The Korean Communications
in Statistics Vol. 12 No. 1, 2005
pp. 71-86

The Limit Distribution of an Invariant Test Statistic for Multivariate Normality[1]

Namhyun Kim[2]

Abstract

Testing for normality has always been an important part of statistical methodology. In this paper a test statistic for multivariate normality is proposed. The underlying idea is to investigate all the possible linear combinations that reduce to the standard normal distribution under the null hypothesis and compare the order statistics of them with the theoretical normal quantiles. The suggested statistic is invariant with respect to nonsingular matrix multiplication and vector addition. We show that the limit distribution of an approximation to the suggested statistic is representable as the supremum over an index set of the integral of a suitable Gaussian process.

Keywords : multivariate normality, goodness-of-fit tests, Gaussian process, Brownian bridge, quantile process.

1. 서론

$\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$을 p-변량 확률변수 $\boldsymbol{X}$의 분포에서 관측한 확률표본이라고 하자. 여기서 p는 $p \geq 1$인 고정된 정수이다. 또한 평균이 $\boldsymbol{\mu}$이고 공분산 행렬이 $\boldsymbol{\Sigma}$인 p-변량 정규분포를 $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$라고 하자. 대부분의 다변량 해석기법은 다변량 정규분포의 가정, 즉

$$H_0 : \boldsymbol{X}\text{의 분포가 어떤 } \boldsymbol{\mu}\text{와 정칙행렬 } \boldsymbol{\Sigma}\text{에 대해서 } N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})\text{를 따른다.}$$

에서 여러 가지 추론방법을 제안하고 있으므로 다변량 정규분포에 대한 적합도 검정은 그 중요성을 무시할 수 없다.

따라서 다변량 정규분포를 검정하기 위한 많은 통계량들이 제안되어 온 것은 매우 당연한 일이다. 이에 대한 일반적인 방법에 대해서는 D'Agostino & Stephens(1986, section 9.7), Thode(2002, Chapter 9) 그리고 Henze(2002) 등을 참고로 한다. Mardia(1970, 1974, 1975)와 Malkovich & Afifi(1973)는 일변량 왜도와 첨도를 다변량으로 확장하는 방법을 제안하였고 Machado(1983), Baringhaus & Henze(1992)는 이들이 정의한 다변량 왜도와 첨도의 극한분포를 구하였다.

---

1) This work was supported by 2004 Hongik University research fund.

2) Associate Professor, Department of Science, Hongik University, Seoul, 121-791, Korea.
E-mail : nhkim@hongik.ac.kr

Malkovich & Afifi(1973)는 또한 Shapiro & Wilk(1965)가 제안한 일변량 정규분포의 검정통계량을 Roy(1953)의 합교 원리(union-intersection principle)를 이용하여 다변량으로 확장하였다. 이는 $\boldsymbol{X}$가 다변량 정규분포를 따르면 모든 $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$에 대해서 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}$가 일변량 정규분포를 따른다는 사실을 이용하는 것이다. 여기서 $'$은 전치(transpose)를 의미한다. Fattorini(1986)는 Malkovich & Afifi(1973)의 통계량을 수정, 보완하였다. 그리고 Baringhaus & Henze(1988), Henze & Zirkler(1990), Henze & Wagner(1997), Csörgő(1989)는 Epps & Pulley(1983)가 제안한 경험적 특성함수(empirical characteristic function)를 이용한 일변량 정규분포의 검정법을 다변량으로 확장하고 이의 일치성(consistency)과 극한분포에 대하여 연구하였다. Zhu, Wong & Fang(1995), Zhu, Fang & Bhatti(1997), Liang, Li, Fang & Fang(2000)은 사영추적(projection pursuit)을 이용한 검정법에 대해서 연구하였다. 그리고 Horswell & Looney(1992)와 Romeu & Ozturk(1993)은 다변량 정규성 검정을 위한 여러 가지 통계량을 비교 연구하였다.

Kim & Bickel(2003)에서는 $p=2$, $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2)'$일 때 복합귀무가설 H_0를 검정하기 위하여

$$P_n = \max_{c_1, c_2} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{(c_1X_1 + c_2X_2)_{(i)} - (c_1\overline{X_1} + c_2\overline{X_2})}{sd(c_1X_1 + c_2X_2)} - H_i \right\}^2$$

을 제안하였다. 여기서 $\overline{X_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ki}$, $sd^2(c_1X_1 + c_2X_2) = c_1^2\widehat{\sigma_1^2} + c_2^2\widehat{\sigma_2^2} + 2c_1c_2\hat{\rho}\widehat{\sigma_1}\widehat{\sigma_2}$, $\widehat{\sigma_k^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{ki} - \overline{X_k})^2$, $k=1,2$, $\hat{\rho} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - \overline{X_1})(X_{2i} - \overline{X_2})/(\widehat{\sigma_1}\widehat{\sigma_2})$이고 $(\cdot)_{(i)}$는 괄호안의 확률변수의 i번째 순서통계량이다. 또한 $H_i = \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)$, Φ^{-1}은 표준정규분포 $N_1(0,1)$의 분포함수 Φ의 역함수이다. P_n-통계량은 Shapiro & Wilk(1965)의 검정통계량과 밀접한 관련이 있고, 같은 극한분포를 갖는 de Wet & Vener(1972)의 일변량 정규분포의 검정통계량을 Malkovich & Afifi(1973)에서와 마찬가지로 Roy의 합교 원리를 이용하여 이변량으로 일반화한 것이다. 이를 벡터를 이용하여 표현하면

$$P_n = \max_{\boldsymbol{c},\, \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{(\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}}))_{(i)}}{(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{c})^{1/2}} - H_i \right]^2 := \max_{\boldsymbol{c}} \sum_{i=1}^{n} D(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{X})^2 \tag{1.1}$$

으로 정의될 수 있다. 여기서 $\overline{\boldsymbol{X}}$는 표본평균벡터이고 $\boldsymbol{S}$는 공분산 행렬,

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_i - \overline{\boldsymbol{X}})'$$

이고 기호 $:=$는 정의를 의미한다. 즉, 통계량 P_n은 이변량뿐만 아니라 $p>2$인 다변량에서도 같은 방법으로 정의될 수 있다. 일반적으로 위치, 척도 불변(location-scale invariant)인 일변량 정규성 검정통계량을 위와 같이 Roy의 합교원리를 이용하여 다변량으로 확장하는 경우, 해당하는 다변량 통계량은 항상 벡터합과 정칙행렬곱에 대해서 불변(affine invariant)이 된다. 따라서 P_n-통계량도 이를 만족한다. 즉, $P_n = P_n(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$일 때

$$P_n(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_n + \boldsymbol{b}) = P_n(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$$

이 성립한다. 그 결과 P_n-통계량의 분포는 H_0에서 모수 μ와 Σ에 의존하지 않는다. X가 정규분포일 때 $AX+b$ ($b \in R^p$, $A \in R^{p \times p}$, A는 정칙행렬)도 역시 정규분포를 따르기 때문에 이는 매우 바람직한 성질이다. Kim(2004)에서는 P_n-통계량을 $p>2$일 때도 실제적으로 계산할 수 있는 방법을 제안하였다. 본 논문에서는 P_n의 근사통계량의 귀무가설에서의 극한분포를 $p \geq 2$인 임의의 p-변량일 때 가우스 과정(Gaussian process)의 적분의 형태로 표현하고자 한다. 이를 위하여 Kim & Bickel(2003)에서 이용한 이변량에서의 증명 방법을 일반적인 p-변량으로 확장하여야 한다.

2. P_n-통계량의 극한분포

P_n-통계량의 귀무가설 H_0에서의 극한분포를 구하기 위해서 우선 단순귀무가설

$$H_0^s:\ X\text{의 분포는 } N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})\text{를 따른다.}$$

에서의 통계량

$$P_n^0 = \max_{c, \|c\|=1} \sum_{i=1}^{n} \left((c'X)_{(i)} - H_i \right)^2 \tag{2.1}$$

과 적절한 I_n에 대해서 이의 근사통계량

$$P_n^{0T} = \max_{c, \|c\|=1} \sum_{i=I_n}^{n-I_n} \left((c'X)_{(i)} - H_i \right)^2 \tag{2.2}$$

을 고려하자. P_n^{0T}와 마찬가지로 식(1.1)의 P_n의 근사통계량 P_n^T를

$$P_n^T = \max_{c, \|c\|=1} \sum_{i=I_n}^{n-I_n} D(c, X)^2 \tag{2.3}$$

라고 하자. 여기서 $D(c, X)$는 식(1.1)의 두 번째 식의 대괄호안의 식을 말한다. P_n은 벡터합과 정칙행렬곱에 대해서 불변이므로 노름(norm)이 1인 벡터로 제한해서 최대를 취해도 무방하다.

X가 $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$를 따르고 $\| c_i \| = 1$, $i = 1, 2$일 때, 가우스 과정 $B(y, c)$는 공분산 함수가

$$Cov(B(y_1, c_1), B(y_2, c_2)) = \Pr\left(c_1{}'X \leq \Phi^{-1}(y_1) \text{ and } c_2{}'X \leq \Phi^{-1}(y_2) \right) - y_1 y_2 \tag{2.4}$$

인 브라운 다리(Brownian bridge)라고 하자. 다시 말해서 $Cov(B(y_1, c_1), B(y_2, c_2)) + y_1 y_2$는

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & c_1{}'c_2 \\ c_1{}'c_2 & 1 \end{pmatrix}$$

인 이변량 정규분포 $N_2(\mu_2, \Sigma_2)$에서의 확률로 주어지며 $c_1 = c_2$일 때 B의 공분산 함수는 $\min(y_1, y_2) - y_1 y_2$로 일변량 브라운 다리의 공분산 함수와 일치한다.

P_n^{0T}와 P_n^T에 대해서 다음과 같은 결과를 얻는다.

정리 2.1. 단순귀무가설 H_0^s에서

$$P_n^{0T} - a_n^T \xrightarrow{d} \sup_{c, \|c\|=1} \int_0^1 \frac{B^2(y,\ c) - y(1-y)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))}\, dy$$

이 성립한다. 여기서 I_n은 $I_n = [n^{1-\delta}]$, $0 < \delta < 1/4p$이고 $\phi(x)$는 표준정규분포의 확률밀도함수이고,

$$a_n^T = \frac{1}{n} \sum_{i=I_n}^{n-I_n} \left(\frac{i}{n+1}\right)\left(1 - \frac{i}{n+1}\right) / \phi^2\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right) \tag{2.5}$$

이다.

정리 2.2. 복합귀무가설 H_0에서

$$P_n^T - a_n^T \xrightarrow{d} \sup_{c, \|c\|=1} \left[\int_0^1 \frac{B^2(y,\ c) - y(1-y)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))}\, dy - \left(\int_0^1 \frac{B(y,\ c)}{\phi(\Phi^{-1}(y))}\, dy \right)^2 - \left(\int_0^1 \frac{B(y,\ c)}{\phi(\Phi^{-1}(y))}\, \Phi^{-1}(y)\, dy \right)^2 \right]$$

이 성립한다. 여기서 P_n^T의 I_n은 정리 2.1과 동일한 조건을 만족한다.

식(2.1)의 P_n^0와 식(1.1)의 P_n에 대해서도 각각 정리 2.1과 정리 2.2의 결과가 만족될 것으로 예상한다.

위의 정리를 증명하기 위해서는 몇 개의 보조정리가 필요하다. 우선 P_n^0와 관련이 있는 $\boldsymbol{R}^p$에서의 경험과정(empirical process)과 분위수 과정(quantile process)를 정의하고 이들이 식(2.4)의 공분산 함수를 갖는 브라운 다리로 근사됨을 보인다. 이를 위하여 이변량에서와 유사하게 Massart(1989)와 Adler(1990)의 정리를 이용한다.

$0 < y < 1$인 y와 $\|\boldsymbol{c}\| = 1$인 $\boldsymbol{c}$에 대해서

$$S := S(y,\ \boldsymbol{c}) := \{ \boldsymbol{u} \in [0,1]^p :\ \boldsymbol{c}'\ \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{u}) \le \Phi^{-1}(y) \} \tag{2.6}$$

$$\mathfrak{I} := \{ S(y,\ \boldsymbol{c}) \subset [0,1]^p : 0 < y < 1, \|\boldsymbol{c}\| = 1 \} \tag{2.7}$$

$$\Xi := \{ (y,\ \boldsymbol{c}) : 0 < y < 1, \|\boldsymbol{c}\| = 1 \} \tag{2.8}$$

라고 하자. 여기에서 $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_p)'$, $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{u}) = (\Phi^{-1}(u_1), \ldots, \Phi^{-1}(u_p))'$이다. 그리고 경험적 측도(empirical measure) $\boldsymbol{P}_n(S)$, $S = S(y,\ \boldsymbol{c}) \in \mathfrak{I}$를

$$\boldsymbol{P}_n(S) := \boldsymbol{P}_n(S(y,\ \boldsymbol{c})) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(\ \boldsymbol{U}_i \in S(y,\ \boldsymbol{c})) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(\ \boldsymbol{c}'\ \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\ \boldsymbol{U}_i) \le \Phi^{-1}(y))$$

라고 하고 α_n을 $\boldsymbol{P}_n(S)$에 해당하는 경험과정

$$\alpha_n := \sqrt{n}(\ \boldsymbol{P}_n - \boldsymbol{P}) \tag{2.9}$$

라고 하자. 여기서 $\boldsymbol{P}$는 $[0,1]^p$에서의 균일분포이고 $\boldsymbol{U}_i = (U_{1i}, \ldots, U_{pi})$, $i = 1, \ldots, n$은 분포 $\boldsymbol{P}$를 따르는 i. i. d. 확률변수이다. $\mathfrak{I}$의 원소인 S는 $(y,\ \boldsymbol{c}) \in \Xi$에 의해서 결정되므로

$$P_n(S) := P_n(S(y,\ c)) := P_n(y,\ c)$$

로 정의해도 무방하며 이는 식(2.9)의 경험과정 α_n과 위의 정리의 브라운 다리 B에도 마찬가지로 성립한다.

정리의 증명을 위해서 우선 식(2.9)의 α_n이 식(2.4)의 공분산 함수를 갖는 브라운 다리로 근사됨을 보여야 하며 이를 위하여 Massart(1989)의 정리 1을 이용한다. 이 정리는 집합군 $\mathfrak{J}$가 정리에 제시된 조건을 만족하면 α_n이 $\mathfrak{J}$에서의 브라운 다리로 근사될 수 있다는 것이다. 집합군 $\mathfrak{J}$에서의 가우스 과정 $\{B(S) : S \in \mathfrak{J}\}$가

$$EB(S) = 0,\ E(B(S_1)B(S_2)) = P(S_1 \cap S_2) - P(S_1)P(S_2),\ \ S_i \in \mathfrak{J},\ \ i = 1, 2$$

를 만족하면 $\mathfrak{J}$에서의 브라운 다리라고 함을 상기하자. Massart(1989)의 조건은 집합 $S \in \mathfrak{J}$의 경계의 매끄러움(smoothness)에 관한 조건과 집합군 $\mathfrak{J}$의 원소가 적절한 의미에서 너무 많지 않아야 한다는 조건이다. 이를 적용하여 다음을 얻는다.

보조정리 2.1. 식(2.7)에 정의된 R^p에서의 집합군 $\mathfrak{J}$는 Massart(1989)의 UM(uniform Minkowski) 조건과 $H(1/2)$을 만족한다. 따라서 식(2.9)의 경험과정 $\{\alpha_n(S) : S \in \mathfrak{J}\}$에 대해서

$$\sup_{S \in \mathfrak{J}} |\alpha_n(S) - B_n(S)| \overset{a.s.}{=} O(n^{-1/4p} \log n) \tag{2.10}$$

이 성립하는 브라운 다리 $\{B_n(S) : S \in \mathfrak{J}\}$가 존재한다. $B_n(S)$는 식(2.4)의 공분산 함수를 갖는다.

다음으로 식(2.9)의 경험과정에 해당하는 균일 분위수 과정(uniform quantile process) u_n을 정의하고 u_n의 브라운 다리로의 약수렴(weak convergence)을 언급한다. $U_n(y,\ c)$를

$$U_n(y,\ c) := U_n(S(y,\ c)) := \big(\Phi(\ c'\ \Phi^{-1}(\ U_i))\big)_{(k)} := U_{(k)}(\ c),$$
$$\frac{k-1}{n} < y \le \frac{k}{n},\ \ k = 1, \ldots, n$$

이라고 하고 균일 분위수 과정 $u_n(y,\ c)$를

$$u_n(y,\ c) := u_n(S(y,\ c)) := \sqrt{n}\,(U_n(y,\ c) - y) \tag{2.11}$$

라고 하자.

보조정리 2.2. 식(2.11)의 균일 분위수 과정 u_n에 대해서

$$\sup_{(y,\ c) \in \Xi} |u_n(y,\ c) - B_n'(y,\ c)| = O_p(n^{-1/4p} \log n)$$

을 만족하는 Ξ에서의 브라운 다리 B_n'가 존재한다. 여기에서 B_n'는 식(2.10)의 브라운 다리 B_n에 대하여 $B_n' = -B_n$이 성립한다.

다음으로 분위수 함수(quantile function) $Q_n(y, c)$를

$$Q_n(y, c) := \begin{cases} (c' \Phi^{-1}(U_i))_{(k)} := X_{(k)}(c), & \frac{k-1}{n+1} < y \le \frac{k}{n+1}, \quad k=1, \ldots, n \\ (c' \Phi^{-1}(U_i))_{(n)} := X_{(n)}(c), & \frac{n}{n+1} < y \le 1 \end{cases} \tag{2.12}$$

이라고 하고 분위수 과정(normed quantile process) $\rho_n(y, c)$를

$$\rho_n(y, c) := \phi(\Phi^{-1}(y))\sqrt{n}\,(Q_n(y, c) - \Phi^{-1}(y)) \tag{2.13}$$

라고 하자. ρ_n에 대하여 다음의 사실을 얻는다.

보조정리 2.3. $0 < \delta < 1/4$ 인 δ에 대하여

$$\sup_{n^{-\delta} \le y \le 1 - n^{-\delta},\, c} |\rho_n(y, c) - u_n(y, c)| = O_p(n^{-(1/2 - 2\delta)}) = o_p(1)$$

이 성립한다.

보조정리 2.3의 증명은 이변량에서와 마찬가지로 Csörgő & Révész(1981)의 정리 4.5.6과 거의 동일하므로 생략한다.

보조정리 2.4. 식(2.13)에서 정의한 분위수 과정(normed quantile process) $\rho_n(\cdot)$ 에 대하여

$$\sup_{n^{-\delta} \le y \le 1 - n^{-\delta},\, c} |\rho_n(y, c) - B_n'(y, c)| = O_p(n^{-1/4p} \log n)$$

이 성립하는 Ξ에서의 브라운 다리 B_n'가 존재한다. 여기서 δ는 $0 < \delta \le (2p-1)/8p$ 이다.

증명. 보조정리 2.2와 2.3으로부터 자명하다. □

보조정리 2.1, 2.2와 정리 2.1, 2.2의 증명은 3절에서 하기로 한다. 대부분의 증명은 Kim & Bickel(2003)의 이변량에서의 증명을 p-변량으로 일반화하는 과정이다. 이변량일 때의 증명에서는 $c = (c_1, c_2)$, $\|c\| = 1$을 $c_1 = \cos\theta$, $c_2 = \sin\theta$로 재모수화(reparametrization)하여 단일변수 θ에 대하여 다루었다. p-변량일 경우에는 c, $\|c\| = 1$을 $p-1$개의 모수 $\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}$로 표현하기 위해서 관계식

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos\theta_1 \\ c_2 &= \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ &\cdots \\ c_{p-1} &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{p-2} \cos\theta_{p-1} \\ c_p &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{p-2} \sin\theta_{p-1} \end{aligned} \tag{2.14}$$

을 이용한다. 즉, $\Xi := \{(y, c) : 0 < y < 1, \|c\| = 1\}$을

$$\Xi' := \{(y, \theta) : 0 < y < 1, \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}), 0 \le \theta_i < 2\pi, i = 1, \ldots, p-1\} \tag{2.15}$$

로 대치할 수 있다. 이러한 표현은 특히 보조정리 2.1의 증명에 유용하게 사용된다.

보조정리 2.2의 증명을 위해서는 Adler(1990)의 정리를 이용한 일련의 보조정리가 필요하며 이

들의 증명은 θ를 모수로 한 이변량의 경우를 $\boldsymbol{c}$로 바꾸는 자명한 일반화를 통하여 어렵지 않게 완성될 수 있다.

3. 증명

3.1 보조정리 2.1의 증명

(i) UM(uniform Minkowski) 조건

식(2.7)의 집합군 $\mathfrak{I}$가 UM 조건을 만족한다는 것은 임의의 $\varepsilon \in (0,1]$과 $S \in \mathfrak{I}$에 대해서

$$P((\partial S)^{\varepsilon}) \leq K\varepsilon \tag{3.1}$$

을 만족하는 상수 K가 존재한다는 것이다. 여기서 ∂S는 식(2.6)의 집합 S의 경계를 말하고 어떤 집합 B에 대하여 B^{ε}은

$$B^{\varepsilon} = \{ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^{p} : \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} \| < \varepsilon \ \text{ for some } \ \boldsymbol{z} \in B \}$$

을 의미한다.

임의의 $S \in \mathfrak{I}$에 대해서, S의 경계 ∂S는

$$\partial S = \{ \boldsymbol{u} \in [0,1]^{p} : \boldsymbol{c}' \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{u}) = \Phi^{-1}(y) \}$$

이고 식(3.1)을 보이기 위해서 ∂S의 표면적 $A(\partial S)$이

$$A(\partial S) \leq p$$

임을 보이면 충분하다. 미적분학의 기본적인 정리(예를 들어 Finney & Thomas(1994), 15.5절)를 이용하면

$$A(\partial S) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sqrt{\sum_{m=2}^{p} \left[\frac{c_m \phi(\Phi^{-1}(u_1))}{c_1 \phi(\Phi^{-1}(u_m))} \right]^2 + 1} \, du_2 \cdots du_p$$

이고 따라서

$$A(\partial S) \leq \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\sum_{m=2}^{p} \left| \frac{c_m \phi(\Phi^{-1}(u_1))}{c_1 \phi(\Phi^{-1}(u_m))} \right| + 1 \right) du_2 \cdots du_p$$

을 만족한다. $\boldsymbol{c}' \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{u}) = \Phi^{-1}(y)$를 u_1에 대해서 정리하여 $\partial u_1 / \partial u_m$, $m = 2, \ldots, p$를 구하면

$$\frac{\partial u_1}{\partial u_m} = - \frac{c_m \phi(\Phi^{-1}(u_1))}{c_1 \phi(\Phi^{-1}(u_m))}$$

이므로

$$A(\partial S) \leq \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\sum_{m=2}^{p} \left| \frac{\partial u_1}{\partial u_m} \right| + 1 \right) du_2 \cdots du_p \leq p$$

이고 이로부터 식(3.1)이 성립하여 UM 조건은 성립한다.

(ii) 조건 $H(1/2)$

이 조건은 식(2.7)의 집합군 $\mathfrak{I}$의 최소 기수(minimal cardinality)에 관한 조건이다. 집합군 $\mathfrak{I}$

의 원소 S는 $(y,\ \boldsymbol{c})$에 의해서 결정되므로 $\mathcal{T}$의 기수(cardinality) 대신 식(2.8)의 Ξ의 기수를 고려해도 되고, 같은 이유로 식(2.15)의 Ξ'의 기수를 고려해도 무방하다.

$\boldsymbol{c}$에 대응하는 $\boldsymbol{\theta}$에 대해서 $S(y,\ \boldsymbol{\theta}):=S(y,\ \boldsymbol{c})$라고 하자. 이변량에서와 마찬가지로 증명의 기본적인 내용은

$$|y_1-y_2|\le\delta,\ \ |\theta_{1j}-\theta_{2j}|\le\delta,\ \ j=1,\ldots,p-1 \tag{3.2}$$

일 때

$$P(S(y_1,\ \boldsymbol{\theta}_1)\triangle S(y_2,\ \boldsymbol{\theta}_2))\le C\delta \tag{3.3}$$

임을 보이는 것이다. 여기에서 $\boldsymbol{\theta}_i=(\theta_{i1},\ldots,\theta_{i(p-1)})$, $i=1,2$이고 $\triangle$는 두 집합의 대칭적 차이(symmetric difference)를 의미한다. 또한 C는 일반적인 상수로 아래의 각각의 식에서 모두 같은 값을 가질 필요는 없다.

우선 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_{p-1})$에 대해서 $0\le\theta_j\le\pi/4$이고 주어진 ε에 대해서 $\varepsilon/2\le y\le1/2$이라고 가정하자. 그리고 이러한 조건과 식(3.2)를 만족하는 $y_1,\ y_2,\ \boldsymbol{\theta}_1,\ \boldsymbol{\theta}_2$에 대해서 식(3.3)을 증명하자. $\boldsymbol{c}$는 식(2.14)에서 $\boldsymbol{\theta}_1$에 대응하고 $\boldsymbol{d}$는 $\boldsymbol{\theta}_2$에 대응한다고 하자. 그러면

$$\begin{aligned}
&P(S(y_1,\ \boldsymbol{\theta}_1)\triangle S(y_2,\ \boldsymbol{\theta}_2))\\
&\le\int_0^1\cdots\int_0^1\left|\Phi\left(\frac{1}{c_1}\Phi^{-1}(y_1)-\sum_{m=2}^{p}\frac{c_m}{c_1}\Phi^{-1}(u_m)\right)-\Phi\left(\frac{1}{d_1}\Phi^{-1}(y_1)-\sum_{m=2}^{p}\frac{d_m}{d_1}\Phi^{-1}(u_m)\right)\right|du_2\cdots du_p\\
&\le C\int_0^1\cdots\int_0^1\left|\frac{1}{c_1}\Phi^{-1}(y_1)-\frac{1}{d_1}\Phi^{-1}(y_2)\right|+\sum_{m=2}^{p}\left|\frac{c_m}{c_1}-\frac{d_m}{d_1}\right||\Phi^{-1}(u_m)|du_2\cdots du_p
\end{aligned}$$

이다. $\varepsilon/2\le y\le1/2$, $0\le\theta_j\le\pi/4$, $j=1,\ldots,p-1$이므로

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{c_1}\Phi^{-1}(y_1)-\frac{1}{d_1}\Phi^{-1}(y_2)\right|\\
&\le\left|\frac{1}{c_1}\right||\Phi^{-1}(y_1)-\Phi^{-1}(y_2)|+\left|\frac{1}{c_1}-\frac{1}{d_1}\right||\Phi^{-1}(y_2)|\\
&=\left|\frac{1}{\cos\theta_{11}}\right||\Phi^{-1}(y_1)-\Phi^{-1}(y_2)|+\left|\frac{1}{\cos\theta_{11}}-\frac{1}{\cos\theta_{21}}\right||\Phi^{-1}(y_2)|\\
&\le C\delta
\end{aligned}$$

이고, 또한

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{c_m}{c_1}-\frac{d_m}{d_1}\right|,\ \ m=2,\ldots,p-1\\
&=\left|\frac{1}{\cos\theta_{11}}\Pi_{j=1}^{m-1}\sin\theta_{1j}\cos\theta_{1m}-\frac{1}{\cos\theta_{21}}\Pi_{j=1}^{m-1}\sin\theta_{2j}\cos\theta_{2m}\right|\\
&\le\left|\frac{1}{\cos\theta_{11}}\right||\Pi_{j=1}^{m-1}\sin\theta_{1j}\cos\theta_{1m}-\Pi_{j=1}^{m-1}\sin\theta_{2j}\ \ \cos\theta_{2m}|\\
&\qquad+\left|\frac{1}{\cos\theta_{11}}-\frac{1}{\cos\theta_{21}}\right||\Pi_{j=1}^{m-1}\sin\theta_{2j}\cos\theta_{2m}|\\
&\le C\delta
\end{aligned}$$

이다. 마찬가지 방법으로

$$\left|\frac{c_p}{c_1}-\frac{d_p}{d_1}\right|=\left|\frac{1}{\cos\theta_{11}}\Pi_{j=1}^{p-1}\sin\theta_{1j}-\frac{1}{\cos\theta_{21}}\Pi_{j=1}^{p-1}\sin\theta_{2j}\right|\le C\delta$$

가 성립한다. 따라서 식(3.3)이 성립하고 그 이외의 경우에 식(3.3)의 증명은 이변량의 경우와 동일하므로 Kim(1994)을 참고한다.

$N(\varepsilon,\mathfrak{I})$을 $\mathfrak{I}(\varepsilon)$의 최소기수라고 하자. 여기서 $\mathfrak{I}(\varepsilon)$은 임의의 $S\in\mathfrak{I}$에 대해서 $S^-(\varepsilon)\subseteq S\subseteq S^+(\varepsilon)$이고 $P(S^+(\varepsilon)-S^-(\varepsilon))\le\varepsilon$을 만족하는 $S^-(\varepsilon)\in\mathfrak{I}(\varepsilon)$, $S^+(\varepsilon)\in\mathfrak{I}(\varepsilon)$가 존재하는 보렐 집합(Borel set)의 집합군(collection)을 말한다. 그러면 식(3.3)을 이용하여 $(C\delta=\varepsilon)$ 적절한 상수 M과 K에 대하여

$$N(\varepsilon,\mathfrak{I})\le\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^p\le e^{p\sqrt{\frac{M}{\varepsilon}}}=e^{K\varepsilon^{-1/2}}$$

이므로 조건 $H(1/2)$를 만족한다.

3.2 보조정리 2.2의 증명

보조정리 3.1. 임의의 $(y_1,\ c_1)\in\Xi$ 과 $0<\eta<\pi/2$에 대하여

$$\Delta(\eta):=\Delta((y_1,\ c_1),\eta):=\{(y_2,\ c_2)\in\Xi:|y_1-y_2|<\eta,\|\ c_1-\ c_2\|<\eta\}$$

라고 하면 Ξ에서의 브라운 다리 B에 대하여

$$\sup_{(y_2,\ c_2)\in\Delta(\eta)}E[B(y_1,\ c_1)-B(y_2,\ c_2)]^2\le C\eta$$

인 C가 존재한다. 즉,

$$\sup_{(y_2,\ c_2)\in\Delta(\eta)}d((y_1,\ c_1),(y_2,\ c_2))\le\sqrt{C\eta}\tag{3.4}$$

이 성립한다. 여기서 d는

$$d((y_1,\ c_1),(y_2,\ c_2)):=[E(B(y_1,\ c_1)-B(y_2,\ c_2))^2]^{1/2}\tag{3.5}$$

로 정의된 정준 거리(canonical metric)이다.

증명. $\rho=\ c_1'\ c_2$, $y_1<y_2$라고 하고 Kim & Bickel(2003)의 Lemma 5와 같은 방법을 이용하면

$$E[B(y_1,\ c_1)B(y_2,\ c_2)]+y_1y_2\ge y_1-\int_\rho^1\frac{1}{2\sqrt{1-r^2}}dr\ge y_1-\int_\rho^1\frac{1}{2\sqrt{1-r}}dr$$

$$=y_1-\sqrt{1-\rho}=y_1-\sqrt{1-\ c_1'\ c_2}=y_1-\|\ c_1-\ c_2\|/\sqrt{2}\ge y_1-\|\ c_1-\ c_2\|$$

이고 따라서

$$E[B(y_1,\ c_1)-B(y_2,\ c_2)]^2\le(y_2-y_1)+2\|\ c_1-\ c_2\|$$

이므로 정리는 성립한다.

보조정리 3.2. Ξ에서의 브라운 다리 B에 대해서 $N_d(\varepsilon) \le K\varepsilon^{-2p}$가 성립한다. 여기서 d는 식(3.5)에 정의되어 있고 $N_d(\varepsilon)$은 Ξ을 포함할 수 있는 반지름이 ε인 닫힌 d-공(closed d-ball)의 최소의 개수이다.

증명. 식(2.8)의 Ξ과 (2.15)의 Ξ'는 일대일 대응관계에 있고 식(3.4)에 의해 Ξ'을 반지름 ε인 d-공(d-ball)으로 덮는(cover) 한 가지 방법은 중심을 $(i_1\varepsilon^2/C, \ldots, i_p\varepsilon^2/C)$, $i_1 = 0, 1, \ldots, [C/\varepsilon^2]$, $i_2 = 0, 1, \ldots, [2\pi C/\varepsilon^2], \ldots, i_p = 0, 1, \ldots, [2\pi C/\varepsilon^2]$으로 하는 반지름이 ε^2/C인 $(2 + C/\varepsilon^2)[(2 + 2\pi C/\varepsilon^2)]^{p-1}$개의 d-공을 고려하는 것이다. 그러면

$$N_d(\varepsilon) \le (2 + C/\varepsilon^2)[(2 + 2\pi C/\varepsilon^2)]^{p-1} \le K\varepsilon^{-2p}$$

이 성립한다.

□

아래의 보조정리 3.3, 3.4의 증명은 Kim & Bickel(2003)의 Lemma 7, 8과 거의 동일하며 적절한 지수의 변화만을 필요로 하므로 생략한다.

보조정리 3.3. Ξ에서의 브라운 다리 B는 Ξ에서 유계(bounded)이다.

보조정리 3.4. 만일 Ξ에서의 거리(metric) τ를

$$\tau((y_1, c_1), (y_2, c_2)) := \sup(|y_1 - y_2|, \| c_1 - c_2 \|)$$

라고 정의하면 거의 모든(almost all) ω에 대하여

$$\sup_{\tau < \eta} |B(y_1, c_1) - B(y_2, c_2)| \le C\eta, \quad \eta \le \delta(\omega)$$

를 만족하는 거의 확실하게(almost surely) 유한인 확률변수 $\delta = \delta(\omega)$가 존재한다.

보조정리 2.2는 보조정리 2.1과 보조정리 3.4를 이용하여 이변량의 경우와 동일하게 증명할 수 있으므로 구체적인 증명은 생략한다.

3.3 정리 2.1의 증명

보조정리 3.5. 단순귀무가설 'H_0^s: $\boldsymbol{X}$의 분포는 $N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$를 따른다.'에서

$$\left| (P_n^{0T} - a_n^T) - \sup_{c, \| c \| = 1} \int_{I_n/n}^{1 - I_n/n} \frac{B_n^2(y, c) - y(1-y)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))} dy \right| \xrightarrow{p} 0$$

이 성립한다. 여기서 I_n은 정리 2.1과 동일한 조건을 만족한다. P_n^{0T}는 식(2.2)에 a_n^T는 식(2.5)에 주어져 있다.

증명. 식(2.13)의 분위수 과정(normed quantile process) ρ_n을 이용하여 P_n^{0T}를 표현하면

$$P_n^{0T} - a_n^T = \sup_{c, \| c\| = 1} \frac{1}{n} \sum_{i=I_n}^{n-I_n} \frac{\left[\rho_n\left(\frac{i}{n+1}, c\right)\right]^2 - \frac{i}{n+1}\left(1-\frac{i}{n+1}\right)}{\phi^2\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)}$$

이고 보조정리 2.4와 이변량에서와 같은 방법(Kim & Bickel(2003)의 Lemma 9)을 사용하면

$$\sup_{c, \| c\| = 1} \sum_{i=I_n}^{n-I_n} \frac{\left|\left[\rho_n\left(\frac{i}{n+1}, c\right)\right]^2 - B_n^2\left(\frac{i}{n+1}, c\right)\right|}{n\phi^2\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)}$$

$$= O_p\left(n^{-(1/4p-\delta)}(\log n)(\log\log n)\right) = o_p(1), \quad 0 < \delta < 1/4p$$

이 성립한다.

보조정리 3.3에 의해서 $B^2(y, c)$는 Ξ에서 유계이므로

$$\sup_{c, \| c\| = 1} \int_{I_n/n}^{1-I_n/n} \frac{B_n^2(y, c) - y(1-y)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))} dy \le \int_{I_n/n}^{1-I_n/n} \sup_{c, \| c\| = 1} \frac{B_n^2(y, c) - y(1-y)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))} dy < \infty$$

이고 정리는 성립한다.

정리 2.1의 증명.

정리 2.1의 증명을 완성하기 위해서는 $S := \sup_{c, \| c\| = 1} \int_0^1 \frac{B^2(y, c) - y(1-y)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))} dy$의 존재성을 증명해야 한다. 그러면 보조정리 3.5에 의해서 정리는 성립한다. $\boldsymbol{i} = (1, 0, \ldots, 0) \in \boldsymbol{R}^p$일 때 del Barrio, Cuesta, Matrán & Rodríguez(1999)는 $\int_0^1 \frac{B^2(y, \boldsymbol{i}) - y(1-y)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))} dy$의 존재성을 L_2-극한으로 정의하였다. 따라서 S의 존재성을 보이기 위해서는 Billingsley(1968, 정리 12.3)에 의해서

$$\sup_{\| c_1 - c_2 \| < \eta} E\left[\int_0^1 \frac{B^2(y, c_2) - B^2(y, c_1)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))} dy\right]^2 < C\eta^{1+\varepsilon}$$

을 보이면 충분하다.

이제 $\| c_1 - c_2 \| < \eta$를 만족하는 임의의 c_1, c_2에 대해서

$$E\left[\int_0^{\varepsilon} \frac{B^2(y, c_2) - B^2(y, c_1)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))} dy\right]^2 < C\eta^2 |\log \eta| \tag{3.6}$$

임을 보이자.

$\phi(\Phi^{-1}(y)) := \psi(y)$, $\Pr(c_1' X \le \Phi^{-1}(y_1)$ and $c_2' X > \Phi^{-1}(y_2)) := LU(y_1, y_2;\ c_1, c_2)$ 라고 하면

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{B^2(y, c_2) - B^2(y, c_1)}{\psi^2(y)} dy$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \frac{[B(y, c_2) - B(y, c_1)]^2 - 2LU(y, y;\ c_1, c_2)}{\psi^2(y)} dy$$

$$-2\int_0^{\varepsilon}\frac{B(y,\ c_1)[B(y,\ c_1)-B(y,\ c_2)]-LU(y,y;\ c_1,\ c_2)}{\phi^2(y)}dy$$

$$:=I_1-2I_2$$

이다. $B(y_i,\ c_j)=B_{ij}$라고 하면 식(2.4)의 공분산 함수를 갖는 브라운 다리 $B(y,\ c)$에 대해서, $y_1<y_2$일 때

$$E(B_{11}B_{21})=y_1(1-y_2) \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}E[B_{11}(B_{21}-B_{22})]&=y_1(1-y_2)-\Pr\left(\ c_1{}'\boldsymbol{X}\le\Phi^{-1}(y_1)\ \text{and}\ \ c_2{}'\boldsymbol{X}\le\Phi^{-1}(y_2)\right)+y_1y_2\\&=LU(y_1,y_2;\ c_1,\ c_2)\end{aligned} \tag{3.8}$$

이므로

$$E[(B_{11}-B_{12})(B_{21}-B_{22})]=2LU(y_1,y_2;\ c_1,\ c_2) \tag{3.9}$$

가 성립한다. 또한 (Y_1,Y_2)가

$$N_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right)$$

를 따를 때

$$E(Y_1^2Y_2^2)=\sigma_1^2\sigma_2^2+2(\rho\sigma_1\sigma_2)^2 \tag{3.10}$$

임을 상기하자. 그러면 식(3.9)와 (3.10)에 의해서

$$\begin{aligned}&E(I_1^2)\\&=2\int_0^{\varepsilon}\int_{y_1}^{\varepsilon}\frac{E[(B_{12}-B_{11})^2(B_{22}-B_{21})^2]-4LU(y_1,y_1;\ c_1,\ c_2)LU(y_2,y_2;\ c_1,\ c_2)}{\phi^2(y_1)\phi^2(y_2)}dy_2dy_1\\&=16\int_0^{\varepsilon}\int_{y_1}^{\varepsilon}\frac{\left(LU(y_1,y_2;\ c_1,\ c_2)\right)^2}{\phi^2(y_1)\phi^2(y_2)}dy_2dy_1\end{aligned} \tag{3.11}$$

을 얻는다. 그리고 (X_1,X_2,X_3,X_4)가 평균이 0인 다변량 정규분포를 따를 때

$$E(X_1X_2X_3X_4)=E(X_1X_2)E(X_3X_4)+E(X_1X_3)E(X_2X_4)+E(X_1X_4)E(X_2X_3)$$

이 성립한다는 사실과 식(3.7), (3.8), (3.9)에 의해서

$$\begin{aligned}&E(I_2^2)\\&=2\int_0^{\varepsilon}\int_{y_1}^{\varepsilon}\frac{E[B_{11}(B_{11}-B_{12})B_{21}(B_{21}-B_{22})]-E[B_{11}(B_{11}-B_{12})]E[B_{21}(B_{21}-B_{22})]}{\phi^2(y_1)\phi^2(y_2)}dy_2dy_1\\&=2\int_0^{\varepsilon}\int_{y_1}^{\varepsilon}\frac{E[B_{11}(B_{21}-B_{22})]E[B_{21}(B_{11}-B_{12})]+E[B_{11}B_{21}]E[(B_{11}-B_{12})(B_{21}-B_{22})]}{\phi^2(y_1)\phi^2(y_2)}dy_2dy_1\\&=2\int_0^{\varepsilon}\int_{y_1}^{\varepsilon}\frac{\left(LU(y_1,y_2;\ c_1,\ c_2)\right)^2+2y_1(1-y_2)LU(y_1,y_2;\ c_1,\ c_2)}{\phi^2(y_1)\phi^2(y_2)}dy_2dy_1\end{aligned} \tag{3.12}$$

이다. 식(3.11)과 식(3.12)에 의해서 식(3.6)을 얻기 위해서는

$$L_1 := \int_0^{\varepsilon}\int_{y_1}^{\varepsilon} \frac{(LU(y_1, y_2;\ c_1,\ c_2))^2}{\phi^2(y_1)\phi^2(y_2)}\, dy_2 dy_1 \le C\eta^2 \tag{3.13}$$

$$L_2 := \int_0^{\varepsilon}\int_{y_1}^{\varepsilon} \frac{y_1(1-y_2)LU(y_1, y_2;\ c_1,\ c_2)}{\phi^2(y_1)\phi^2(y_2)}\, dy_2 dy_1 \le C\eta^2 |\log \eta| \tag{3.14}$$

를 보이면 충분하다.

$Cov(\ c_1'X,\ c_2'X) = \ c_1'\ c_2$ 에서 c_1, c_2의 사이각을 γ라고 하면 $c_1'\ c_2 = \cos\gamma$이다. 그리고 $\xi := \sin\gamma$일 때

$$\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} \le \frac{1}{\sin\gamma} - \frac{\sin\gamma}{2} = \frac{1}{\xi} - \frac{\xi}{2}$$

를 이용하면, $\Phi^{-1}(\varepsilon) = -\delta$, $\overline{\Phi}(x) = 1 - \Phi(x)$ 일 때

$$L_2 \le \int_{-\infty}^{-\delta}\int_{x_1}^{-\delta} \frac{\Phi(x_1)}{\phi(x_1)\phi(x_2)} \int_{-\infty}^{x_1} \phi(x_1)\overline{\Phi}\left(\frac{x_2 - z}{\xi} + \frac{\xi z}{2}\right) dz dx_2 dx_1 := f(\xi)$$

이고 이변량에서와 정확히 같은 방법으로

$$f'(\xi) \le C\xi |\log \xi|$$

가 성립함을 보일 수 있다. 또한 $\|\ c_1 - \ c_2\| \le \eta$에서 $\cos\gamma \ge 1 - \eta^2/2$ 이고

$$\xi = \sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} \le \eta$$

이므로

$$f(\xi) \le C\xi^2 |\log \xi| \le C\eta^2 |\log \eta|$$

이 성립한다. 따라서 식(3.14)가 성립하고 마찬가지 방법으로 식(3.13)도 증명할 수 있다. 이로써 식(3.6)은 성립하며 증명은 완성된다.

3.4 정리 2.2의 증명

식(1.1)의 P_n은 벡터합과 정칙행렬곱에 대해서 불변이므로 $\boldsymbol{X}$의 분포를 $N_p(\ \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{I})$라고 가정해도 무방하다. $Q_n(y,\ c)$를 식(2.12)와 같이 정의된 $c'\boldsymbol{X}$의 분위수 함수라고 하고

$$\widehat{\sigma}_n(\ c) = (\ c'\ S\ c)^{1/2}$$

이라고 하자. 또한

$$\widetilde{Q}_n(\ y,\ c) := (Q_n(y,\ c) - \ c'\boldsymbol{X}) / \widehat{\sigma}_n(\ c),$$

$$\widetilde{P}_n^T = \sup_{c,\|c\|=1} \int_{n^{-\delta}}^{1-n^{-\delta}} n(\ \widetilde{Q}_n(y,\ c) - \Phi^{-1}(y))^2 dy, \quad 0 < \delta < 1/4p$$

라고 하면 식(2.3)의 P_n^T와 $\widetilde{P}_n^T$는

$$|P_n^T - \widetilde{P}_n^T| = o_p(1) \tag{3.15}$$

이므로 $\widetilde{P}_n^T$에 대해서 정리가 성립함을 증명하면 충분하다.

$$A_n(y,\ c) := Q_n(y,\ c) - \Phi^{-1}(y) + \Phi^{-1}(y)(1 - \widehat{\sigma}_n(\ c)) - \ c'\boldsymbol{X}$$

라고 하면 간단한 계산을 통하여

$$\widetilde{Q}_n(y,\ c)-\Phi^{-1}(y)=A_n(y,\ c)+A_n(y,\ c)\frac{1-\widehat{\sigma}_n(\ c)}{\widehat{\sigma}_n(\ c)}$$

임을 보일 수 있고 따라서 $\widetilde{P}_n^T$의 피적분함수는

$$n(\widetilde{Q}_n(y,\ c)-\Phi^{-1}(y))^2\le nA_n^2(y,\ c)+nA_n^2(y,\ c)\left(\frac{1-\widehat{\sigma}_n(\ c)}{\widehat{\sigma}_n(\ c)}\right)^2+2nA_n^2(y,\ c)\left|\frac{1-\widehat{\sigma}_n(\ c)}{\widehat{\sigma}_n(\ c)}\right|$$

이다.

$$M_n^T:=\sup_{c,\|c\|=1}\int_{n^{-\delta}}^{1-n^{-\delta}}nA_n^2(y,\ c)dy \tag{3.16}$$

라고 하면

$$\begin{aligned}&|\widetilde{P}_n^T-M_n^T|\\ \le&\sup_{c,\|c\|=1}\int_{n^{-\delta}}^{1-n^{-\delta}}nA_n^2(y,\ c)dy\left[\left(\frac{1-\widehat{\sigma}_n(\ c)}{\widehat{\sigma}_n(\ c)}\right)^2+2\left|\frac{1-\widehat{\sigma}_n(\ c)}{\widehat{\sigma}_n(\ c)}\right|\right]=o_p(1)\end{aligned} \tag{3.17}$$

이 성립한다. 식(3.17)는 이변량에서와 같은 방법(Kim & Bickel(2003) 식(48))으로 증명된다. 그 이후의 증명도 이변량에서의 모수 θ를 벡터 c로 교환하여 표현하는 것을 제외하고는 이변량의 경우와 일치하므로 생략한다. 즉, 식(3.16)의 M_n^T가 정리 2.2의 우변의 분포로 수렴함을 보이고 식 (3.15), (3.17)과 우변의 분포의 존재성으로부터 결과가 성립한다.

4. 결론 및 토의

본 논문에서는 Kim & Bickel(2003)에서 제안한 이변량 정규분포의 검정을 위한 통계량을 다변량으로 확장하고 이의 귀무가설에서의 극한분포를 이변량에서와 유사한 방법으로 구하였다.

제안된 통계량은 de Wet & Venter(1972)의 일변량 정규분포의 통계량을 Roy의 합교원리를 이용하여 다변량으로 확장한 것이다. de Wet & Venter(1972)의 통계량은 대부분의 대립가설에서 좋은 검정력을 보여주는 Shapiro & Wilk(1965)의 통계량과 밀접한 관련이 있고, 이들은 같은 극한분포를 갖는다는 것이 알려져 있다(Leslie, Stephens & Fotopolos(1986)). 이들 통계량의 극한분포에 대해서는 de Wet & Venter(1972), Csörgő(1983, 7장), del Barrio, Cuesta, Matrán & Rodríguez(1999) 등을 참고로 한다. 따라서 본 논문에서 제안한 P_n-통계량의 극한분포는 Shapiro & Wilk의 통계량을 같은 방법으로 다변량으로 확장한 Fattorini(1986)나 Malkovich & Afifi(1973)의 통계량의 분포에 대한 정보를 제공할 수 있을 것이다. 이러한 통계량에 대한 극한분포는 아직까지 해결되지 못한 문제이다.

실제로 P_n과 같은 형태의 통계량은 de Wet, Venter & van Wyk(1979)에서도 다루었다. 그들은 통계량의 귀무가설에서의 극한분포를 i.i.d. 정규확률변수의 무한급수의 최대로 표현하였으나 유한개의 선형결합에 대해서만 유효한 증명을 제시하였다. 본 논문에서의 결과는 이들이 구한 분포를 브라운 다리로 표현한 것이며 좀 더 일반적인 증명이라고 할 수 있다. 그러나 본 논문에서 제시된 브라운 다리로 표현된 극한분포를 이용하여 기각값등에 관한 수치적인 결과를 얻는 것은 그리 용이해 보이지 않으며 이에 대한 연구는 앞으로 행해져야 할 것으로 생각된다.

참고문헌

[1] Adler, R. J. (1990). *An introduction to continuity, extrema, and related topics for general Gaussian processes,* Lecture notes 12, Institute of Mathematical Statistics.

[2] Baringhaus, L., and Henze, N. (1988). A consistent test for multivariate normality based on the empirical characteristic function, *Metrika,* Vol. 35, 339-348.

[3] Baringhaus, L., and Henze, N. (1992). Limit distribution for Mardia's measure of multivariate skewness, *The Annals of Statistics,* Vol. 20, 1889-1902.

[4] Billingsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measures,* John Wiley, New York.

[5] Csörgő, M. (1983). *Quantile processes with statistical applications,* CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics.

[6] Csörgő, S. (1989). Consistency of some tests for multivariate normality, *Metrika,* Vol. 36, 107-116.

[7] Csörgő, M., and Révész, P. (1981). *Strong approximations in probability and statistics,* Academic Press, New York.

[8] D'Agositno, R. B., and Stephens, M. A. (1986). *Goodness-of-fit Techniques,* Marcel Dekker, New York.

[9] del Barrio, E., Cuesta, J. A., Matrán, C., and Rodríguez, J. M. (1999). Tests of goodness of fit based on the L_2-Wasserstein distance, *The Annals of Statistics,* Vol. 27, 1230-1239.

[10] de Wet, T., and Venter, J. H. (1972). Asymptotic distributions of certain test criteria of normality, *South African Statistical Journal,* Vol. 6, 135-149.

[11] de Wet, T., Venter, J. H., and van Wyk, J. W. J. (1979). The null distributions of some test criteria of multivariate normality, *South African Statistical Journal,* Vol. 13, 153-176.

[12] Epps, T. W., and Pulley, I. B. (1983). A test for normality based on the empirical characteristic function, *Biometrika,* Vol. 70, 723-726.

[13] Fattorini, L. (1986). Remarks on the use of the Shapiro-Wilk statistic for testing multivariate normality, Statistica, Vol. 46, 209-217.

[14] Finney, R. L., and Thomas, G. B, Jr. (1994). *Calculus,* Addison-Wesley.

[15] Henze, N. (2002). Invariant tests for multivariate normality : A critical review, *Statistical Papers,* Vol. 43, 467-506.

[16] Henze, N., and Wagner, T. (1997). A new approach to the BHEP tests for multivariate normality, *Journal of Multivariate Analysis,* Vol. 62, 1-23.

[17] Henze, N., and Zirkler, H. (1990). A class of invariant and consistent tests for multivariate normality, *Communications in Statistics -Theory and Methods,* Vol. 19, 3539-3617.

[18] Horswell, R. L., and Looney, S. W. (1992). A comparison of tests for multivariate normality that are based on measures of multivariate skewness and kurtosis,

Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol. 42, 21-38.

[19] Kim, N. (1994). Goodness of fit tests for bivariate distributions, Ph. D. dissertation, University of California, Berkeley.

[20] Kim, N. (2004). An approximate Shapiro-Wilk statistic for testing multivariate normality, *The Korean Journal of Applied statistics*, Vol. 17, 35-37.

[21] Kim, N., and Bickel, P. J. (2003). The limit distribution of a test statistic for bivariate normality, *Statistica Sinica*, Vol. 13, 327-349.

[22] Leslie, J. R., Stephens, M. A., and Fotopolous, S. (1986). Asymptotic distribution of the Shapiro-Wilk W for testing for normality, *The Annals of Statistics*, Vol. 14, 1497-1506.

[23] Liang, J., Li, R., Fang, H., and Fang, K.-T. (2000). Testing multinormality based on low-dimensional projection, *Journal Statistical planning and Inference*, Vol. 86, 129-141.

[24] Machado, S. G. (1983). Two statistics for testing for multivariate normality, *Biometrika*, Vol. 70, 713-718.

[25] Malkovich, J. F., and Afifi, A. A. (1973). On tests for multivariate normality, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 68, 176-179.

[26] Mardia, K. V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications, *Biometrika*, Vol. 57, 519-530.

[27] Mardia, K. V. (1974). Applications of some measures of multivariate skewness and kurtosis for testing normality and robustness studies, *Sankhya A*, Vol. 36, 115-128.

[28] Mardia, K. V. (1975). Assessment of multinormality and the robustness of Hotelling's T^2 test, *Applied Statistics*, Vol. 24, 163-171.

[29] Massart, P. (1989). Strong approximation for multivarite empirical and related processes, via KMT constructions, *The Annals of probability*, Vol. 17, 266-291.

[30] Romeu, J. L., and Ozturk, A. (1993). A comparative study of goodness-of-fit tests for multivariate normality, *Journal of Multivariate analysis*, Vol. 46, 309-334.

[31] Roy, S. N. (1953). On a heuristic method of test construction and its use in multivariate analysis, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 24, 220-238.

[32] Shapiro, S. S., and Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples), *Biometrika*, Vol. 52, 591-611.

[33] Thode, Jr. H. C. (2002). *Testing for Normality*. Marcel Dekker, New York.

[34] Zhu, L., Fang, K. T., and Bhatti, M. I. (1997). On estimated projection pursuit Cramé r-von Mises statistics, *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 63, 1-14.

[35] Zhu, L., Wong, H. L., and Fang, K. (1995). A test for multivariate normality based on sample entropy and projection pursuit, *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 45, 373-385.

[2004년 8월 접수, 2004년 12월 채택]