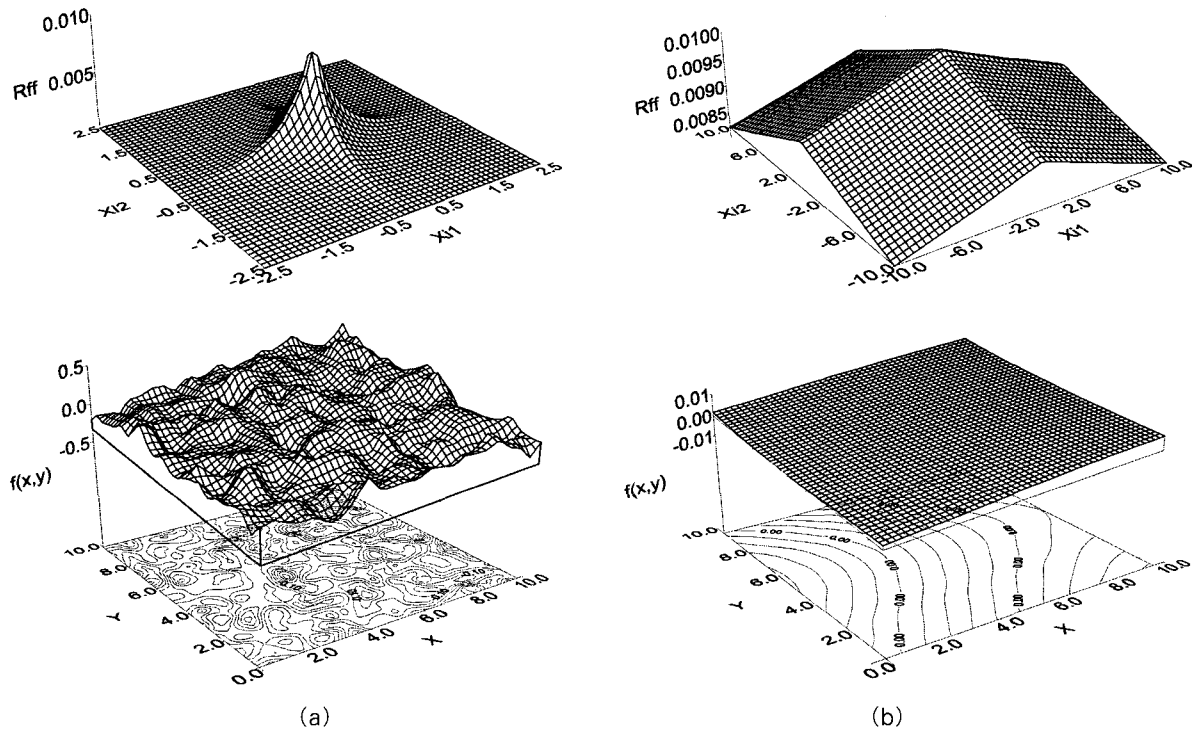


그림 2 상관관계거리에 따른 자기상관함수와 추계장의 예: (a) d=0.5, (b) d=100.0

$$\left[\bar{\mathbf{F}}_{eiej} \right]_E = E \left[\mathbf{k}_{\pm}^{ei} \mathbf{U}_o \mathbf{U}_o^T \mathbf{k}_{\pm}^{ej} \right] \quad (31)$$

식 (16)에 정의된 가감강성행렬 \mathbf{k}_{\pm} 을 식 (31)에 대입하면 하중등가공분산행렬은 다음의 식으로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \left[\bar{\mathbf{F}}_{eiej} \right]_E &= E \left[\left(\delta \mathbf{k}_{ei}^{(0)} + \delta \mathbf{k}_{ei}^{(1)} + \dots + \delta \mathbf{k}_{ei}^{(m)} \right) \mathbf{U}_o \mathbf{U}_o^T \left(\delta \mathbf{k}_{ej}^{(0)} + \delta \mathbf{k}_{ej}^{(1)} + \dots + \delta \mathbf{k}_{ej}^{(m)} \right) \right] \\ &= \int_{V^a} \int_{V^e} \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m \left\{ E \left[f^{(k)}(\mathbf{x}_{ei}) f^{(l)}(\mathbf{x}_{ej}) \right] \tilde{\mathbf{k}}_{ei}^{(k)} \mathbf{U}_o \mathbf{U}_o^T \tilde{\mathbf{k}}_{ej}^{(l)} \right\} dV^{ej} V^{ei} \\ &= \int_{V^a} \int_{V^e} \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m \left\{ R_{VE}^{(kl)}(\xi) \tilde{\mathbf{k}}_{ei}^{(k)} \mathbf{U}_o \mathbf{U}_o^T \tilde{\mathbf{k}}_{ej}^{(l)} \right\} dV^{ej} V^{ei} \end{aligned} \quad (32)$$

수정자기상관함수 $R_{VE}^{(kl)}(\xi)$ 은 $R_{\nu\nu}(\xi)$, $R_{EE}(\xi)$, $R_{\nu E}(\xi)$ 의 함수로 주어지며, 그 계산은 식 (19)를 따른다.

6.2 분산계수

구조 응답에 대한 확률적 거동을 나타내기 위하여 식 (27)를 통하여 얻을 수 있는 공분산을 제시할 수도 있으나 분산의 크기에 대한 척도를 제시하기 위해서는 평균에 대한 비례값을 검토하는 것이 타당하다고 할 수 있다. 따라서 분산계수(coefficient of variation: COV)를 통하여 구조 응답의 변화도를 나타내게 된다. 분산계수는 변위 R의 표준편차 σ_R 의 평균 μ_R 에 대한 비로 다음과 같다.

$$COV = \frac{\sigma_R}{|\mu_R|} \quad (33)$$

서로 다른 자유도에 대한 분산계수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$COV_{ij} = \sqrt{\frac{E \left[(R_i - R_i^o)(R_j - R_j^o) \right]}{R_i^o R_j^o}} \quad (34)$$

식 (34)에서는 제공된 내의 값 A가 음의 값을 가질 수도 있으므로 A가 음일 경우 $-\sqrt{|A|}$ 를 취하여 나타낸다.

7. 예제해석

7.1 몬테카를로 시뮬레이션

제안된 가중적분법에 의한 해석 결과를 검증하기 위하여 몬테카를로 시뮬레이션(MCS)을 동시에 수행하였다. MCS는 해석 대상 추계장에 대한 표본을 N개 생성하고 각 표본에 대한 확률론적 해석을 수행한 후 그 결과들에 대한 통계처리를 통하여 구조 응답의 변화도를 얻는 통계학적 방법이다. 따라서 효과적이고 정확한 표본생성 알고리즘(Stefanou 등, 2004; Yamazaki 등, 1990)이 요구되며, 해석에 매우 많은 시간을 요한다. 본 연구의 경우 통계학

적 전처리 방법(Yamazaki등, 1990)을 통하여 표본을 생성하였다. 이 방법에서는 추계장의 1차 및 2차 모멘트를 만족시키기 위하여 $4 \times nelem \times nf$ 개의 표본을 생성해야 하는데 이는 MCS해석의 관점에서는 상대적으로 적은 수의 표본이라고 할 수 있다. 여기서, $nelem$ 은 구조모델에 사용한 유한요소의 개수이며, nf 는 알고리즘이 요구하는 cosine 항의 수이다. 그러나 $nelem$ 을 그대로 사용하는 중앙점법(mid point rule)의 경우 해석 결과가 바람직하지 않다는 사실이 잘 알려져 있으며, 이는 저자의 경험이기도 하다. 따라서 본 연구에서는 국부평균법(local average method)을 사용하고자 한다. 이 방법은 각 요소 내에 다수의 random number를 생성하고 이에 대한 평균을 취하여 적용하는 방법이다. 따라서 요소 내에 np 개의 적분점을 사용한다면 전체 표본 수는 $4 \times nelem \times nf \times np$ 로 결정된다. 본 연구에서는 해석 대상 평면문제에 대한 모델링에서 6×6 의 요소망을 사용하였고 각 요소에 4×4 의 적분점을 사용하였다. 따라서 전체 표본 수는 $4 \times (6 \times 6) \times nf \times (4 \times 4)$ 가 되며, nf 는 5의 값을 사용하여 모두 11,520개의 표본을 생성, 해석에 사용하였다. 실제로 MCS의 경우 식 (2)에 제시된 자기상관함수의 인수인 상관관계거리 d 의 값에 따라 다른 수의 표본이 사용될 수 있는데, d 가 작은 경우는 많은 수의 표본을 그리고 d 가 큰 경우에는 적은 수의 표본을 사용할 수 있다.

그림 2는 d 의 값이 0.5일 경우와 100일 경우에 대하여 수치생성한 추계장 표본의 예를 보여주고 있다. 그림 2(a)의 경우 추계장은 개략적으로 $f(x, y) \in (-0.35, 0.35)$ 의 범위에 있으면서 큰 변화를 보이고 있으나 그림 2(b)의 경우 $f(x, y) \in (0.001 \sim 0.004)$ 의 값을 가지고 적은 변화를 나타내고 있으며 구조영역 내에서 근사적으로 일정한

값을 가지고 분포함을 알 수 있다. 극한의 경우인 $d = \infty$ 의 경우는 추계장이 하나의 값을 가지는 확률변수 상태가 되며, 추계장이 아닌 확률변수만으로 해석을 수행할 수 있다.

7.2 평면문제에 대한 해석

해석 예제로는 구조 상부에 등분포 하중 q 가 단위길이 당 100의 하중으로 작용하는 평면문제에 대한 해석을 수행하였다. 구조 및 하중의 크기와 형태는 그림 3에 나타내었다.

재료상수로는 타성계수 $E_0 = 2.1 \times 10^6$, 포아송비 $\nu_0 = 0.2$ 의 값을 사용하였다. 평면변형률의 경우 구조의 두께는 1.0으로 택하였다. 구조응답의 분산계수는 그림 3의 A점에 대한 변위에 대하여 제시하며, 서로 다른 두 자유도에서의 상관관계계수(식 39)는 두 점 A, B에 대하여 제시하고자 한다.

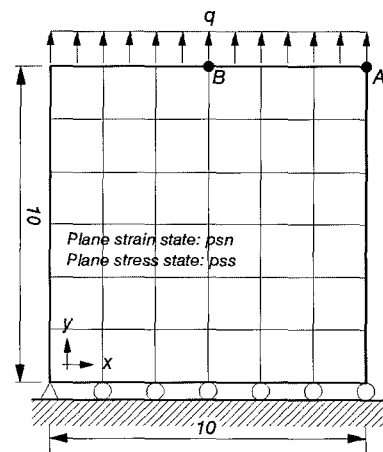
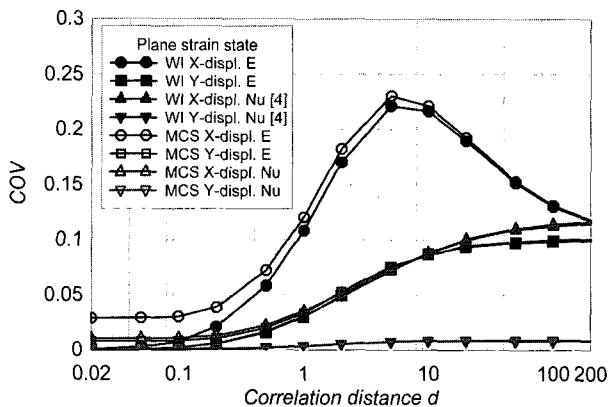
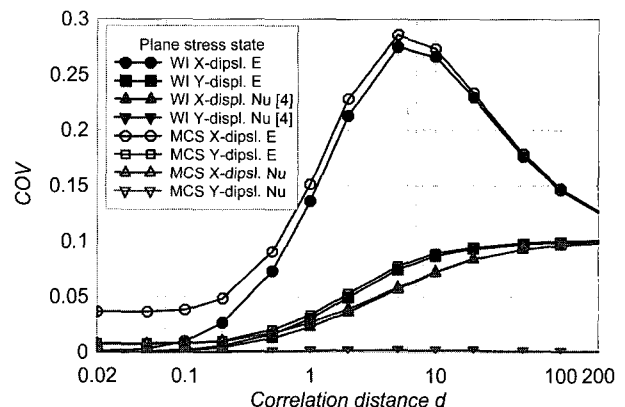


그림 3 해석 대상 구조



(a) 평면변형률 상태



(b) 평면응력 상태

그림 4. 응답변화도에 대한 개별 불확실 인수의 영향: (a) 평면변형률 상태, (b) 평면응력 상태. 참고: 평균 포아송비 $\nu_0 = 0.2$

7.2.1 개별인자의 불확실성에 의한 응답변화도

제안된 방법은 탄성계수와 포아송비 두 인수에 불확실성이 존재하는 경우에 대한 해석법으로서, 이들 인수 중 어느 하나의 추계장 분산계수를 0으로 할 경우 단일 불확실 인수에 대한 해석 결과를 나타내어야 한다. 이를 검토하기 위하여 단일 불확실 인수에 대한 해석을 수행하였으며, 가능한 경우 선행연구 결과 및 MCS 결과와 비교하였다.

불확실 탄성계수에 의한 x 방향 분산계수는 상관관계거리 $d=5.0$ 에서 최대값이 나타나며, y 방향의 변위는 확률변수 상태에서 탄성계수의 분산계수와 같은 값(0.1)을 나타내고 있다. 불확실 포아송비에 의한 x 방향의 분산계수는 평면응력 상태에서는 포아송비의 분산계수와 같은 값을 나타내지만, 평면변형률의 경우 약 15% 증가된 값을 나타내고 있다. 그러나 하중방향(y 방향)의 경우에는 매우 적은 응답변화도를 보이고 있다. 포아송비의 특성에 따라 분산계수는 하중 직각방향에서 크게 나타남을 알 수 있다. 이들 결과들은 기존의 연구(최창근 등, 1999; Noh, 2004)와 본 연구에서 수행한 MCS에 의한 결과와 잘 일치하고 있다.

7.2.2 다중 재료상수의 불확실성에 의한 응답변화도

1) 평면변형률상태

제시하는 결과 그림이 복잡해지는 것을 방지하기 위해 결과 제시에서 MCS의 결과는 상관관계계수(CCF)가 1.0인 경우에 대해서만 나타내고자 한다. 그림에서 보는 바와 같이 제안한 가중적분법의 결과는 x 및 y 방향의 변위에 대한 응답변화도에서 MCS의 결과와 잘 일치하고 있다. 양의 완전상관관계(CCF=+1.0)와 상관관계가 없는 경우

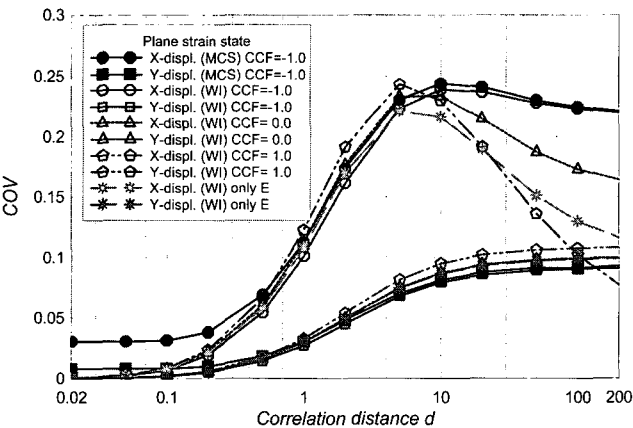


그림 5 평면변형률 상태에서의 다중 불확실인수에 의한 응답변화도

(CCF=0.0)에 대한 결과도 MCS의 결과와 같은 정도로 일치함을 명기한다.

그림에서 보는 바와 같이 구조의 응답변화도는 두 불확실 인수 사이의 상관관계가 영향을 미치고 있음을 알 수 있다. 비교를 위하여 탄성계수만을 불확실 인수로 고려했을 때의 응답변화도를 함께 나타내었다. X 방향변위의 경우 상관관계 정도에 관계 없이 최대값이 증가하고 있으며($d=5.0$), 응답변화도는 상관관계계수(CCF)가 증가함에 따라 확률변수 상태에 근접하면서 그 값이 감소하는 특성을 보이고 있다. Y 방향변위의 경우 $d=200$ 에서 나타나는 최대값은 상관관계계수에 의하여 증가 또는 감소하고 있음을 알 수 있다. 포아송비가 0.2인 현재의 경우 개략적으로 7~8%정도의 증감을 나타내었다.

2) 평면응력상태

평면응력 상태에서도 탄성계수 외에 포아송비가 불확실 인수로 개입되면서 x 방향 변위의 변화도의 최대값($d=5.0$)가 증가하는 경향을 보이고 있다. 평면응력 상태의 경우 평면변형률 상태에 비하여 두 가지의 차이를 나타냄을 알 수 있다. 첫째는 x 방향 응답변화도의 최대값이 평면변형률 상태보다 크게 나타난다는 것이며, 다른 하나는 y 방향 변위의 경우 두 인수 사이의 상관관계에 의한 영향이 거의 나타나지 않는다는 것이다. 이러한 결과는 평면응력 상태가 평면변형률 상태에 비하여 포아송효과방향(하중 직각방향)으로의 움직임이 자유롭기 때문에 나타나는 것으로, 포아송비의 불확실성에 의한 응답변화도는 평면변형률 상태에서 더 중요성을 가짐을 보여주고 있다고 하겠다.

두 경우 모두 x 방향의 응답변화도가 y 방향에 비해 크게 나타나고 있는으나 확정론적 거동은 y 방향이 x 방향에 비하여 4배(평면변형률) 또는 5배(평면응력)정도의 값을 나타

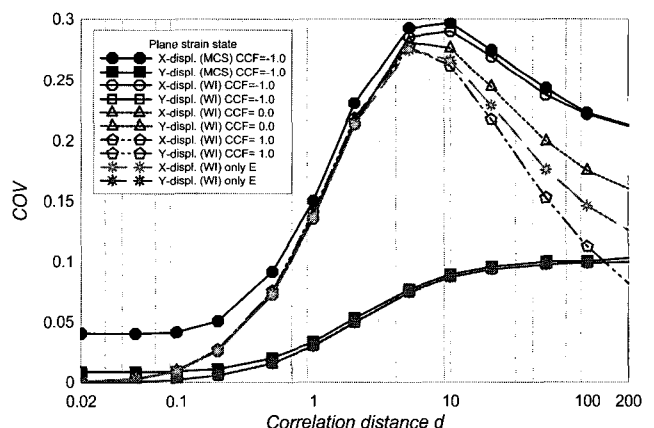


그림 6 평면응력 상태에서의 다중 불확실인수에 의한 응답변화도

념으로 실질적으로는 x 와 y 방향 모두에서 동등한 정도의 중요성을 가진다고 할 수 있다.

7.2.3 두 점 사이의 상관관계

그림 3의 두 점 A, B에 대한 분산계수는 식 (39)으로 얻어지며 이는 그림 7과 같다.

그림에서 COV_{ij} 는 A점에서의 i 방향 변위와 B점에서의 j 방향 변위 사이의 분산계수를 의미한다. 다른 경우와는 달리 COV_{xy} 의 경우 분산계수가 음의 값을 나타내고 있다. A, B점의 평균변위가 $x_A^0 < 0$ 이고, $y_B^0 > 0$ 이므로 $(x_A - x_A^0)(y_B - y_B^0) > 0$ 의 관계가 성립한다. 따라서, $y_B > y_B^0$ 인 경우 $\|x_A\| < \|x_A^0\|$ 이고, $y_B < y_B^0$ 인 경우 $\|x_A\| > \|x_A^0\|$ 인 관계에 있음을 알 수 있다. 이러한 결과는 COV_{yx} 와 반대되는 결과로서 물리적인 관측과는 대치되는 결과라고 할 수 있다. 두 경우를 변위의 크기를 중심으로 도식화하면 그림 8과 같다. 사분된 영역은 두 경우에서 x, y 방향으로의 변위가 존재 가능한 영역을 평균적 의미에서 나타낸다고 할 수 있다.

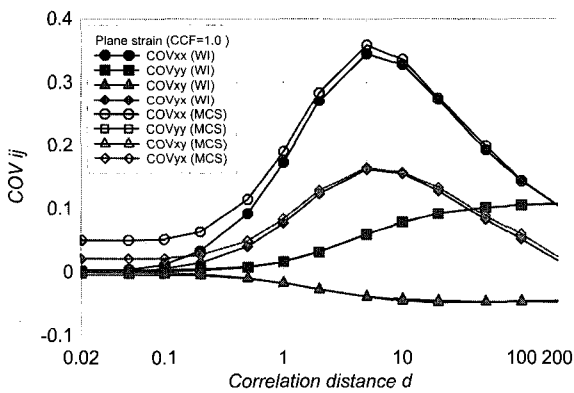


그림 7 A, B점 사이의 상관관계

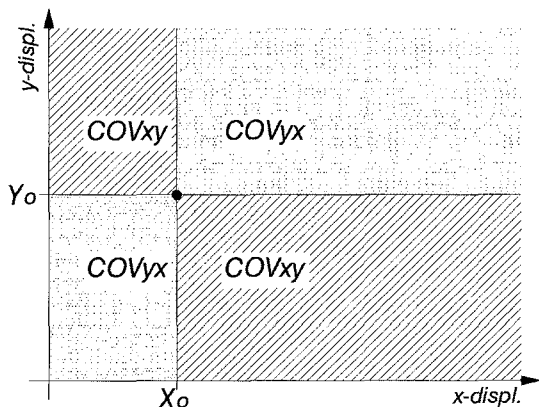


그림 8 서로 다른 자유도 사이의 분산계수에 대한 도식화

7.2.4 포아송비 값의 변화에 따른 민감도

그림 9는 구조 응답변화도에 대한 평균 포아송비의 영향을 보여주고 있다. 하중직각방향(x 방향) 변위의 경우 포아송비의 증가에 따라 응답변화도가 지수함수적으로 감소하는 경향을 나타내고 있으며, 하중방향(y 방향)의 경우 평면변형률 상태에서 평균 포아송비의 증가에 따른 응답변화도의 증가가 나타나고 있다. 그러나 평면응력 상태의 경우에는 매우 적은 변화 정도를 보이고 있다.

8. 결 론

본 논문에서는 상호 상관관계가 있는 다중 불확실 재료 상수에 의한 평면구조의 응답변화도 해석을 위한 정식화를 가중적분법의 영역에서 제시하였다. 해석에 고려한 불확실 인수는 탄성계수와 포아송비로서 수학적 비선형 형태에 있는 포아송비를 고려하기 위하여 포아송비를 포함한 구성방정식의 요소에 대한 다항식 전개 방식을 채택하였다. 또한 요소강성행렬을 확률변수의 함수로 나타내기 위하여 변위 변형률 행렬을 상수행렬로 분해한 후, 변위벡터를 1차 Taylor전개하여, 평면구조의 변위에 대한 1차 모멘트(평균)와 2차 모멘트(공분산)를 산정하였다. 확률변수는 탄성계수와 포아송비에 대한 추계장함수의 함수로 표현된 일반화된 추계장함수를 포함하는 가중적분(추계론적분)으로 구성되었으며, 공분산에 대한 식에서 나타나는 이들 함수에 대한 평균연산에 의한 수정된 자기상관함수는 n 차 모멘트에 대한 일반식을 적용하여 구성하였다.

탄성계수와 포아송비의 공간적 불확실성에 의한 평면구조의 응답변화도는 두 인수 사이의 상관관계(상관관계계수)에 따라 특징적인 영향을 나타내었다. 일반적으로 불확실 탄성계수에 더하여 불확실 포아송비를 추가할 경우 이

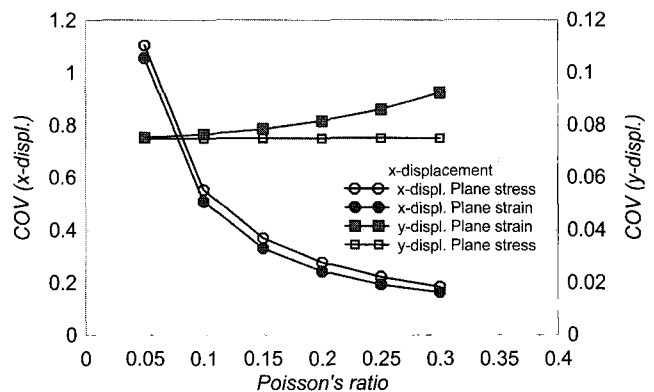


그림 9 평균 포아송비의 변화에 따른 구조 응답변화도의 변화

들 인수 사이에 상관관계가 없는 경우에도 구조의 응답변화도는 증가하는 것으로 나타났으며, 특히 평면변형률의 경우가 평면응력의 경우에 비하여 그 영향이 상대적으로 큰 것으로 나타났다. 이는 구조의 확률론적 거동 해석에서 불확실성을 가지는 다중 인수에 대한 고려의 중요성을 보여준다고 하겠다. 응답변화도는 추계장의 상관관계거리 d 의 함수로 나타났으며, 응답변화도의 최대값은 자유도에 따라 다르게 나타나 $d = \infty$ 에서만 나타나는 것은 아닌 것으로 관찰되었다. 나아가, 상관관계계수가 음의 값을 가지는 경우에는 응답변화도가 감소하여, 다중 불확실 인수에 의한 확률론적 거동해석에서 일방적 과대평가가 아닌 실질적 결과를 제시하기 위해서는 재료상수 사이의 상관관계에 대한 실험적 및 이론적 고찰이 필요할 것으로 사료된다. 제안된 정식화에 의한 결과는 검증을 위하여 수행된 몬테카를로 해석과도 잘 일치하는 것으로 나타났다.

참 고 문 헌

- 노혁천(2004) 불확실성을 가지는 재료상수간의 상관관계를 고려한 평판구조의 추계론적 유한요소해석 정식화, 대한토목학회논문집, 24(4A), pp.779~788
- 노혁천(2004) 비선형 형태를 가지는 재료상수의 공간적 불확실성에 의한 평면구조의 응답변화도 해석을 위한 정식화, 대한토목학회논문집, 24(5A), pp.885~894
- 최창근, 노혁천(1995) 평판구조의 추계론적 유한요소해석, 한국전산구조공학회 논문집, 8(1), pp.127~136
- 최창근, 노혁천(1999) 가중적분법을 이용한 반무한영역의 추계론적 유한요소해석, 한국전산구조공학회논문집, 12(2), pp.129~140
- Choi, C.K., Noh, H.C.(1996) Stochastic finite element analysis of plate structures by weighted integral method, *Structural Engineering and Mechanics*, 4(6), pp.703~715
- Choi, C.K., Noh, H.C.(2000) Weighted Integral SFEM Including Higher Order Terms, *J. Engrg. Mech., ASCE*, 126(8), pp.859~866
- Deodatis, G., Wall, W., Shinozuka, M. (1991) Analysis of two dimensional stochastic systems by the weighted integral method, In Spanos, P. D. and Brebbia, C. A., editors, *Computational Stochastic Mechanics*, pp.395~406
- Deodatis, G., Graham Brady, L., Micaletti, R.(2003) A hierarchy of upper bounds on the response of stochastic systems with large variation of their properties: random variable case, *Probab. Engrg. Mech.*, 18, pp.349~363
- Deodatis, G., Graham Brady, L., Micaletti, R.(2003) A hierarchy of upper bounds on the response of stochastic systems with large variation of their properties: random field case, *Probab. Engrg. Mech.*, 18, pp.365~375
- Falsone, G., Impollonia, N.(2002) A new approach for the stochastic analysis of finite element modeled structures with uncertain parameters, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191, pp.5067~5085
- Graham, L.L., Deodatis, G.(2001) Response and eigenvalue analysis of stochastic finite element systems with multiple correlated material and geometric properties, *Probab. Engrg. Mech.*, 16, pp.11~29
- Noh, H. C.(2004) A formulation for stochastic finite element analysis of plate structures with uncertain Poisson's ratio, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193(45~47), pp.4857~4873
- Lin, Y.K.(1967) Probabilistic theory of structural dynamics, McGraw Hill book company, p. 68.
- Stefanou, G., Papadrakakis, M.(2004) Stochastic finite element analysis of shells with combined random material and geometric properties, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193(1~2), pp.139~160
- Shinozuka, M., Deodatis, G.(1988) Response variability of stochastic finite element systems, *J. Engrg. Mech., ASCE*, 114(3), pp.499~519
- Papadopoulos, V., Deodatis, G., Papadrakakis, M.(2005) Flexibility based upper bounds on the response variability of simple beams, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194(12~16), pp.1385~1404
- Yamazaki, F., Shinozuka, M.(1990) Simulation of stochastic fields by statistical preconditioning, *J. Engrg. Mech., ASCE*, 116(2), pp.268~287