Commun. Korean Math. Soc. **20** (2005), No. 2, pp. 195–207

초청논문

양의 단면 곡률을 가지는 컴팩트 공간에 대하여

고관석

ABSTRACT. 리만 기하학에서 중요한 문제중의 하나는 주어진 곡률 부호를 가지는 다양체를 분류하는 것이다. 그렇게 하기 위해서는 곡률과 위상과의 상호 관계를 밝히는 것이 중요하다. 특히 양의 곡률을 가지는 공간을 분류하는 것은 어려운 문제로 알려져 있으며 위상적 성질에 대해서도 알려진 것은 매우 적다. 본 논문에서는 지금까지 알려진 양의 곡률을 가지는 공간들을 살펴 보고 그들 공간들에 대한 일반적인 정리들과 호프의 문제를 소개하고자 한다.

1. 서론

(M^n, g)을 n차원 컴팩트 리만 다양체이고 g는 다양체의 리만 계량이다. K, Ric, s는 각각 리만 다양체의 단면 곡률, 리치 곡률 스칼라 곡률이라고 하자. 주어진 곡률 부호 조건에서 리만 다양체를 분류하는 문제는 리만 기하학의 근본적인 문제중의 하나이다. 첫번째 해야 할 일은 다양체를 위상적으로 분류하는 것이고 이 분류가 이루어 진다면, 두번째는 미분 위상적으로 분류하는 것이고 이 분류가 이루어진다면, 마지막은 등장적으로 분류하는 것이 중요하다.

본 논문에서는 단면 곡률의 부호가 양인 경우를 살펴 보고자 한다. 곡률의 부호가 중요한 사실은 가우스-본넷의 정리를 보면 알 수 있다. 유향인 2차원 다양체의 경우 단면 곡률이 양이면 2차원 구 S^2이다. 호프(H. Hopf)는 이러한 2차원 결과들이 고차원에서도 마찬가지로 중요함을 알고 1932년 논문에서 호프의 계획을 발표하였다. 이 계획에서 곡률의 부호와 위상사이에는 매우 밀접한 관계가 있으므로 이를 통하여 다양체를 분류할 것을 제안하였다 [18].

3차원의 경우 해밀톤(Hamilton)이 1982년 양의 리치 곡률을 가지는 리만 다양체는 양의 상수인 단면 곡률을 가지며 이 다양체는 구의 공간형식(spherical space-form)임을 리치 흐름 방정식(Ricci flow equation)을

Received March 23, 2005.
2000 Mathematics Subject Classification: 53C.
Key words and phrases: 양의 단면 곡률, 위상, 호프의 문제.

이용하여 이 사실을 증명하였다 [15]. 해밀톤의 리치 흐름 방정식은 리만 다양체를 분류하는 가장 강력한 도구이지만 다루기 힘든 추상 방정식계이기도 하다. 여기에서 추상 방정식계라 함은 구체적으로 주어진 다양체뿐만 아니라 추상적으로 주어진 조건을 가지는 다양체들에서 성립하는 편미분방정식들의 모임이란 뜻이다. 곡률 조건만 가지고 그 다양체를 분류할 수 있다는 사실은 놀라운 일이다.

해밀톤은 1995년 해밀톤의 계획을 발표하여 리치 흐름 방정식의 특이점의 해석을 통해 3차원 컴팩트 다양체를 분류할 것을 제안하였다 [16, 17]. 페렐만(G. Perelman)은 최근 3편의 논문을 발표하여 이 문제를 해결하였음을 주장하였다.

4차원이나 그 이상의 차원에서 양의 단면 곡률을 가지는 다양체의 분류는 되어 있지 않다. 다만 몇종류의 양의 곡률을 가지는 공간들이 알려져 있을 뿐이다. 잘 알고 있는 대칭 공간이외에, 베르제(Berger), 왈라치(Wallach), 앨로프(Aloff)와 왈라치, 에첸버그(Eschenburg), 바자이킨(Bazaikin)이 양의 단면 곡률을 가지는 공간들을 발견하였다.

양의 단면 곡률에 관한 일반적인 정리는 2차원의 본넷(Bonnet)의 정리를 n차원으로 확장 할 수 있느냐 하는 호프가 제기한 문제를 1935년 쇤버그(Schoenberg) 와 마이어스(S. Myers)가 독립적으로 해결하였다. 즉 완비된 리만 다양체의 모든 단면 곡률이 $K \geq a > 0$ 을 만족하면 다양체는 컴팩트하고 그 직경은 $Diam(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{a}}$임을 증명하였다. 마이어스는 1942년 이 결과를 양의 리치 곡률을 가질때에도 성립함을 증명하였다 [19]. 미이어스의 정리는 아직까지도 양의 단면 곡률을 포함하여 양의 리치 곡률에 관한 최고의 정리라 할 수 있다.

1936년 신지(J. Synge)는 짝수 차원의 유향 컴팩트 리만 다양체가 양의 단면 곡률을 가지면 단일 연결임을 증명하였다. 홀수 차원의 컴팩트 다양체가 양의 단면 곡률을 가지면 유향임을 증명하였다 [22].

리만 기하학에서 단면 곡률이 제일 기하학적인 조건임에도 불구하고 단면 곡률이 양(혹은 음)일때 알고 있는 사실이 너무 없다는건 기이한 일이다.

1923년 웨이첸뵉(R.Weitzenböck)은 "불변론"이란 책에서 웨이첸뵉 공식을 발표하였으며 1946년 보크너(Bochner)는 이 공식을 재발견하여 양의 리치곡률을 가지는 리만 다양체는 제 1 베티(Betti)의 수가 0이 됨을 보였다 [6]. "Magic Weitenböck"공식이라고 불려지고 있지만 아직도 이 공식을 제대로 활용하지 못하고 있다.

2. 양의 단면 곡률을 가지는 컴팩트 공간에 대하여

리만 대칭 공간이라 함은 완비된 리만 다양체 M의 모든 점 $p \in M$에 대하여 등장 사상 $\varphi \in I(M)$이 $\varphi(p) = p$와 $d\varphi_p = -I$을 만족하는 공간이다 [8, 26]. 여기에서 $I(M)$은 M의 등장 사상들의 군이다.

대칭 공간 M^n의 계수(rank)는 M^n 속에 놓여 있는 평평하고 전체적으로 측지적인(totally geodesic) 부분 다양체들의 조각들이 가질수 있는 최대의 차원이다.

계수가 1인 짝수 n차원 컴팩트 대칭 공간 M^n들은 실 사영 공간 RP^n, 구 S^n, 복소 사영 공간 $CP^{n/2}$, 사원수적인 (quaternionic) 사영 공간 $HP^{n/4}$와 케일리 평면 CaP^2이 있으며 모두 양의 단면 곡률을 가진다.

정리 1. [3] *짝수 차원을 가진는 완비된 단일 연결 리만 다양체 M^n의 모든 단면 곡률이*

$$1 \geq K \geq \frac{1}{4}$$

을 만족한다고 하자. 그러면
(1) M^n은 구 S^n와 위상 동형이던지
(2) M^n은 계수가 1인 대칭 공간들, 즉 복소 사영 공간 $CP^{n/2}$, 사원수적인 사영 공간 $HP^{n/4}$, 케일리 평면 CaP^2중의 하나와 등장적이다.

계수가 1인 대칭 공간을 제외하면 양의 단면 곡률을 가지는 공간은 매우 적게 알려져 있다.

리만 다양체 M이 등질 공간(homogeneous space)이라 함은 등장 사상 군 $I(M)$이 M에 추이적으로(transitively) 작용하는 공간을 말한다. 즉 M의 모든 점 p와 q에 대하여 등장 사상 $\varphi \in I(M)$이 존재하여 $\varphi(p) = q$이다.

1961년 베르제는 양의 단면 곡률을 가지는 두 종류의 정규 등질 공간을 발견하었다 [4]. 첫째는 7차원의 공간

$$M^7 = Sp(2)/SU(2)$$

이고 두번째는 13차원의 공간

$$M^{13} = SU(5)/(Sp(2) \times S^1)$$

이다.

여기에서

$$Sp(n) = \{A \in M_n(H) | \overline{A}^t = A^{-1}\},$$
$$SU(n) = \{A \in M_n(C) | \overline{A}^t = A^{-1}, \det(A) = 1\}$$

이다. H는 사원수들의 집합이고 C는 복소수들의 집합이다.

1972년 왈라치(N.Wallach)는 세 종류의 짝수 차원을 가지는 단일 연결 등질 공간을 발견하였다 [24]. 그 다양체들은 모두 기 다양체(flag manifold)이며

$$M^6 = SU(3)/T^2,$$
$$M^{12} = Sp(3)/SU(2)^3$$

와

$$M^{24} = F_4/Spin(8)$$

는 각각 CP^2위의 S^2-다발(bundle), HP^2위의 S^4-다발, 그리고 CaP^2위의 S^8-다발이다. 여기에서 $Spin(n)$는 회전 군 $SO(n)$의 보편 피복 군이다. 공간 F_4는 $F_4/Spin(9) = CaP^2$을 만족한다.

1975년 앨로프(Aloff)와 왈라치는 7차원의 무한 수열의 등질 공간

$$M^7_{k,l} = SU(3)/S^1_{k,l}$$

을 발견하였다 [1]. 여기에서 k와 l은 S^1을 최대 원환면(maximal torus) $T^2 \subset SU(3)$으로 묻어 버리게 하는(embedding) 정수들이다.

1982년 에첸버그(Eschenburg)는 두 종류의 양의 단면 곡률을 가지는 비등질 공간(inhomogeneous space)들을 발견하였다 [12]. 하나는 6차원의 공간

$$M^6 = SU(3)/(T^2 - action)$$

이고 또 다른 종류는 7차원의 무한 수열의 공간

$$M^7 = SU(3)/(S^1_{klpq} - action)$$

이다. 이 공간들은 앨로프와 왈라치의 공간과 여러모로 매우 닮은 꼴이다.

에첸버그의 방법을 이용하여 1995년 바자이킨(Bazaikin)은 13 차원의 무한 수열의 공간

$$M^{13} = S^1_{p_1,\cdots,p_5} \backslash U(5)/(Sp(2) \times S^1)$$

을 발견하였다 [2]. 여기에서

$$U(n) = \{A \in M_n(C) | \overline{A}^t = A^{-1}\}$$

이다.

지금까지 알려진 양의 단면 곡률을 가지는 컴팩트 리만 다양체는 두 가지 사실에서 부터 만들어 진다 [11]. 하나는 컴팩트 리 군의 비가환성을 이용하여 구성하는 것이고 다른 하나는 리만 서브머전(Riemannian submersion)의 거리의 수축적 성질(contraction property)을 이용하여 구성 하는 것이다. 뒤틀림 함수(warping function)를 이용하여 새로운 계량을 구성하는 방법이 있다. 하지만 이 방법을 써서 위에 열거하지 않은 공간에 새로운 양의 단면 곡률을 가지는 계량을 만드는데 성공한 적은 아직 없다. 그러나 양의 리치 곡률을 구성하는데 있어서는 아주 효과적인 방법이다 어떻게 위의 공간들이 구성되는지를 간략하게 살펴 보기로 하자.

명제 1. [8, 21] *만약 G가 양쪽으로 불변인 계량(bi-invariant metric)을 가지는 컴팩트 리 군이라 하자. $\mathcal{G}$는 G의 리 대수이다. 길이가 1이고 서로 수직인 기저 X, Y로 이루어진 모든 2-평면 $\sigma \subset \mathcal{G}$의 단면 곡률은 다음과*

같은 공식으로 주어진다. 여기에서 $[\cdot,\cdot]$*은 리 대수의 연산(Lie bracket)이다.*

$$K(\sigma) = K(X, Y) = \frac{1}{4}||[X, Y]||^2 \geq 0.$$

명제 2. [8, 20, 21] *주어진 리만 다양체들* E, B*에 리만 서브머전* $\pi : E \to B$ *주어져 있다고 하자. 점* $e \in E$*의 접 평면* T_eE*에 놓인 수평인 2-평면(horizontal 2-plane)* $\hat{\sigma} \subset T_eM$ *과* $\sigma = d\pi(\hat{\sigma})$*인 평면 사이의 단면 곡률들은 다음과 같은 부등식을 만족한다.*

$$K(\sigma) \geq K(\hat{\sigma})$$

새멜슨(H. Samelson)이 처음 두 명제를 증명했다 [21]. 물론 오닐(O'neill)의 공식을 이용하여 명제2를 보일 수 있으나 새멜슨의 증명이 보다 간결하고 쉽다.

두 곡선 γ_1, γ_2가 점 e를 출발하여 수평인 접 평면 $\hat{\sigma}$에 접하는 수평적 측지선(horizontal geodesic)이라면 이에 대응하는 두 곡선 $\pi \circ \gamma_j$는 점 $\pi(e)$를 출발하여 접 평면 σ에 접하는 M의 측지선이 된다. 두 측지선 γ_1, γ_2사이의 각(angle)과 이에 대응하는 두 측지선 $\pi \circ \gamma_1, \pi \circ \gamma_2$사이의 각은 같다. 리만 서브머전 π는 거리를 수축시키므로 모든 양의 매개 변수 t 에 대하여

$$d(\pi \circ \gamma_1(t), \pi \circ \gamma_2(t) \leq d(\gamma_1, \gamma_2)$$

이다. 따라서

$$K(\sigma) \geq K(\hat{\sigma})$$

이다.

리만 서브머전의 경우에 등장 사상 군 G가 리만 다양체 E위의 닫힌 궤도에 작용한다면 모든 궤도 사이의 거리는 모두 상수이다. 따라서 궤도 공간 E/G은 거리 공간이 된다. 만약 G의 작용이 자유적이라면, 이 거리는 리만 거리가 되며 이를 궤도의 계량이고 부른다.

양쪽으로 불변인 계량을 가지는 컴팩트 리 군 G_0의 닫힌 부분군 K_0를 관찰하자. 그러면 K_0는 G_0에 오른쪽 이동(right translation) $(k, g) \to gk^{-1}$에 의하여 등장적이면서 자유적으로 작용하게 된다. 궤도 공간 G_0/K_0 은 등질 공간이 되고 정규 등질 계량(normally homogenuous metric)을 갖는다. 그러므로 모든 정규 등질 공간의 단면 곡률은 $K \geq 0$이고 영인 단면 곡률을 가지는 평면은 $[X, Y] = 0$을 만족하는 $X, Y \subset \mathcal{P}$에 의해 만들어진다. 여기에서 $\mathcal{G} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{P}$는 $Ad(K)$-불변인 리 대수의 분할이다.

특히 리 군 G자체에 정규 등질 계량을 주는 방법을 고려해 보자. K는 G의 임의의 부분군이라 하자. $G_0 := G \times K$이라 한다면 G_0는 G에

$$((g, k), g') \to gg'k^{-1}$$

에 의하여 추이적으로 작용한다. 항등 원소 $1 \in G$의 등방 군(isotropy group) 은

$$\Delta K := \{(k,k)|k \in K\} \subset G \times K$$

이다.

G에 양쪽으로 불변인 계량 $< \cdot, \cdot >_0$을 주고 K에 유도된 계량을 주자. 그러면 $G \times K$에 양쪽으로 불변인 계량을 줄 수 있고 $G = G \times K)/\Delta K$에는 정규 등질 계량 $< \cdot, \cdot >$을 유도할 수 있다. 그러면 사상

$$\Phi : G \times K \to G, \Phi(g,k) = gk^{-1}$$

은 리만 서브머전이 된다. 하나의 벡터 $(X,Y) \in \mathcal{G} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{P}$가 Φ에 의하여 수평적 벡터가 될 필요 충분 조건은 모든 $Z \in \mathcal{K}$ 인 벡터 (Z,Z)에 대하여 수직인 것이다. 즉

$$0 =< (X,Y),(Z,Z) >=< X+Y, Z >_0$$

을 만족하는 것이다.

그러므로 $Y = -X_k$이다. 여기에서 X_k는 X를 $\mathcal{K}$로 사영시킨 벡터이다. $\mathcal{P}$를 $\mathcal{G}$안에서 수직인 직교 여공간(orthogonal complement)이라 하자. 그러면 수평 부분공간은

$$\mathcal{H} = \{(X_1+X_2, -X_2)|X_1 \in \mathcal{P}, X_2 \in \mathcal{K}\}$$

이다.

반면,

$$\Phi_*(X_1+X_2,-X_2) = X_1+X_2+X_2 = X_1+2X_2 =: X$$

이다. 따라서 $\mathcal{G}$의 새로운 계량에 대해서

$$||X||^2 = ||X_1+X_2||_0^2 + ||X_2||_0^2 = ||X_1||^2 + 2||X_2||_0^2$$

이다. X는 $\mathcal{P}$와 $\mathcal{K}$에 동시에 속하므로

$$X_p = X_1, X_k = 2X_2$$

이다. 따라서

$$||X||^2 = ||X_p||_0^2 + \frac{1}{2}||X_k||_0^2$$

이 된다. 그러므로 새로운 계량에서 모든 $\mathcal{K}$의 벡터의 길이는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$만큼 짧아진다.

$(X_1+X_2,-X_2)$와 $(Y_1+Y_2,-Y_2)$에 의해 만들어지는 수평적 평면 $\hat{\sigma} \subset \mathcal{G} \oplus \mathcal{K}$이 $G \times K$에서 단면 곡률이 0이 될 필요 충분 조건은

$$[X_2,Y_2] = 0, [X_1+X_2, Y_1+Y_2] = 0$$

이다.

만약 G/K가 대칭 공간이면, 즉 $[\mathcal{P},\mathcal{P}] \subset \mathcal{K}$이면

$[X_1, Y_1] \in \mathcal{K}$와 $[X_1, Y_2] + [X_2, Y_1] \in \mathcal{P}$을 만족한다. 따라서 두 항이 모두 0이다.

그러므로 $\hat{\sigma}$가 0인 단면 곡률을 가질 필요 충분 조건은

$$(1) \qquad [X_k, Y_k] = 0, [X, Y] = 0$$

이다. 여기에서 $X = \Phi_*(X_1 + X_2, X_2)$, $Y = \Phi_*(Y_1 + Y_2, Y_2)$ 이다. 그러므로 명제 2에 의하여 식 (1)은 X, Y에 의해 만들어지는 평면 $\sigma \subset \mathcal{G}$의 단면 곡률이 0 이 되기 위한 필요 충분 조건이 된다.

예 1. 유니타리 군 $G = U(3)$와 $K = U(2) \times U(1) \subset U(3)$를 살펴 보자. 그러면 (G, K)는 대칭 공간을 만드는 쌍이다. 왜냐하면 G/K는 대칭 공간 CP^2이다. G의 불변 계량

$$< X, Y >_0 = Re(traceXY^*)$$

으로 부터 위에 기술한 것처럼 G에 정규 등질 공간의 계량 $< \cdot, \cdot >$를 만들 수 있다. 여기에서 $Y^* = \bar{Y}^t$이다.

U를 $G \times K$의 닫힌 부분군이라 하자. 그러면 U는 G에

$$((u_1, u_2), g) \to u_1 g u_2^{-1}$$

에 의해 등장적으로 작용한다. 원소 $g \in G$가 $(u_1, u_2) \in U$의 고정점이 될 필요 충분 조건은 $u_2 = g^{-1} u_1 g$이다.

모든 점 $(u_1, u_2) \in U - \{1\}$에 대하여 u_1과 u_2이 공액이 아니라면 U는 고정점이 없게 작용한다. 따라서 궤도 공간 G/U는 음이 아닌 단면 곡률을 가지는 리만 다양체가 된다. 이것을 "biquotint"라고 하는데 이것은 그로몰(Gromoll)과 메이어(Meyer)가 7차원의 "exotic"구에 음이 아닌 계량을 구성하면서 처음 사용한 방법이다 [14].

이 방법을 사용하여 왈라치, 엘로프와 왈라치, 에쉔버그, 바자이킨이 위에 열거한 공간들을 구성하였고 조건 (1)을 잘 이용하면 그 공간들의 단면 곡률이 모두 양이 됨을 보일 수 있다.

3. 일반적인 정리에 대하여

양의 곡률을 가지는 다양체에 대한 일반적인 이론은 매우 적다. 곡선의 길이에 대한 변분 공식을 이용하여 마이어스와 신지의 정리를 증명할 수 있다. 이 두 정리는 고전적인 정리이지만 아주 유용하다.

매끄러운 곡선 $c : I = [a, b] \to M$의 메개 변수를 호의 길이 s라 하자. 곡선의 두 끝점은 $p = c(a), q = c(b)$이다. 곡선 c의 매끄러운 변분 $\phi : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ 은 $\phi(s, 0) = c(s)$을 만족한다.

변분 ϕ에 대한 벡터장 X, V를 각각

$$X = \frac{\partial \phi}{\partial s} = d\phi(\frac{\partial}{\partial s}),$$

$$V = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} = d\phi(\frac{\partial}{\partial \epsilon})$$

이라 정의하자. $V = V|_{(a,0)}$는 ϕ의 변분 벡터장이라 한다.

곡선 $\{\phi(s,\epsilon), a \leq s \leq b\}$의 길이를 $L(\epsilon)$ 이라 표시하자. 그러면 다음과 같은 제 1변분 공식을 얻는다.

$$L'(0) = < V, X > |_a^b - \int_a^b < V, \nabla_X X > ds.$$

만약 곡선 c가 임계점이라 한다면, 즉 $V_p = V_q = 0$인 모든 변분 벡터장 V에 대하여 $L'(0) = 0$이면 측지선의 방정식 $\nabla_X X = 0$을 만족하고 이러한 곡선 c를 측지선이라 한다.

곡선 c를 측지선이라 가정하자. 두 매개 변수의 변분

$$\phi : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\lambda, \lambda) \to M$$

에 대하여 위와 같이 벡터장 X, V을 정의하고 또 다른 벡터장을

$$W = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = d\phi(\frac{\partial}{\partial \lambda})$$

이라 정의하자.

두 매개 변수가 $\epsilon = \lambda = 0$에서 $V \perp X$, $W \perp X$ 이고 $V_p = V_q = 0$이라 가정하면 제 2변분 공식을 얻는다.

$$L''(0) = -\int_a^b < \nabla_X \nabla_X V, V > + K(V,X) ds.$$

이 공식을 이용하여 마이어스의 정리를 증명할 수 있다.

정리 2. [19] *n차원의 완비 리만 다양체 (M,g)에 대하여*

(1) *모든 단면 곡률이 $K(X,Y) \geq a > 0$을 만족하거나(Bonnet-Myers), 또는*

(2) *모든 리치 곡률이 $Ric(X,X) \geq (n-1)a > 0$을 만족한다고 하자(Myers),*

그러면 M은 컴팩트이고, 그 직경은

$$Diam(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{a}}$$

이다 . 또한 M의 제 1기본군 $\pi_1(M)$은 유한이다.

증명. 측지선 $c = \{c(s)|0 \leq s \leq l\}$는 M안에서 두 끝점 $p = c(0)$와 $q = c((l)$를 연결하는 곡선중 길이가 제일 짧다고 가정하자.

벡터장 $X = X_{c(s)} = c'(s)$이다. 벡터들의 $\{e_i\}$는 점 p에서 길이가 1이고 서로 수직이며 $e_m = X_p$이다. 벡터장 $\{E_i\}$는 측지선 c를 따라서 $\{e_i\}$에 평행인 움직이는 틀(moving frame)이다.

벡터장 $V_i(s) = sin(\frac{\pi s}{l}) \cdot E_i(s)$이면 $V_i \perp X$이고 $(V_i)_p = (V_i)_q = 0$이 된다. 변분 벡터장 V_i에 제 2변분 공식을 이용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} L_i''(0) &= -\int_a^b < \nabla_X \nabla_X V_i, V_i > +K(V_i, X)ds \\ &= \int_0^l (sin\frac{\pi s}{l})^2 (\frac{\pi^2}{l^2} - K(X, E_i))ds. \\ \sum_{i=1}^{m-1} L_i''(0) &\leq \int_0^l (sin\frac{\pi s}{l})^2 (\frac{(m-1)\pi^2}{l^2} - (m-1)K(X, E_i))ds. \end{aligned}$$

$0 \leq L_i''(0)$이므로 $l \leq \frac{\pi}{\sqrt{a}}$이다. 그러므로 $Diam(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{a}}$이다 .

다양체 $\tilde{M}$을 M의 보편 피복 공간이라 하자. 사영 $\pi : \tilde{M} \to M$은 국소 미분 동형 사상이므로 $\tilde{M}$위에 리만 계량을 유도할 수 있다. 바로 위의 증명으로부터 $\tilde{M}$도 또한 컴팩트이다. 그러므로 점 $m \in M$에 대하여 $\pi^{-1}(m)$은 유한집합이다. 따라서 M의 제 1 기본군 $\pi_1(M)$은 유한이다. □

정리 3. [22] (1) *짝수 차원의 컴팩트 유향 리만 다양체 M이 양의 단면 곡률을 가진다고 하면 M은 단일 연결이다.*

(2) *홀수 차원의 컴팩트 리만 다양체 M이 양의 단면 곡률을 가진다고 하면 M은 유향이다.*

증명. (1) 다양체 M은 단일 연결이 아니다라고 가정하자. 그러면 길이가 제일 짧은 상수가 아닌 측지선 c가 존재한다. 점 $p = c(0)$에서 접벡터 $c'(0)$에 수직인 접 평면 $T_p(M)$의 부분 공간을 H라 하자.

측지선 c를 따라서 평행 이동하면 H의 직교 변환 τ를 얻을수 있다. M은 유향이고 H는 홀수 차원의 부분 공간이므로 τ는 항상 고정점을 가진다. 즉 c를 따라서 길이가 1평행 벡터장 V를 선택하자. 이 벡터장에 제 2변분 공식을 적용하면 c가 제일 길이가 짧다는 사실과 모순이 된다.

(2) 다양체 M은 유향 공간이 아니다라고 가정하자. 그러면 M의 이중 피복(double covering)공간을 $\hat{M}$이라 하자. $\hat{M}$의 피복 변환(deck transformation) f은 방향을 바꾸는 사상이다. M 의 차원은 홀수이므로 사상 f는 항상 고정점을 가진다. 바로 위의 증명을 다시 적용하면 모순을 이끌어 낼 수 있다. □

컴팩트 다양체 N과 1차원 구 S^1의 곱 다양체 $N \times S^1$은 양의 단면 곡률을 가지지 않는다. 왜냐하면 $\pi_1(N \times S^1)$은 유한이 아니므로 마이어스 정리에 의해 쉽게 알 수 있다.

모든 정수 $p, q \geq 2$에 대하여 실 사영 공간의 곱 다양체 $RP^p \times RP^q$는 양의 단면 곡률을 가질 수 없다. $p + q$가 짝수이면 다양체는 단일 연결

이 아니다. $p+q$가 홀수이면 다양체는 유향이 아니다. 어떤 경우든 신지의 정리에 의하여 양의 단면 곡률을 가지게 하는 계량은 없다.

최근에 비교 기하학에서 곡선의 길이 함수대신에 거리 함수를 이용하여 활발하게 연구가 되고 있다. 곡률 조건과 함께 체적, 직경 등 가능한 기하학적인 개념들을 모두 사용하고 있다. 그러나 곡률 조건만 주어져 있을때 이들 기하적인 정보를 곡률 조건으로부터 얻어야하기 때문에 어려움이 많다.

4. 호프 문제에 대하여

양의 곡률에 관한 문제 중에서 제일 먼저 해결하여야 할 문제는 4차원 양의 곡률을 가지는 컴팩트 다양체를 분류하는 것이다.

그렇게 하기 위해서는 호프의 예상 문제라 불리우는 2차원 구 S^2의 곱 다양체 $S^2\times S^2$가 양의 단면 곡률을 가지는 계량이 존재하는지 여부를 따져 보아야 한다 [10, 23, 25]. 또한 복소 2차원 사영 평면의 연결 합 $CP^2\#\pm CP^2$이 양의 단면 곡률이 존재 여부를 밝히는 것도 중요한 문제이다. 이 공간에는 치거(Cheeger)에 의해 음이 아닌 단면 곡률을 가지는 계량을 구체적으로 만들었다 [7].

호프의 문제 1. *2차원 구의 곱 다양체* $S^2\times S^2$ *에는 양의 단면 곡률을 가지는 계량이 존재하지 않는다.*

이 문제가 중요한 이유는 단면 곡률이 양인 다양체와 음이 아닌 다양체의 차이가 무엇인지 밝혀 주는 좋은 예가 될수 있기 때문이다. 곱 다양체는 위상적으로는 간단하지만 리만 기하학적 입장에서는 다루기 힘든 대상이다. 지금까지 알려진 모든 기법을 제대로 적용하지 못하고 있다. 단면 곡률 $K>0$와 $K\geq 0$이 과연 위상적으로 어떻게 구별할수 있는지 밝혀야 한다.

4차원 리만 다양체에는 중요한 위상적 불변수가 있는데 오일러의 수(Euler number 혹은 Euler characteristic)와 시그내츄어(Signaure)가 있다 [5]. 물론 최근에 두 불변수 이외의 새로운 불변수가 발견되었지만 양의 단면 곡률 혹은 음이 아닌 단면 곡률을 가지는 공간에서는 쓸모가 없다.

곡률 텐서 R은

$$R=U+W^{+}+W^{-}+Z$$

으로 분할할 수 있다. U는 스칼라 곡률 텐서이고 공변 텐서 $W=W^{+}+W^{-}$는 "self-dual" 부분 W^{+}와 "anti-self-dual"인 부분 W^{-}으로 나뉘어진다. Z는 "trace-free"인 리치 텐서이다 [5].

4차원의 오일러 수 $\chi(M^4)$는 천-가우스-본넷(Chern-Gauss-Bonnet)의 정리에 의해 다음과 같은 적분으로 주어진다.

$$\chi(M^4) = \frac{1}{8\pi^2}\int_M ||W_+||^2 + ||W_-||^2 + ||U||^2 - ||Z||^2 d\mu.$$

또한 4차원의 시그내츄어 $\tau(M^4)$는 히제부르(Hirzebruch) 시그내츄어 공식에 의해 주어진다.

$$\tau(M^4) = \frac{1}{12\pi^2}\int_M ||W_+||^2 - ||W_-||^2 d\mu$$

여기에서 곡률, 노옴 $||\cdot||$과 체적 요소 $d\mu$들은 M의 리만 계량 g에 대한 것이다.

(M,g)는 $2m$-차원의 컴팩트 유향 리만 다양체라고 하자. 오일러 수 $\chi(M)$는 천-가우스-본넷의 정리에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$\chi(M^{2m}) = \frac{(-1)^m}{2^{3m}\pi^m m!}\int_M \epsilon_{(i)}\epsilon_{(j)}R_{i_1i_2j_1j_2}\cdots R_{i_{m-1}i_mj_{m-1}j_m}d\mu.$$

여기에서 $\epsilon_{(i)} = \epsilon_{i_1\cdots i_m}$은 순열 $(1,\cdots,n;i_1\cdots i_n)$의 부호이다. R_{ijkl}은 곡률 텐서의 성분이다.

또 다른 단면 곡률에 대한 호프의 문제는 다음과 같다 [23].

호프의 문제 2. (M,g)은 $2m$-*차원의 컴팩트 유향 리만 다양체이다. 그러면* M*의 오일러 수* $\chi(M)$*는 다음을 만족한다.*

(1) *만약* $K \geq 0$ *이면* $\chi(M) \geq 0$ *이다.*
(2) *만약* $K > 0$ *이면* $\chi(M) > 0$ *이다.*
(3) *만약* $K \leq 0$ *이면* $(-1)^m\chi(M) \geq 0$ *이다.*
(4) *만약* $K < 0$ *이면* $(-1)^m\chi(M) > 0$ *이다.*

이 문제를 호프의 근본적인 문제(fundamental conjecture)라 한다. 2차원의 경우는 가우스-본넷의 정리에 의해 호프의 문제는 당연하게 성립한다.

4차원의 경우를 보자. 다양체의 임의의 점에서 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$는 길이가 1이고 수직인 움직이는 틀이다. $K_{ij} = K(e_i,e_j)$는 e_i와 e_j로 만들어지는 평면의 단면 곡률이다. 밀노(J. Milnor)는 좌표를 적당히 선택하여 다음과 같은 식을 유도하였고 4차원에서 위의 문제가 사실임을 증명하였다 [9].

$$\begin{aligned}&\chi(M^4)\\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_M K_{12}K_{34} + K_{13}K_{24} + K_{14}K_{23} + R_{1234}^2 + R_{1324}^2 + R_{1423}^2 d\mu.\end{aligned}$$

4차원과 달리 6차원의 열린 다양체에서는 오일러 수의 피적분 함수가 음이 될 수 있음을 게로치(Geroch)와 클렘벡(Klembeck)이 보였다. 그러나 그들의 결과가 컴팩트 다양체에서도 그런 현상이 일어날 수 있는지에 대해서는 아직 알려져 있지 않다 [13].

6차원 이상에서는 오일러 수의 피적분 함수가 너무 복잡하여 아주 특수한 경우를 제외하면 알려진 것이 별로 없다.

References

[1] S. Aloff and N. Wallach, *An infinite family of distinct 7-manifolds admitting positively curved manifolds*, Bull. Amer. math. Soc. **81** (1975), 93–97.

[2] A. Bazaikin, *On a family of 13-dimensional closed Riemannian manifolds of positive secional curvature*, Thesis, Univ. of Novosibirisk, 1995.

[3] M. Berger, *Les variétés riemanniennes $\frac{1}{4}$-pincées* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **14** (1960), 161–170.

[4] ———, *Les variétés riemanniennes homogénes normales simplement connexes á coubure stictement positive* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **15** (1961), 179–246.

[5] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, 1987.

[6] S. Bochner, *Vector fields and Ricci curvature*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 776–797.

[7] J. Cheeger , *Some examples of manifolds of nonnegative Curvature*, J. Differential Geom. **8** (1973), 623–628.

[8] J. Cheeger and D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North Holland, Amsterdam, 1975.

[9] S. S. Chern , *On curvature and Charateristic Class of a Riemannian Manifold*, J. Abh. Math. Sem. Univ. Hamhurg **20** (1955), 117–126.

[10] ———, *The Geometry of G-structure*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 167–219.

[11] J. H. Eschenberg, *Inhomogeneous space of positive curvature*, Differential Geom. Appl. **2** (1992), 123–132.

[12] ———, *New examples of manifolds with stictly positive curvature*, Invent. Math. **66** (1982), 469–480.

[13] R. Geroch, *Positive sectional curvature does not imply positive Gauss-Bonnet integrand*, Proc. Amer. Math. Soc. **54** (1976), 267–270.

[14] D. Gromoll and W. T. Meyer, *An exotic sphere with nonnegative sectional curvature*, Ann. of Math. **100** (1974), 401–406.

[15] R. Hamilton, *3-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. **12** (1982), 255–306.

[16] ———, *Formation of singularities in the Ricci flow*, Surv. Differ. Geom. **2** (1985), 7–136.

[17] ———, *Non-singular solutions of the Ricci flow on 3-manifolds*, Comm. Anal. Geom. **7** (1999), 695–729.

[18] H. Hopf, *Differentilageometrie und topologische Gestalt*, Jahres-berichtd. DMV. **41** (1932), 209–229.

[19] S. B. Myers, *Riemannian Manifolds with Positive Mean Curvature*, Duke Math. J. **8** (1941), 401–404.

[20] B. O'neill, *The fundamental equation of a submerion*, Michigan Math. J. **23** (1966), 459–469.
[21] H. Samelson, *On curvature and characteristic of homogenous spaces*, Michigan Math. J. **5** (1958), 13–18.
[22] J. L. Synge, *On the Connectivity of Spaces of Positive Curvature*, Q. J. Math. **7** (1936), 316–320.
[23] S. Tanno, *Pomenades on spheres*, Tokyo Ibst. Tech. 1996.
[24] N. Wallach, *Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature*, Ann. of Math. **96** (1972), 277–295.
[25] S. T. Yau, *Problem section* , Seminar on Differential Geometry, Princeton Univ. Press, 1977, 669–709.
[26] F. Zheng, *Complex Differential Geometry*, Studies in Advanced Math. **18** (2000).

인하대학교 이과대학
수학통계학부 수학전공
인천시 남구 용현동 253
402-751
E-mail: ksko@inha.ac.kr