

PSC 보의 동적 모드정보를 통한 긴장력 감소 식별

Identification of Prestress Loss in PSC Beams using Dynamic Modal Information



김 정 태*



박 재 형**

*부경대학교 해양공학과 부교수
**부경대학교 해양공학과 박사과정

1. 서 론

구조물의 동적 모드특성의 변화를 이용하여 구조손상을 비파괴적으로 식별하는 문제는 중요한 연구주제로 다뤄져 왔다. 구조손상이라 하면 구조물에 설계되지 않은 응답 거동을 초래하는 기하학적이거나 재료적 변화로 정의할 수 있다. 이 같은 구조손상의 모니터링은 구조 안전도 평가라는 큰 틀에서 첫 번째로 수행되어야 할 과제이며, 시기 적절한 안전도 평가를 통해 시민의 재산과 생명을 보호하고 경제적인 구조물 유지관리를 위한 선행 되어야 한다. 그러므로 정확하고 신뢰할 수 있는 안전도 평가 능력의 확보는 구조 시스템의 유지관리를 위해 필수적이다.^{1)~4)}

최근 프리스트레스 콘크리트(PSC) 교량의 안전도 평가에 대한 관심이 높아지고 있다. 프리스트레스 콘크리트는 외력에 의해 발생하는 응력을 원하는 정도로 상쇄시킬 목적으로 미리 긴장력에 의한 내부응력을 도입한 콘크리트를 말한다. 설계 긴장력의 도입을 통해 균열억제와 변위제어 또는 강도 보완을 하게 되는데, 공용중인 구조물에서 설계 긴장력과 실제 긴장력과 차이가 존재한다. 이는 공용 연한과 하중 이력, 콘크리트 크리프와 건조수축, 케이블의 리랙세이션, 정착부 손상 및 온도 변화, 또는 케이블 자체의 국부 손상 등의 요인에 기인하며, 이로 인해 구조물의 성능 저하 또는 심각한 안전도 저하가 야기된다.^{5)~7)}

모니터링 시스템이 설치되지 않은 대부분의 공용중인 PSC 구조물의 경우 긴장력을 직접 계측할 수 없으며 대안적인 방법이 강구되어야 한다. 이를 위해 최근까지 진동신호를 사용하여 비파괴적으로 긴장력의 변화를 감지하는 기법에 대하여 연구되고 있다. 이는 구조물의 긴장력 변화가 강성의 변화와 같은 효과이며 진동 특성의 변화를 계측하여 구조 강성의 변화 및 긴장력의 변화를 모니터링 할 수 있다는 개념에 근거한다.^{5),7)~10)} 하지만 현재까지는 긴장력의 감소와 동적 모드특성의 변화와의 관계를 정량적으로 설명 할 수 있는 연구 결과가 제한적으로 제시되고 있으며 고유진동수 또는 모드형상을 계측하여 긴장력의 변화를 모니터링 할 수 있는 실용적인 기법에 대한 지속적인 연구가 필요하다.

본 논문에서는 PSC 보 형식의 구조물에서 소수의 고유진동수를 계측하고 그 변화의 특징을 감지하여 긴장력의 감소를 검출 할 수 있는 Kim 등이 제시한 비파괴적인 기법(참고문헌¹¹⁾)을 소개하고자 한다. 먼저, PSC 보의 고유진동수와 긴장력 감소 사이의 관계를 식별 할 수 있는 모델을 정식화 하였다. 다음으로, 고유진동수의 변화를 계측하여 PSC 교량의 긴장력을 역 해석을 통해 직접적으로 감지 할 수 있는 긴장력 예측 알고리즘을 제시하였다. 최종적으로, 기존에 발표된 PSC 단순 보 실험 결과를 사용하여 제시된 긴장력 예측 알고리즘의 적용성을 검증하였다.

2. PSC 보 긴장력 예측 모델 (참고문헌 11)

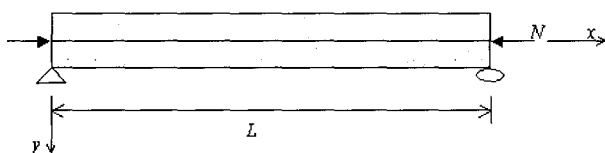
직사각형 단면의 도심 축에 일직선으로 텐던이 배치된 PSC 보를 대상으로 긴장력 영향을 분석하였다. 이는 통상 그림 1과 같이 축 하중을 받는 보로 모델링된다. 여기서 N는 정착부에 작용하는 압축력이며, 해석을 위해 베르누이 보 이론에 압축력 효과를 포함하도록 정식화 한다. 압축력의 효과가 부재 길이에 따라 일정하며 시간에 따라 불변하다고 가정하여 식 (1)과 같은 자유진동 방정식이 얻어진다.¹²⁾

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E_c I_c \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P_c A_c \frac{\partial x^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

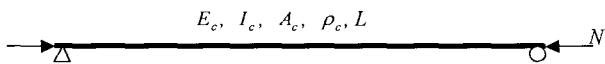
여기서 y는 휨 방향 변위, $E_c I_c$ 는 보 단면의 휨 강성, $p_c A_c$ 는 보의 단위 길이 당 질량이다. 식 (1)에 단순 지지 경계조건을 적용하면 다음의 식 (2)가 얻어진다.

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \frac{E_c I_c}{p_c A_c} - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{N}{p_c A_c} \quad (2)$$

식 (2)를 해석하면 압축력이 증가하면 고유진동수가 증가한다는 것이지만, 실제로 PSC 보의 거동에서 보면 이와는 정반대의 현상이 발생하는 것을 알 수 있다. 그러므로 식 (2)는 텐던이 배치된 PSC 보의 진동모델로 적합하지 않다.



(a) PSC Beam under Axial Force



(b) Euler Bernoulli Beam Under Axial Force

그림 1 Axial Force Model of PSC Beam

이상과 같은 해석모델의 문제를 해결하기 위해 그림 2와 같은 인장강도 모델을 유도하였다. 즉, 초기에 텐던의 길이가 늘어난 상태에서 정착시킴으로 텐던은 인장 하중 하에 놓이며, 정착력을 받는 콘크리트 단부는 압축 하중 하에 놓이는 상태를 묘사하고 있다. 그러므로 구조체는 초기에 압축 하에서 지간 길이가 L_r 로 수축하며, 텐던은 프리스트레싱 효과에 의해 탄성 신장한 후 여전히 인장하에서 놓이게 된다. 보의 초기 변형으로 인해 보 지간의 길이

감소 $\delta L(L - L_r)$ 가 발생하며 보 단면에는 프아송 효과에 의한 단면 증가가 발생한다. 이와 같은 보의 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E_r I_r \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m_r \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

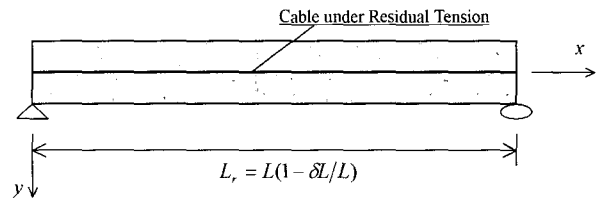
여기서 $E_r I_r$ 는 변형 후 PSC 보 단면의 휨 강성이며 m_r 은 변형 후 보의 단위 길이당 질량이다. PSC 보의 복합 휨 강성 및 단위 길이당 질량은 다음과 같이 환산 된다.

$$E_r I_r = E_c I_c + E_s I_s \quad (4a)$$

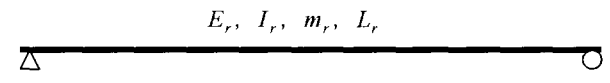
$$m_r = p_c A_c + p_s A_s \quad (4b)$$

여기서 $E_s I_s$ 는 텐던의 휨 저항에 해당하는 등가 휨 강성이며 $p_s A_s$ 는 텐던의 단위 길이당 질량이다. 케이블 인장력이 N 일 때의 케이블의 지배방정식은 식 (5)와 같으며, 이 휨진동 거동으로부터 텐던의 등가 휨 강성 $E_s I_s$ 가 유도된다.

$$-N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + p_s A_s \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$



(a) PSC Beam under Initial Deformation



(b) Beam of Equivalent Flexural Rigidity

그림 2 Tension Strength Model of PSC Beam

식 (5)로부터 그림 3(a)와 같은 인장 케이블의 n차 고유진동수 식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L_r} \right)^2 \frac{N}{p_s A_s} \quad (6)$$

그림 3(b)에 묘사된 것과 같이 케이블의 모드특성과 동등한 등가 보 모델의 n차 고유진동수 식은 다음의 식과 같다.

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L_r} \right)^4 \frac{E_s I_s}{\rho_s A_s} \quad (7)$$

주어진 긴장력과 진동모드에 대해 식 (6)과 식 (7)로부터 등가 휨 강성을 구할 수 있다.

$$E_s I_s + \left(\frac{L_r}{n\pi} \right)^2 N \quad (8)$$

식 (8)을 식 (4)에 대입하여 PSC 보 단면의 전체 휨 강성을 다음과 같이 정의 할 수 있다.

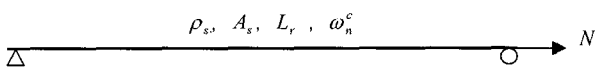
$$E_r I_r = E_c I_c + \left(\frac{L_r}{n\pi} \right)^2 N \quad (9)$$

여기서 $E_r I_r$ 는 전체 보 길이에서 일정하다고 가정한다. 식 (9)와 함께 경계조건을 식 (3)에 적용하면 PSC 보 모델의 n 차 고유진동수 식을 얻을 수 있다.

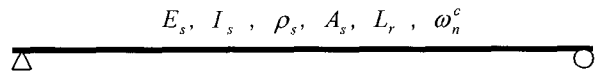
$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L_r} \right)^4 \frac{1}{m_r} \left(E_c I_c + \left(\frac{L_r}{n\pi} \right)^2 N \right) \quad (10)$$

여기서 변형 후 보 지간 L_r 은 다음과 같이 계산된다.

$$L_r = L \left(1 - \frac{\delta L}{L} \right) = \left(1 - \frac{N}{A_c E_c} \right) L \quad (11)$$



(a) Cable under Tension Load



(b) Beam with Equivalent Flexural Rigidity

그림 3 Flexural Vibration of Cable under Tension

PSC 구조의 n 차 고유진동수와 단위길이 당 질량 및 콘크리트 휨 강성이 입력되면 식 (10)의 역해로부터 n 차 진동 모드에서 식별되는 긴장력 $(N)_n$ 을 계산 할 수 있다.

$$(N)_n = \omega_n^2 M_r \left(\frac{L_r}{n\pi} \right)^2 - E_c I_c \left(\frac{n\pi}{L_r} \right) \quad (12)$$

긴장력 감소에 기인한 보의 기하 형상 및 재료 특성의

변화를 매우 작다고 가정하여 긴장력의 1차 변분량을 다음과 같이 유도하였다.

$$(\delta N)_n = \delta \omega_n^2 m_r \left(\frac{L_r}{n\pi} \right)^2 \quad (13)$$

여기서, $(\delta N)_n$ 은 n 차 모드로부터 식별 할 수 있는 긴장력의 변분량이며 $\delta \omega_n^2$ 는 긴장력의 감소에 기인한 고유치 ω_n^2 의 변분량이다. 식 (12)와 식 (13)으로부터 n 차 모드의 진동특성치를 사용하여 식별 할 수 있는 긴장력의 상대적 변화율 계산식을 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{\delta N}{N} \right)_n = \frac{\delta \omega_n^2}{\omega_n^2 - \bar{\omega}_n^2} \quad (14)$$

여기서, $\bar{\omega}_n^2$ 는 긴장력이 제거된 상태의 n 차 고유치이며, 고유치의 변화율을 계측하여 식 (14)로부터 상대적 긴장력 감소율 $\delta N/N$ 을 예측 할 수 있다. 하지만 대부분 PSC 구조물은 $\bar{\omega}_n^2$ 가 계측 기록되어 있지 않으며, 이로 인해 구조식별 기법을 사용하여 수치모델로부터 이를 식별하여야 한다.

3. 긴장력 예측 모델의 검증

3.1 실험구조물

실험구조물은 그림 4에 묘사되었다. 기존의 연구(참고 문헌 5)에서 실험구조물에 대한 긴장력과 진동특성치 변화의 관계에 대한 계측 결과가 수록되었다. Grade 250 7와이어 스트랜드가 텐던으로 사용되었으며, 단면 도심축을 따라 직선으로 배치되었다. 텐던은 25mm 덕트내에 설치되었으며 그라우팅 되지 않았다. 콘크리트의 28일 압축 강도는 20.3 MPa이다(PSC 보에 대한 자세한 내용은 참고 문헌 5를 참고).

실험구조물에 여러 단계의 축 하중을 가한 상태에서 동적 모드 실험이 수행되었다. 모드 실험을 위해 7개의 가속도계가 일정 간격으로 배치되었으며, 보의 휨 방향 수직응답을 측정하였다. 충격 해머를 사용하여 구조체 종축에 수직방향으로 가진하였다. 긴장력이 0으로부터 최대 131.3 kN의 각 동적 실험 단계별로 긴장력을 가한 후 정착 앵커링 후에 가진 및 검진 실험이 수행되었다. 각각의 축 하중 단계에서 4회의 모드실험을 수행하였고, 검진된 가속도 신호의 FFT(Fast Fourier Transfer) 분석으로부터 초기 2

개 휨 진동 모드의 고유진동수가 추출되었다. 긴장력 단계 별 예측된 고유진동수 결과는 표 1에 요약되었다.

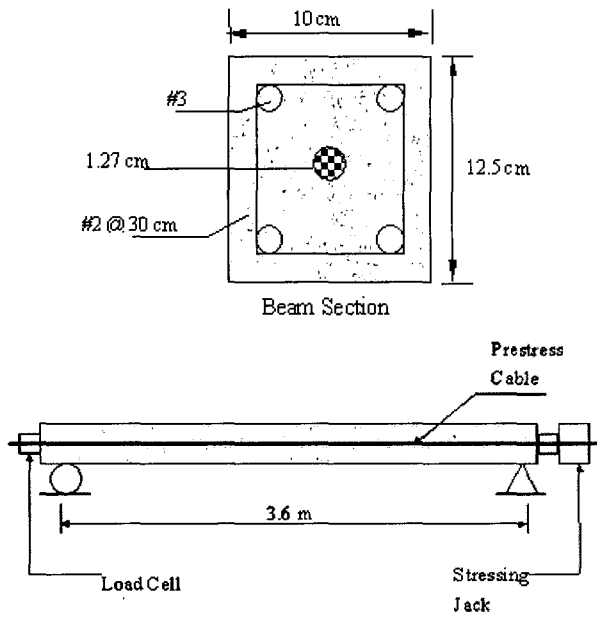


그림 4 Simply Supported PSC Beam (Saïidi et al., 1994)

3.2 구조식별(System Identification)

그림 4와 같은 PSC 보의 고유진동수를 식별하기 위해 이론 모델과 유한요소(FE)모델을 사용하였다. 이론 모델은 식 (10)과 같으며, 긴장력 값을 입력하여 고유진동수를 예측

하게 된다. 콘크리트의 28일 강도 $f_{28} = 20.3 MPa$ 와 단위 길이 당 질량 $p_c = 2400 kg/m^3$ 및 단면적 $A_c = 1.24 \times 10^{-2} m^2$ 을 통해 콘크리트의 탄성계수를 추정하여 $E_c = 21.52 GPa$ 의 값을 계산하였다. 표 1의 최대 긴장력인 $N = 132.8 kN$ 의 경우 L_r 은 0.9995L로 계산되었으며, 결과적으로 압축 변형률은 5×10^{-4} 로서 매우 작았다. 그러므로 긴장력에 의한 축 변형 효과를 무시하여 $L_r \approx L (= 3.6m)$ 을 사용하였다. 또한 콘크리트의 단면2차 모멘트와 환산단면의 질량은 각각 $I_c = 1.734 \times 10^{-5} m^4$ 와 $m_r = 30.75 kg/m$ 이었다. 이들 값을 식(10)에 입력하여 PSC 보의 고유진동수 추정 식을 다음과 같이 구하였다.

$$\omega_n^2 = 5133.3 \times n^4 + 0.0247 n^2 N \quad (15)$$

여기서, n는 모드 번호이고, N는 긴장력이다. 식 (15)를 사용하여 Table 1의 모든 긴장력 단계 각각의 고유진동수를 추정하였다. 예측된 고유진동수 값은 표 1에 요약되었다.

다음으로 PSC 보의 FE모델은 그림 5에 도시되었다. 해석을 위해 보는 28,512개의 블록 요소로 분할되었다. 보 중앙에 $1cm \times 1.25cm \times 1.25cm$ 블록요소를 연속적으로 배치하여 텐던 부재를 모델링 하였다. 그 외의 모든 콘크리트 부재는 $1.125cm \times 1.125cm \times 1.25cm$ 블록 요소로 모델링 하였다. FE 모델의 재료특성은 다음과 같다. 콘크리트 요소

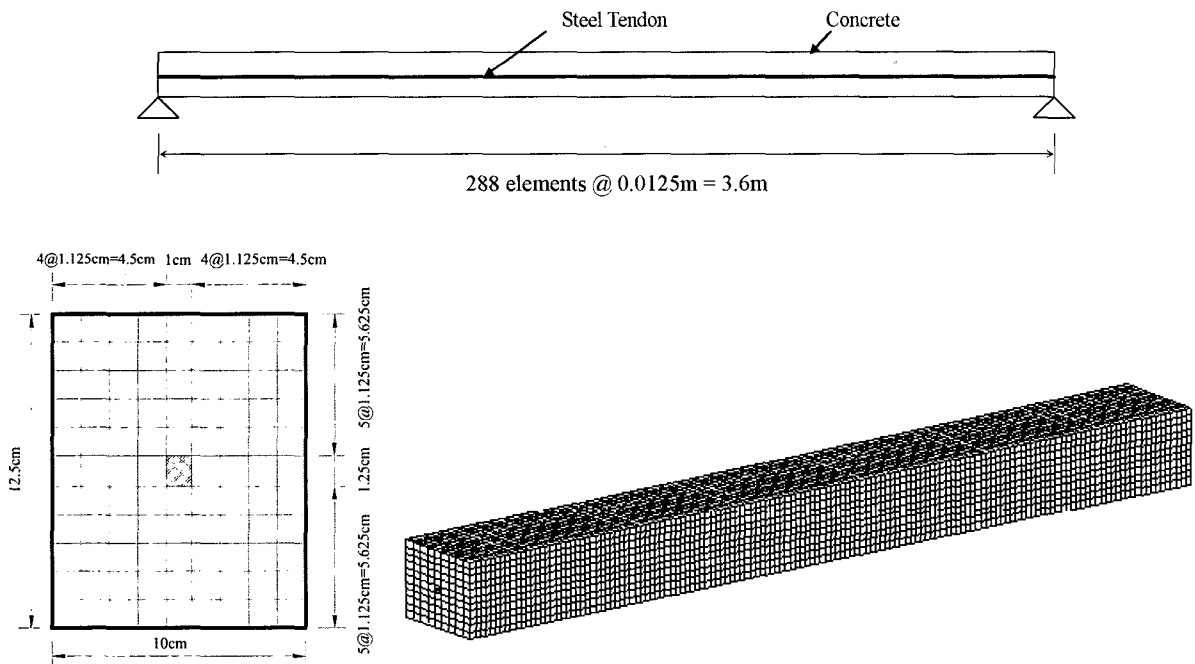


그림 5 FE Model of Simply Supported PSC Beam

표 1 Natural Frequencies of Simply Supported PSC Beams

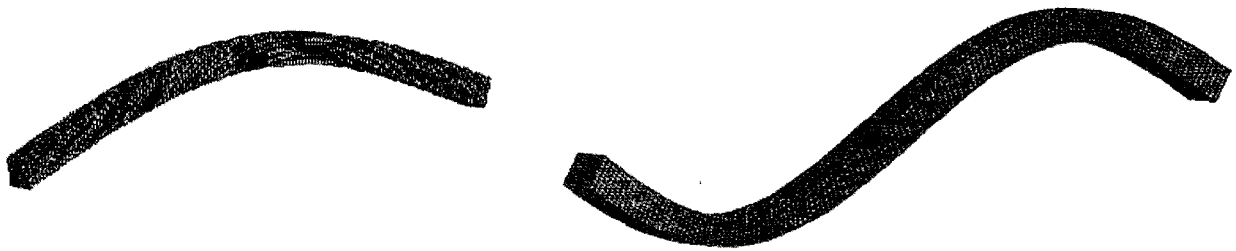
Case	In-situ Prestress Force (kN)	Experimental Frequency (Hz) (Saiidi et al., 1994)		Predicted Frequency (Hz)			
				Analytical Model		FE Model	
		Mode 1	Mode 2	Mode 1	Mode 2	Mode 1	Mode 2
1	0	11.41	43.99	11.409	45.635	11.196	44.047
2	15.71	12.09	44.11	11.832	46.063	11.689	44.547
3	27.05	13.47	44.89	12.128	46.371	12.032	44.886
4	36.49	12.89	44.69	12.370	46.626	12.311	45.161
5	57.25	13.63	45.62	12.885	47.179	12.902	45.744
6	81.81	14.49	45.57	13.468	47.828	13.568	46.401
7	91.26	14.72	46.32	13.686	48.073	13.816	46.645
8	121.46	14.72	45.86	14.360	48.854	14.578	47.398
9	130.91	14.97	46.10	14.565	49.096	14.809	47.622
10	132.80	15.07	45.87	14.610	49.145	14.855	47.667

의 탄성계수 $E_c = 21.52 \text{ GPa}$, 프아송 비 $\nu = 0.1833$, 밀도 $\rho_c = 2400 \text{ kg/m}^3$ 을 사용하였고, 텐던 요소의 경우에는 $E_s = 0.3155 \cdot N \cdot n^{-2} (\text{kN/m}^2)$, $P_w = 7850 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.3$ 을 사용하였다. 텐던 요소의 탄성계수는 등가 휨 강성 환산 식을 사용하여 구하였다.

$$E_s = \frac{L^2 N}{n^2 \pi^2 I_s} = 0.3155 \frac{N}{n^2} (\text{kN/m}^2) \quad (18)$$

여기서, $I_s = 4.16 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ 는 텐던의 단면2차 모멘트이다. 특이한 점은 모드번호에 따라 입력할 탄성계수의 값이 변화한다는 것이다. 이는 식 (6)과 식 (7)에서 설명되었다. 예를 들어 1차 휨 모드인 모드 1의 경우에는 $E_s = 0.3155 \cdot N (\text{kN/m}^2)$ 이며, 2차 휨 모드인 모드 2의 경우에는 $E_s = 0.0789 \cdot N (\text{kN/m}^2)$ 이다. 즉, PSC 휨 강성에 대한 텐던의 기여도가 모드 1에서 가장 크며 모드 수가 증가함에 따라 휨 강성에 대한 기여도가 감소한다. FE 모델의 모드 특성치는 ANSYS를 사용하여 수치적으로 해석되었다. 표 1의 10개 경우에 대해 조사하였으며 모드 1과 모드 2 고유진동수 예측 결과가 표 1에 요약되었다. FE 모델을 통해 분석된 모드형상은 그림 6과 같다.

그림 7(a)와 그림 7(b)는 두 모델 (이론 모델과 FE 모델)의 고유진동수 예측 결과를 실제 실험 결과와 비교한 것이다. 이론 모델의 경우 예측 오차는 모드 1에서 0.1% ~ 3%, 그리고 모드 2에서 3%~7%의 범위를 보였다. FE 모



(a) 3-D Mode Shapes of FE Model

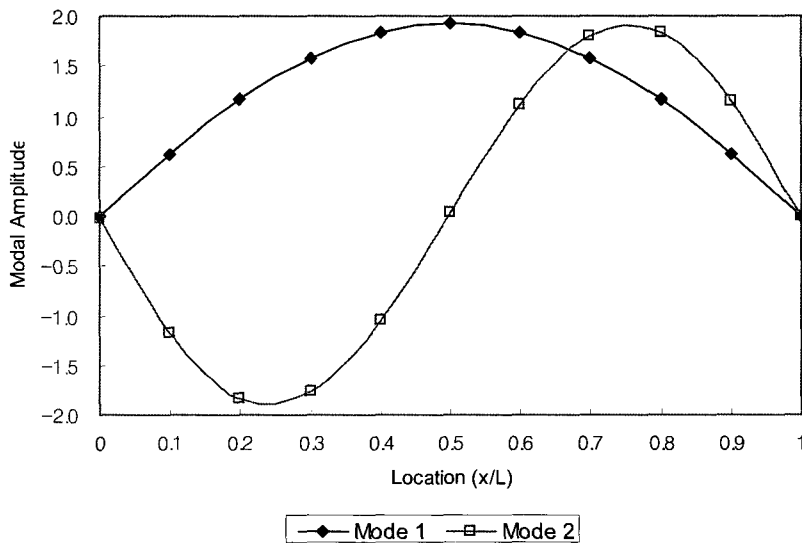
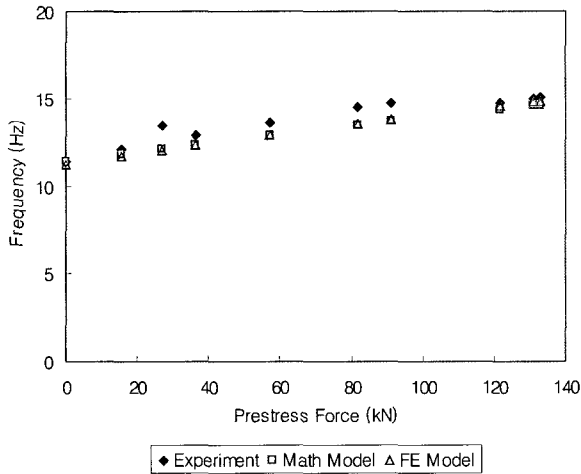
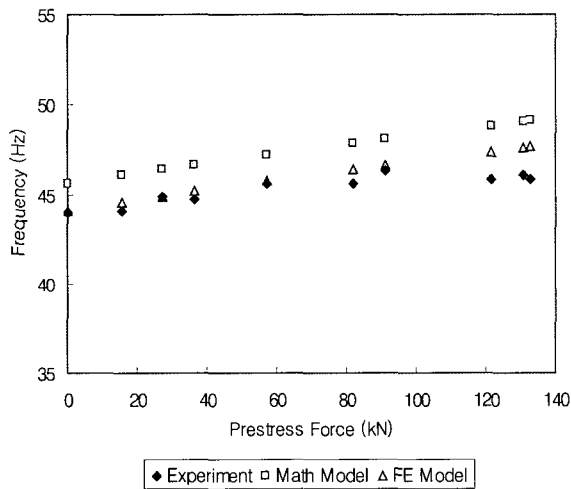


그림 6 Mode Shapes of Simply Supported PSC Beam

델의 경우 예측 오차는 모드 1에서 1%~3% , 그리고 모드 2에서 0.1%~4%의 범위를 보였다. 모드 1의 예측 결과는 두 모델 모두 좋은 예측 결과를 보였지만, 모드 2의 경우에는 FE 모델의 예측 결과가 약간 더 우수하였다.



(a) Mode 1



(b) Mode 2

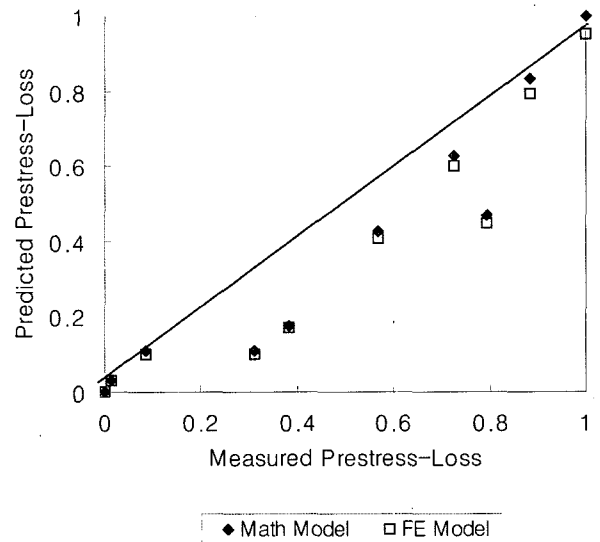
그림 7 Natural Frequencies of Simply Supported PSC Beam

3.3 긴장력 감소 예측

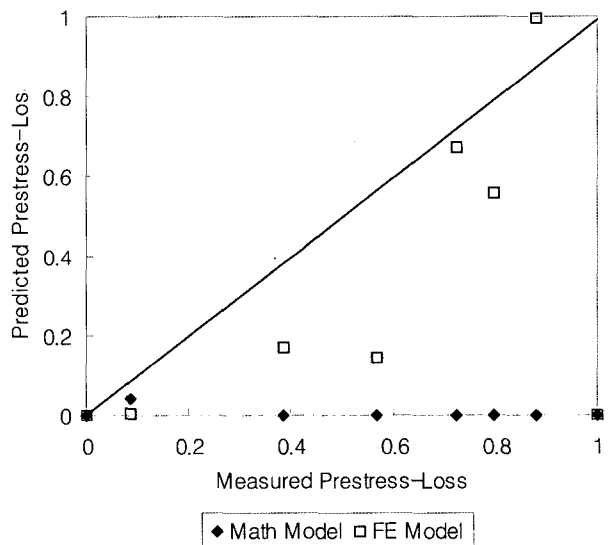
PSC 보 모델의 역 해석으로부터 실험 구조물의 긴장력 감소를 예측하였다. 초기 최대 긴장력 상태와 비교하여 상대적으로 감소되는 긴장력의 변화를 예측하기 위해 계측된 진동 특성치 중에서 n번째 고유진동수의 상대적인 변화율을 사용하였다. 긴장력 N이 0인 상태의 고유진동수는 표 1의 이론 모델과 FE 모델의 고유진동수를 각각 사용하

표 2 Prestress Loss Prediction in Simply Supported PSC Beams

Case	Experiment		Analytical Model		FE Model	
	N (kN)	$\delta N/N$	$(\delta N/N)_1$	$(\delta N/N)_2$	$(\delta N/N)_1$	$(\delta N/N)_2$
1	0	1.0	0.999	-	0.953	-
2	15.71	0.882	0.835	-	0.795	0.994
3	27.05	0.796	0.471	-	0.449	0.559
4	36.49	0.725	0.629	-	0.599	0.671
5	57.25	0.569	0.426	-	0.406	0.144
6	81.81	0.384	0.177	-	0.169	0.172
7	91.26	0.313	0.108	-1.930	0.103	-0.261
8	121.46	0.085	0.108	0.043	0.103	0.006
9	130.91	0.014	0.031	-0.934	0.029	-0.133
10	132.80	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0



(a) Mode 1



(b) Mode 2

그림 8 Prestress Loss Prediction in Simply Supported PSC Beam

었다. 전체 10단계의 긴장력 단계에 대한 긴장력 감소를 예측하였으며, 그 결과는 표 2에 요약되었다.

이론 모델과 FE 모델을 사용하여 예측된 긴장력 값들을 실제 실험에서 측정된 긴장력 값과 비교하였다. 그림 8은 실제 긴장력 측정 값과 두 모델을 통한 긴장력 예측 값을 비교한 것이다. 측정치와 예측치의 상관성이 높으며 이는 고유진동수의 계측을 통해 긴장력의 감소를 예측 할 수 있는 것을 의미한다. 이론 모델의 경우, 긴장력 예측 오차는 1%~72% 정도로 넓은 범위를 보였다. FE 모델의 경우, 긴장력 예측 오차는 5%~75% 정도의 오차 범위를 보였다. 전반적으로 두 모델의 예측 정확도는 긴장력의 변화가 클수록 큰 오차를 보였는데, 이는 식 (14)의 긴장력 예측 식이 고유치의 1차 변분량에 기초하는 정식화의 제약에 기인한 것으로 생각된다.

4. 결 론

본 논문에서는 PSC 보 구조물의 고유진동수 변화를 감지하여 긴장력 감소를 비파괴적으로 예측하는 기법에 대해 소개하였다. 다양한 긴장력 상황에서 PSC 교량의 고유진동수를 추정하는 이론 모델을 유도하였다. 또한 고유진동수의 변화로부터 긴장력의 변화를 추정하는 모델을 유도하였다. 실제 긴장력 제어 실험조건에서 소수의 고유진동수의 변화를 계측한 PSC 모형을 통해 긴장력 예측 식의 성능을 평가하였다.

여러 긴장력 상황에서의 고유진동수 예측 값을 실제 계측 값과 비교하였으며, 이론 모델과 FE 모델 모두 비교적 정확하게 예측하였다. 또한 긴장력을 알지 못하는 상황을 가정하여 수행된 긴장력 감소 예측 실험의 경우에는 고유진동수 변화 계측 값을 사용하여 이론 모델과 FE 모델 모두 비교적 정확하게 긴장력의 변화를 감지하였다. 이로서 긴장력 예측 모델을 사용하여 고유진동수의 변화로부터 긴장력의 변화를 정량적으로 모니터링 할 수 있음을 확인하였다. 이상과 같은 연구결과와 현장 적용성을 고려하면, 현재 공용중이며, 진전도 모니터링 시스템이 설치되지 않은 대부분의 PSC 보 구조물의 긴장력 상태를 현장 모니터링하는데 용이하리라 생각된다. 하지만 실제적인 적용이 이루어지기 전에 온도 변화 등 계측환경의 변화가 PSC 구조물의 진동 특성의 변화 및 긴장력의 변화에 미치는 영향 등에 대한 연구가 선행되어야 한다고 생각된다.

참 고 문 헌

1. Stubbs, N., and Osegueda, R. (1990). "Global Nondestructive Damage Evaluation in Solids", Int J. Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 5, No. 2, pp. 67-79.
2. Pandey, A. K., Biswas, M., and Samman, M. M. (1991) "Damage Detection from Changes in Curvature Mode Shapes", Journal of Sound and Vibration, Vol. 145, No. 2, pp. 321-332.
3. Rytter, A. (1993). "Vibration Based Inspection of Civil Engineering", Ph.D. Dissertation, University of Aalborg, Denmark.
4. Kim, J.T., Ryu, Y.S., Cho, H.M, and Stubbs, N. (2003). "Damage Identification in Beam Type Structures: Frequency-Based Method Vs Mode-Shape-Based Method", Engineering Structures, Vol. 25, pp. 57-67
5. Saiidi, M., Douglas, B., and Feng, S. (1994). "Prestress Force Effect on Vibration Frequency of Concrete Bridges", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 120, No. 7, pp. 2233-2241.
6. Aalami, B.O. (2000). "Structural Modeling of Posttensioned Members", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 126, No. 2, pp.157-162.
7. Miyamoto, A., Tei, K., Nakamura, H., and Bull, J.W. (2000). "Behavior of Prestressed Beam Strengthened with External Tendons", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 126, No. 9, pp. 1033-1044.
8. Lin, T.Y. (1963), Design of Prestressed Concrete Structures, John Wiley & Sons, USA.
9. Cawley, P., and Adams, R. D. (1979). "The Location of Defects in Structures from Measurements of Natural Frequencies", J. Strain Analysis, Vol. 14, No. 2, pp. 49-57.
10. Kim, J.T., and Stubbs, N. (1995). "Model-Uncertainty Impact and Damage-Detection Accuracy in Plate Girder", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 121, No., 10, pp. 1409-1417.
11. Kim, J.T., Yun, C.B., Ryu, Y.S., and Cho, H.M. "Identification of Prestress-Loss in PSC Beams using Modal Information", Structural Engineering and Mechanics, Vol. 17, No. 3-4, pp. 467-482.
12. Clough, R.W., and Penzien, J. (1993), Dynamic of Structures, McGraw Hill, USA. 