

전달강성계수법을 이용한 보강재를 갖는 사각평판의 진동해석

Vibration Analysis of a Rectangular Plate with Stiffeners

Using the Transfer Stiffness Coefficient Method

문 덕 흥
D. H. Moon

Key Words : Vibration Analysis(진동해석), Rectangular Plate(사각평판), Stiffener(보강재), Transfer Stiffness Coefficient Method(전달강성계수법), Finite Element Method(유한요소법)

Abstract : The vibration analysis of a rectangular plate with stiffeners is formulated by using the transfer stiffness coefficient method (TSCM). This method is based on the concept of the successive transmission of stiffness coefficients which are defined as the relationship between the force vector and the displacement vector at an arbitrary nodal line.

In order to confirm the validity of the present method, bending vibration analysis for a rectangular plate with stiffener is carried out on a personal computer by using the present method and the finite element method (FEM). Through comparing computational results of the TSCM and the FEM, the effectiveness of the TSCM from the viewpoint of computational cost, that is, computational time and storage is demonstrated.

1. 서 론

기계·조선·항공·토목 등 분야를 막론하고, 기계나 구조물의 설계 시에 가장 기본적으로 핵심적인 기술은 기계나 구조물의 정적·동적 거동을 정확히 파악하는 것이다. 이러한 핵심 설계기술에는 신뢰성 있고 간편한 구조해석 기법이 요구되며, 따라서 해석기법에 대한 연구 개발과 이를 이용한 전산프로그램의 개발은 매우 중요한 의미를 갖는다. 그래서 이 분야의 기술 선진국들은 이미 오래전부터 다양한 구조해석 기법에 대한 연구 개발에 많은 노력을 기울여 왔고, 그 결과 많은 구조해석 소프트웨어들을 개발해서 사용하고 있다.

현재 기존의 범용 구조해석 소프트웨어는 대부분 유한요소법(finite element method)¹⁾을 해석기법으로 채택하고 있다. 유한요소법은 범용구조해석 프로그램의 개발에 적합하나, 복잡한 구조물의 구조해석을 정확히 수행하기 위해서는 기억용량이 큰 고속의 컴퓨터를 필요로 한다^{2)~5)}. 따라서 회전체와 같은 특정 구조물에 한해서는 전달행렬법(transfer

matrix method)⁶⁾을 이용하는 경우도 많다. 전달행렬법은 유한요소법과 달리 기억용량이 적은 퍼스널 컴퓨터로도 계산 수행이 가능하고, 해석 알고리즘의 이해 및 해석 프로그램의 운용이 매우 간편한 장점이 있다. 그러나 이 기법은 고차의 고유진동수를 구할 경우, 직선형 구조물의 중간 및 층상 구조물의 중간에 단단한 지지점이 존재할 경우, 수치계산 시 문제가 발생할 우려가 크다⁷⁾.

저자는 상기 문제점들을 해결하기 위하여 오랫동안 고속·고정도의 구조해석 기법의 개발에 관한 노력을 기울여 왔고, 그 결과로서 전달강성계수법(transfer stiffness coefficient method)을 개발하여, 격자형 구조물, 골조형 구조물, 평판형 구조물 등 다양한 구조물에 적용하여 그 유효성을 확인한 바 있다^{8)~13)}.

그러나 전달강성계수법을 이용한 지금까지의 해석 대상 구조물은 보(beam)나 평판과 같이 동일 요소만을 갖는 구조물에 국한하였으므로, 선박의 갑판이나 상부구조물, 항공기의 동체구조물, 엔진, 펌프의 기초 지지구조물 등에서 쉽게 볼 수 있는 보강재가 부착된 사각 판 구조물의 해석에 적용할 수 없었다.

따라서 이 논문에서는 강성계수의 축차 전달에 기본 개념을 두고 있는 기존의 전달강성계수법을 확장하여, 보강재가 부착된 사각평판 구조물의 자유

접수일 : 2004년 9월 10일
문덕흥(책임저자) : 부경대학교 공과대학 기계공학부
E-mail : dhmoon@pknu.ac.kr, Tel : 051-620-1577

진동 및 강제진동 해석 알고리즘을 정식화한다. 그리고 수치계산 과정을 통하여 제안된 방법의 우수성을 확인한다.

2. 진동해석 알고리즘의 정식화

2.1 해석모델

사각평판과 보강재 그리고 기초지지 스프링으로 구성되는 평판형 구조물의 진동해석을 수행하기 위하여, Fig. 1과 같은 평판형 구조물을 해석 모델로 설정한다. Fig. 1의 X, Y, Z축은 전체좌표계를 나타내고, 여기서 Z축은 평판의 표면에 수직인 방향이다.

Fig. 1의 평판형 구조물은 m개의 스트립(strip)으로 구성된다. 스트립과 스트립 사이의 경계선을 절선(nodal line)이라 부르고, 구조물 중 좌단으로부터 우단까지 각 절선을 순차적으로 절선 0, 절선 1, ..., 절선 m이라 한다. 그리고 평판과 보강재 및 기초지지 스프링의 결합점은 모두 절선상에 오도록 모델링한다.

구조물 중 좌단과 우단의 경계조건은 절선 0와 절선 m의 기초지지스프링으로 모델링한다. 예를 들어, 경계조건이 자유인 경우에는 해당 스프링상수의 값이 0, 고정인 경우에는 ∞ 가 된다.

스트립은 Fig. 2와 같이 Y축 방향에 n-1개의 사각평판요소로 구성되고, 각 요소는 모서리에 4개의 절점(node)을 가진다. 따라서 스트립 i는 좌측 절선(절선 i-1)과 우측 절선(절선 i)에 각각 n개의 절점을 가지므로, 총 2n개의 절점으로 구성된다.

평판의 굽힘진동을 해석할 경우, 평판요소 각 절점의 변위벡터 \bar{u} 는 처짐 w와 두 개의 각변위 $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$, $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$ 로 구성되고, 힘벡터 \bar{f} 는 전단력 F_z 와 모멘트 M_x , M_y 로 구성된다.

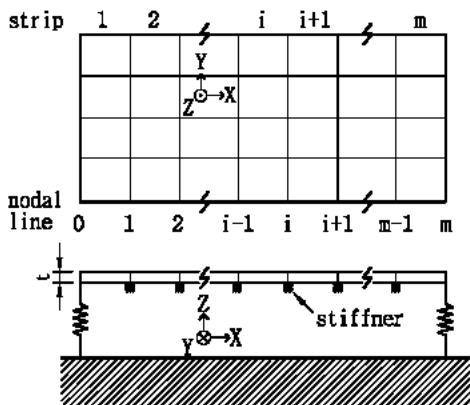


Fig. 1 Analytical model

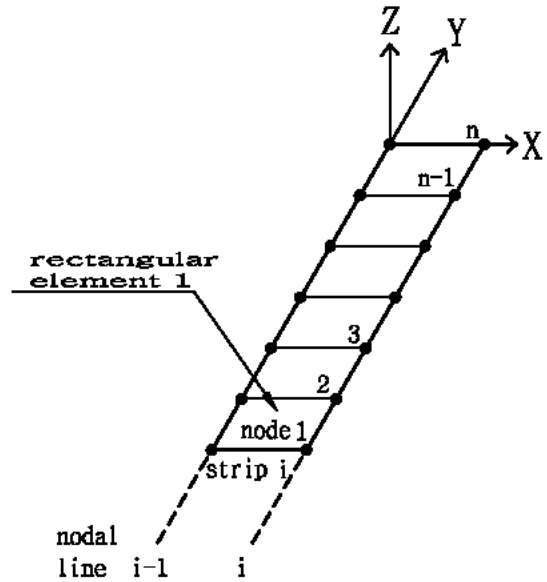


Fig. 2 Strip i subdivided rectangular elements

2.2 스트립의 강성행렬

유한요소법에서 많이 사용되는 4절점 사각평판요소¹⁴⁾의 질량행렬 \bar{m} 과 강성행렬 \bar{k} 를 가지고, 유한요소해석의 조립과정을 통하여 스트립 i의 전체 질량행렬 \bar{M}_i 와 전체 강성행렬 \bar{K}_i 를 구할 수 있다. 따라서 스트립 i 좌우측의 모든 변위벡터 \bar{U}_i 와 힘벡터 \bar{F}_i 사이의 관계를 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{K}_i \bar{U}_i - \omega^2 \bar{M}_i \bar{U}_i = \bar{F}_i \quad (1)$$

여기서

$$\begin{aligned} \bar{U}_i &= {}^T \{ \bar{U}_i^R, \bar{U}_i^L \}, & \bar{F}_i &= {}^T \{ \bar{F}_i^R, \bar{F}_i^L \}, \\ \bar{U}_i^R &= {}^T \{ \bar{u}_{n+1}, \bar{u}_{n+2}, \dots, \bar{u}_{2n} \}_i^R, \\ \bar{U}_i^L &= {}^T \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n \}_i^L, \\ \bar{F}_i^R &= {}^T \{ \bar{f}_{n+1}, \bar{f}_{n+2}, \dots, \bar{f}_{2n} \}_i^R, \\ \bar{F}_i^L &= {}^T \{ \bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n \}_i^L \end{aligned} \quad (2)$$

이고, ω 는 고유 각진동수, 열벡터 \bar{u} 와 \bar{f} 는 각 절점의 변위벡터와 힘벡터이다. 그리고 상첨자 "R"은 스트립의 우측, "L"은 스트립의 좌측을 뜻하고, "T"는 행렬의 전치(transpose)를 뜻한다. 하첨자 "i"는 i번째 스트립을 뜻한다.

식 (1)을 행렬의 크기가 $6n \times 6n$ 인 스트립의 동강성행렬(dynamic stiffness matrix) \bar{S}_i 로 나타내면

다음식과 같다.

$$\bar{\mathbf{S}}_i \bar{\mathbf{U}}_i = \bar{\mathbf{F}}_i \quad (3)$$

여기서

$$\bar{\mathbf{S}}_i = \bar{\mathbf{K}}_i - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_i \quad (4)$$

이다.

스트립 i 의 동강성행렬 $\bar{\mathbf{S}}_i$ 를 4개의 부분행렬 (sub-matrix) $\bar{\mathbf{A}}_i, \bar{\mathbf{B}}_i, \bar{\mathbf{C}}_i, \bar{\mathbf{D}}_i$ 로 분할하면, 식 (3)은 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_i^R \\ \bar{\mathbf{F}}_i^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i & \bar{\mathbf{B}}_i \\ \bar{\mathbf{C}}_i & \bar{\mathbf{D}}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_i^R \\ \bar{\mathbf{U}}_i^L \end{bmatrix} \quad (5)$$

지금부터는 강성계수의 전달과정을 쉽게 설명하기 위하여, 스트립의 관점에서 절선의 관점으로 바꾸어 설명한다. 즉, Fig. 1의 스트립 i 의 좌측 절선은 절선 $i-1$ 의 우측에, 그리고 스트립 i 의 우측 절선은 절선 i 의 좌측에 해당된다.

절선 $i-1$ 의 우측(i 번째 스트립의 좌측)과 절선 i 의 좌측(i 번째 스트립의 우측)사이의 상태량 벡터 사이의 관계는 스트립의 관점에서 나타낸 식(5)로부터 절선의 관점으로 나타낸 다음 식으로 수정한다.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_i \\ \bar{\mathbf{F}}_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_i \\ \bar{\mathbf{U}}_{i-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_i &= \bar{\mathbf{F}}_i^R, & \bar{\mathbf{F}}_{i-1} &= -\bar{\mathbf{F}}_i^L, \\ \bar{\mathbf{U}}_i &= \bar{\mathbf{U}}_i^R, & \bar{\mathbf{U}}_{i-1} &= \bar{\mathbf{U}}_i^L, \\ \mathbf{A}_i &= \bar{\mathbf{A}}_i, & \mathbf{B}_i &= \bar{\mathbf{B}}_i, \\ \mathbf{C}_i &= -\bar{\mathbf{C}}_i, & \mathbf{D}_i &= \bar{\mathbf{D}}_i \end{aligned} \quad (7)$$

이고, 하첨자 “ i ”는 절선 i 또는 i 번째 스트립에 관한 물리량을 나타내고, 동일 기호 위에 “-”를 붙인 것은 절선 좌측의 상태량, 붙이지 않은 것은 절선 우측의 상태량을 나타낸다.

2.3 자유진동해석 알고리즘

절선 i 의 좌측에서 힘벡터 $\bar{\mathbf{F}}_i$ 와 변위벡터 $\bar{\mathbf{U}}_i$ 사이의 관계를 다음식과 같이 정의한다.

$$\bar{\mathbf{F}}_i = \bar{\mathbf{S}}_i \bar{\mathbf{U}}_i \quad (8)$$

여기서 행렬의 크기가 $3n \times 3n$ 인 $\bar{\mathbf{S}}_i$ 를 절선 i 의 좌측에서의 절선강성계수행렬(nodal line stiffness coefficient matrix)이라 부른다.

절선 i 의 우측에서도 힘벡터와 변위벡터 사이의 관계를 절선 i 우측에서의 절선강성계수행렬 \mathbf{S}_i 로 정의한다.

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{U}_i \quad (9)$$

절선 $i-1$ 우측의 절선강성계수행렬 \mathbf{S}_{i-1} 을 이미 알고 있다면, 절선 i 좌측의 절선강성계수행렬 $\bar{\mathbf{S}}_i$ 를 식(6), (8) 그리고 식 (9)의 i 에 $i-1$ 을 대입한 식으로부터 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{S}}_i = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{V}_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (10)$$

여기서

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{C}_i, \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{S}_{i-1} - \mathbf{D}_i \quad (11)$$

이고, 식 (10)을 절선강성계수의 필드전달식(field transfer equation)이라 부른다.

절선 i 에 보강재가 부착되고, 또한 임의의 절점에 기초지지 병진스프링 (k_x) 또는 회전스프링 (K_x, K_y)으로 평판 구조물을 지지한다면, 절선 i 에서 힘의 평형식은 다음식과 같다.

$$\mathbf{F}_i = \bar{\mathbf{F}}_i + (\mathbf{P}_i + \hat{\mathbf{P}}_i) \mathbf{U}_i \quad (12)$$

여기서 대각행렬인 기초지지 강성행렬 \mathbf{P}_i 와 보강재의 동강성행렬 $\hat{\mathbf{P}}_i$ 는

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \text{diag}(k_{x1}, K_{x1}, K_{y1}, \dots, k_{xn}, K_{xn}, K_{yn}) \\ \hat{\mathbf{P}}_i &= \hat{\mathbf{K}}_i - \omega^2 \hat{\mathbf{M}}_i \end{aligned} \quad (13)$$

이고, $\hat{\mathbf{K}}_i$ 와 $\hat{\mathbf{M}}_i$ 는 각각 보강재의 강성행렬과 질량행렬이다.

절선 i 좌측(스트립 i 의 우측)의 절선강성계수행렬 $\bar{\mathbf{S}}_i$ 를 이미 알고 있다면, 절선 i 우측(스트립 $i+1$ 의 좌측)의 절선강성계수행렬 \mathbf{S}_i 를 식(8), (9), (12) 그리고 절선에서 변위벡터의 연속조건($\mathbf{U}_i = \bar{\mathbf{U}}_i$)

으로부터 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_i = \bar{\mathbf{S}}_i + \mathbf{P}_i + \hat{\mathbf{P}}_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (14)$$

식 (14)를 절선강성계수의 포인트 전달식(point transfer equation)이라 부른다.

필드전달식인 식 (10)을 포인트 전달식인 식 (14)에 대입하면 다음과 같은 필드-포인트 전달식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{V}_i + \mathbf{P}_i + \hat{\mathbf{P}}_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (15)$$

따라서 절선 $i-1$ 우측의 강성계수행렬 \mathbf{S}_{i-1} 을 알고 있다면, 필드-포인트 전달식인 식 (15)로부터 절선 i 우측의 강성계수행렬 \mathbf{S}_i 를 구할 수 있다.

좌단의 경계조건을 절선 0의 기초지지 스프링으로 모델링하였으므로, 절선 0 좌측의 힘벡터 $\bar{\mathbf{F}}_0$ 는 해석적으로 영벡터(null vector)가 된다. 따라서 식 (9)와 (12)의 i 에 0을 대입한 식으로부터 절선 0 우측의 강성계수행렬 \mathbf{S}_0 를 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{P}_0 \quad (16)$$

따라서 식 (16)을 시작으로, 식 (15)의 i 에 1, 2, ..., m 을 순차적으로 대입하면, 최종적으로 우단(끝단)인 절선 m 우측의 강성계수행렬 \mathbf{S}_m 을 계산할 수 있다.

우단에서도 경계조건을 절선 m 의 스프링상수로 모델링하였으므로, 절선 m 의 우측은 해석적으로 자유($\mathbf{F}_m = \mathbf{0}$, $\mathbf{U}_m \neq \mathbf{0}$)가 된다. 따라서 식 (9)에서

$$\mathbf{S}_m \mathbf{U}_m = \mathbf{0} \quad (17)$$

이므로, 진동수 방정식은

$$\det \mathbf{S}_m(\omega) = 0 \quad (18)$$

이 된다.

식 (18)은 고유진동수 ω 의 함수이므로, 이분법을 이용하여 근(고유진동수)을 구할 수 있다. 그러나 실제 수치계산 시에 식 (18)로 고유진동수를 구할 경우, 가끔 반 대칭 극(asymmetric poles)이 발생하

는데, 이분법에 의하면 이러한 반 대칭 극도 부호가 변화하므로, 근으로 오인해버린다. 이러한 거짓근(false roots)은 절선강성계수를 전달하는 과정에서 식 (11)의 행렬 \mathbf{G}_i 의 행렬식이 0이 되는 경우에 발생하므로, 거짓 근을 해소하기 위해서는 절선강성계수를 전달하는 도중에 행렬 \mathbf{G}_i 의 행렬식의 부호 함수를 식 (18)에 곱해주면 된다. 즉, 거짓근의 해소가 가능한 다음식에 이분법을 적용하면, 참근(고유진동수)만을 구할 수 있다.

$$\mathbf{Z} = \text{sign} \left\{ \left(\prod_{i=1}^m \det \mathbf{G}_i \right) \cdot \det \mathbf{S}_m \right\} \quad (19)$$

절선에서 변위벡터의 연속조건과 식 (6) 그리고 식 (9)의 i 대신에 $i-1$ 을 대입한 식으로부터 다음 식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{U}_{i-1} = \mathbf{V}_i \mathbf{U}_i \quad (i=m, m-1, \dots, 1) \quad (20)$$

고유모드는 고유진동수를 먼저 구한 후, 절선 m 의 우측에서 $\mathbf{F}_m = \mathbf{0}$ 이므로 절선 m 의 변위벡터 \mathbf{U}_m 중에서 한 요소를 기준으로 나머지 절선 m 의 변위벡터를 구한다. 그리고 식 (20)을 이용하여 좌단까지 모든 절선의 변위벡터를 순차적으로 구할 수 있다. 각 절선의 힘벡터는 변위벡터를 계산한 후, 식 (8), (9)로부터 구한다.

2.4 강제진동해석 알고리즘

강제진동해석에서는 절선 i 의 좌측에서 힘벡터 $\bar{\mathbf{F}}_i$ 와 변위벡터 $\bar{\mathbf{U}}_i$ 사이의 관계를 다음식과 같이 정의한다.

$$\bar{\mathbf{F}}_i = \bar{\mathbf{S}}_i \bar{\mathbf{U}}_i + \bar{\mathbf{E}}_i \quad (21)$$

강제진동해석에서 새롭게 도입된 $\bar{\mathbf{E}}_i$ 를 절선 i 의 좌측에서의 힘보정벡터(force corrective vector)라 부른다.

절선 i 의 우측에서도 힘벡터와 변위벡터 사이의 관계를 절선 i 우측에서의 절선강성계수행렬 \mathbf{S}_i 와 힘보정벡터 \mathbf{E}_i 를 이용하여 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{U}_i + \mathbf{E}_i \quad (22)$$

식(6), (21) 그리고 식 (22)의 i 에 $i-1$ 을 대입한 식으로부터 다음과 같이 필드전달식을 구할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{S}}_i = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{V}_i, \quad \bar{\mathbf{E}}_i = -\mathbf{B}_i \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{E}_{i-1} \quad (23)$$

절선 i 에 외력(\mathbf{Q}_i)이 작용하면, 절선 i 에서 힘의 평형식은 다음식과 같다.

$$\mathbf{F}_i = \bar{\mathbf{F}}_i + (\mathbf{P}_i + \hat{\mathbf{P}}_i) \mathbf{U}_i - \mathbf{Q}_i \quad (24)$$

식(21), (22), (24) 그리고 절선에서 변위벡터의 연속조건($\mathbf{U}_i = \bar{\mathbf{U}}_i$)으로부터 포인트 전달식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_i = \bar{\mathbf{S}}_i + \mathbf{P}_i + \hat{\mathbf{P}}_i, \quad \mathbf{E}_i = \bar{\mathbf{E}}_i - \mathbf{Q}_i \quad (25)$$

따라서 강제진동해석에서의 필드-포인트 전달식은 식(23)과 (25)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i &= \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{V}_i + \mathbf{P}_i + \hat{\mathbf{P}}_i \\ \mathbf{E}_i &= -\mathbf{B}_i \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{E}_{i-1} - \mathbf{Q}_i \end{aligned} \quad (26)$$

좌단의 경계조건을 절선 0의 기초지지 스프링으로 모델링하였으므로, 절선 0 좌측의 힘벡터 $\bar{\mathbf{F}}_0$ 는 해석적으로 영벡터가 된다. 따라서 식 (22)와 (24)의 i 에 0을 대입한 식으로부터 절선 0 우측의 강성계수행렬 \mathbf{S}_0 와 힘보정벡터 \mathbf{E}_0 를 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{E}_0 = -\mathbf{Q}_0 \quad (27)$$

따라서 식 (27)을 시작으로, 식 (26)의 i 에 1, 2, ..., m 을 순차적으로 대입하면, 최종적으로 우단(끝단)인 절선 m 우측의 강성계수행렬 \mathbf{S}_m 과 힘보정벡터 \mathbf{E}_m 을 계산할 수 있다.

우단에서도 경계조건을 절선 m 의 스프링상수로 모델링하였으므로, 절선 m 에서 $\mathbf{F}_m = \mathbf{0}$ 가 된다. 따라서 식 (22)에서

$$\mathbf{U}_m = -\mathbf{S}_m^{-1} \mathbf{E}_m \quad (28)$$

이 된다.

절선 좌우측의 변위벡터의 연속조건($\mathbf{U}_i = \bar{\mathbf{U}}_i$)과 식 (6) 그리고 식 (22)의 i 대신에 $i-1$ 을 대입한 식으로부터, 다음식을 유도할 수 있고,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i-1} &= \mathbf{V}_i \mathbf{U}_i - \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{E}_{i-1} \\ (i=m, m-1, \dots, 1) \end{aligned} \quad (29)$$

이 식으로 절선 i 의 변위벡터를 이용하여 절선 $i-1$ 의 변위벡터를 구할 수 있다.

따라서 강제진동시의 응답은 식(28)로부터 평판 우단의 변위벡터를 계산한 후, 식(29)로부터 절선 $m-1$ 에서부터 절선 0까지 모든 절선의 변위벡터를 순차적으로 계산할 수 있다. 힘벡터는 절선의 변위벡터를 먼저 계산한 후, 식(21)과 식(22)로부터 구할 수 있다.

3. 수치계산 결과

3.1 수치계산 모델

퍼스널 컴퓨터(CPU : Pentium IV 2.0GHz, Memory : 512M Byte)상에서 매트랩(MATLAB)언어를 이용하여 유한요소법⁽¹⁴⁾과 전달강성계수법으로 보강재를 갖는 평판구조물에 대해서 굽힘 자유진동을 해석할 수 있는 전산 프로그램을 만든 후, Fig. 3에 나타낸 보강재를 갖는 단순 지지된 사각평판 구조물을 수치계산 모델로 채택하여 양 방법의 계산 결과를 비교하였다. 그리고 동일 수치계산 모델에 대하여 전달강성계수법으로 강제진동해석 프로그램을 만들고, 그 결과를 자유진동해석 결과와 비교하였다.

수치계산 모델의 물성치 및 치수는 다음과 같다. 평판의 길이는 800mm, 폭은 400mm, 두께는 5mm, 종탄성계수는 206GPa, 포와송 비가 0.3, 밀도는 7860kg/m³이다. 보강재는 직사각형 단면의 보로써 평판의 중간지점에 위치하고 있으며, 길이는 400mm, 단면의 폭과 높이는 각각 10mm, 20mm이고, 물성치는 평판과 동일하다. 경계조건은 사각평판의 경계가 모두 단순 지지되어 있는 것으로 고려하였다.

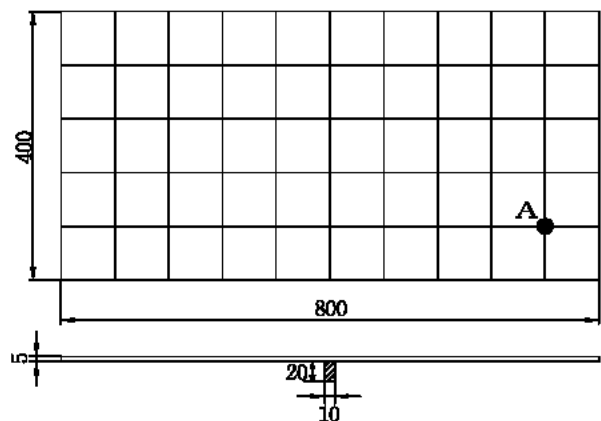


Fig. 3 A rectangular plate with 10×5 mesh pattern

3.2 자유진동해석 결과

수치계산 모델을 m 개의 스트립과 각 스트립당 n 개, 즉, $m \times n$ 개의 평판요소로 분할한 후, 전달강성계수법으로 1Hz에서 1000Hz 범위내의 고유진동수를 계산하였다. 유한요소법으로도 동일하게 분할한 후, 고유치해석을 수행하였다. 10×5, 20×10 그리고 30×15의 평판요소로 분할하여 모델링한 후, 고유진동수를 계산한 결과 양 방법에 의한 계산결과가 완전히 일치하였다(Table 1 참조). 그러나 40×20으로 분할하여 계산한 경우, 전달강성계수법에 의한 결과는 퍼스널 컴퓨터에서 무리없이 얻을 수 있었지만, 유한요소법으로는 자유도의 급격한 증가로 인해 퍼스널 컴퓨터에서의 계산 수행이 곤란하였다. Table 1에서 알수 있듯이 적정한 요소 분할수에서 전달강성계수법에 의한 계산 결과가 기존의 유한요소법에 의한 계산 결과와 완전히 일치하였으므로, 전달강성계수법에 의한 모델링과 정식화가 신뢰할 수 있음을 확인할 수 있다. 그리고 유한요소법과 전달강성계수법을 이용하여 구한 고유진동수는 요소 분할수를 증가하여 계산한 결과 각각 일정값에 수렴해 감을 알 수 있다.

Table 2는 전달강성계수법과 유한요소법으로 Table 1의 계산 수행을 구하는데 소요된 계산시간이다. 전달강성계수법과 유한요소법에서 해(고유진동수)를 구하는 방법이 다르므로, 단순히 두 해석기법의 계산시간을 비교하는 것은 곤란하다. 그러나 Table 2에서 유한요소법에서 소요된 계산시간의 추이를 관찰해보면, 분할수를 증가할수록, 계산시간이 크게 증가하고 있음을 알 수 있다. 반면에 전달강성계수법은 유한요소법에 비해 계산시간 면에서 상대적으로 증가율이 작음을 알 수 있다.

그러므로 Table 1과 Table 2를 총괄하여 고찰해보면, 정확한 계산결과를 얻기 위해서는, 구조물의 분할수를 증가시켜야 하고, 분할수를 증가시키면 계산시간면에서 전달강성계수법이 유한요소법 보다 훨씬 유리함을 알 수 있다. 그리고 계산에 사용되는 컴퓨터 메모리면에서도 유한요소법은 고유치해석에 사용되는 행렬의 크기가 전체 자유도의 제곱이 되므로, 자유도가 증가할 경우 고유치해석에 사용되는 행렬의 크기는 급증한다. 반면에 전달강성계수법은 식 (18)에서 알 수 있듯이 구조물의 전체 자유도가 전달과정을 통해, 끝단에 있는 절선 m 의 자유도로 축소되므로, 컴퓨터의 사용메모리면에서도 유한요소법에 비해 매우 우수하다. 따라서 전달강성계수법으

로 모델링할 경우, 상대적으로 대형컴퓨터 보다 메모리면에서 부족함이 많은 퍼스널 컴퓨터에서도 복잡한 평판구조물의 해석이 가능해진다.

Table 1 Natural frequencies (unit : Hz)

Order	TSCM & FEM			TSCM
	10×5	20×10	30×15	40×20
1	121.2	121.8	121.9	121.9
2	154.9	157.2	157.6	157.8
3	245.8	249.9	250.8	251.1
4	372.2	378.8	380.3	380.8
5	375.9	384.0	385.8	386.5
6	379.7	387.1	388.8	389.4
7	520.5	530.2	532.6	533.5
8	545.6	561.7	565.4	566.8
9	587.4	615.1	621.8	624.3
10	748.3	759.3	762.8	764.2
11	748.5	759.8	763.4	764.8
12	755.0	765.3	768.6	769.9
13	783.4	811.8	819.8	822.8
14	929.0	964.3	968.4	970.0
15	932.6	973.4	986.3	991.2
16	943.6	981.9	996.3	---
17	955.1	990.9	---	---

Table 2 Computation times (unit : sec)

Method	Mesh pattern			
	10×5	20×10	30×15	40×20
FEM	2.6	208.2	4131.8	---
TSCM	9.8	54.6	180.7	433.0

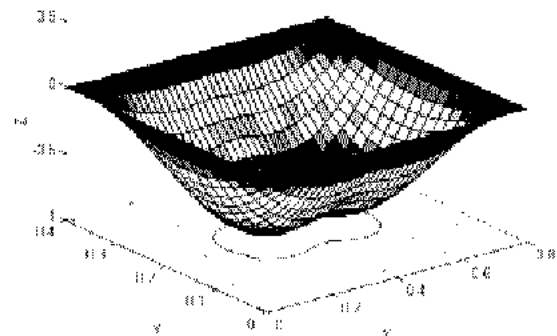


Fig. 4 First natural mode

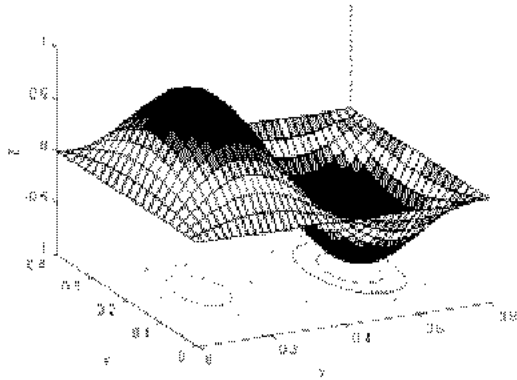


Fig. 5 Second natural mode

Fig. 4와 Fig. 5는 사각평판을 40×20개의 평판요소로 모델링하여 전달강성계수법으로 1차 및 2차 고유모드를 계산할 결과이다.

3.3 강제진동해석 결과

동일 수치계산 모델에 대한 강제진동해석을 전달강성계수법으로 수행하였다. Fig. 3의 A점에 조화외력이 주어질 때, A점의 주파수응답을 계산한 결과가 Fig. 6이다. 사각평판은 40×20개의 평판요소로 분할하였고, 조화외력의 진폭은 100N, 외력의 진동수를 1Hz에서 400Hz까지 1Hz 간격으로 계산하였다. Fig. 6에서 6개의 피크치는 Table 1의 1차부터 6차까지의 고유진동수와 잘 대응하고 있다.

Fig. 7은 수치계산 모델의 1차 고유진동수에 근접하는 122Hz의 진동수로 Fig. 3의 A점을 가진할 때, 평판의 진동응답을 계산한 결과이다. Fig. 7의 형상이 Fig. 4의 1차 고유모드 형상과 잘 대응되고 있음을 확인할 수 있었다.

Fig. 8은 수치계산 모델의 2차 고유진동수에 근접하는 158Hz의 진동수로 A점을 가진할 때, 평판의 진동응답을 계산한 결과이다. Fig. 8의 형상이 Fig. 5의 2차 고유모드 형상과 잘 대응되고 있음을 확인할 수 있었다.

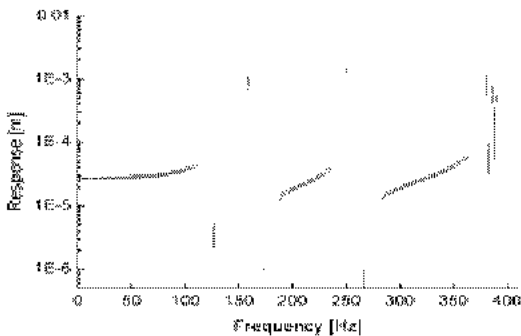


Fig. 6 Frequency response curve

따라서 자유진동해석 결과와의 비교를 통해 강제진동해석 프로그램 및 알고리즘의 신뢰성을 충분히 확인할 수 있었다.

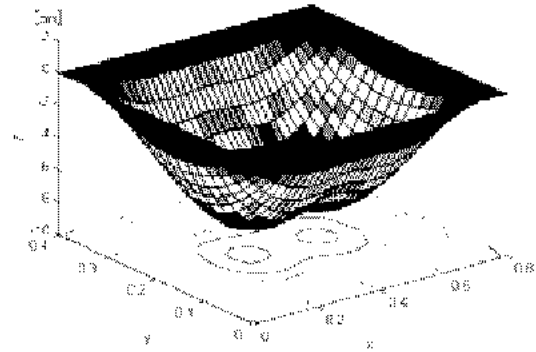


Fig. 7 Response by harmonic force excitation of A point (122Hz)

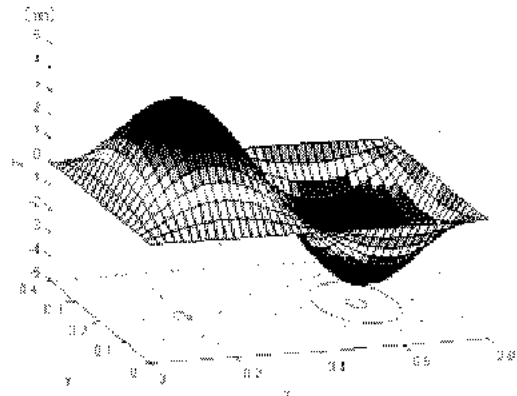


Fig. 8 Response by harmonic force excitation of A point (158Hz)

4. 결 론

강성계수의 축차 전달에 기본 개념을 두고 있는 전달강성계수법을 이용하여 보강재가 부착된 사각평판 구조물의 자유진동 및 강제진동 해석 알고리즘을 정식화하였다. 그리고 이 알고리즘을 바탕으로 전산 프로그램을 개발하였다. 보강재를 갖는 사각평판 구조물에 대해서 굽힘진동에 대한 수치계산을 수행하였다. 제안된 방법의 유효성을 확인하기 위하여 유한요소법으로 동일한 계산모델에 대한 수치계산을 수행하였다. 퍼스널 컴퓨터상에서 양 방법에 의한 수치계산 결과를 비교한 결과, 보강재를 갖는 평판구조물의 진동해석에서 전달강성계수법이 유한요소법에 비해 계산정도 면에서 우수하며, 계산시간이나 계산 메모리 면에서도 우수함을 알 수 있었다. 특히, 퍼스널 컴퓨터 상에서 유한요소법으로는 계산

이 곤란한 대규모 자유도를 갖는 평판 구조물의 진동해석이 가능함을 확인할 수 있었다.

후 기

이 논문은 2002년도 부경대학교 연구년 교수지원에 의하여 연구되었음.

참고문헌

1. K. J. Bathe, 1996, "Finite Element Procedures", Prentice-hall.
2. N. S. Sehmi, 1989, "Large Order Structural Eigenanalysis techniques Algorithm for Finite Element Systems", Ellis Horwood, chap. 1.
3. M. A. Dokainish, 1972, "A New Approach for Plate Vibration: Combination of Transfer Matrix and Finite-Element Technique", Trans. ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 94, No. 2, pp. 526~530.
4. J. F. Doyle, 1988, "A Spectrally Formulated Finite Element for Longitudinal Wave Propagation, International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis", Vol. 3, pp. 1~5.
5. M. Geradin and S. L. Chen, 1995, "An Exact Model Reduction Technique for Beam Structures: Combination of Transfer and Dynamic Stiffness Matrices", Journal of Sound and Vibration, Vol. 185, pp. 431~440.
6. E. C. Pestel and F. A. Leckie, 1963, "Matrix Methods in Elastomechanics", McGraw-hill.
7. 田中基八郎, 三枝省三, 1988, "振動モデルとシミュレーション", 應用技術出版, pp. 105~110.
8. 문덕홍, 최명수, 1998, "전달강성계수법과 유한요소법의 조합에 의한 사각평판의 자유진동해석", 한국소음진동공학회 춘계학술대회 논문집, pp. 353~358
9. 문덕홍, 최명수, 1998, "전달강성계수법에 의한 격자형 구조물의 강제진동해석", 한국소음진동공학회지, 제 8권, 제 5호, pp. 949~956.
10. 문덕홍, 최명수, 1999, "강성계수의 전달을 이용한 다양한 연결부를 갖는 구조물의 진동해석", 대한기계학회논문집 A권, 제 23권, 제 2호, pp. 344~356.
11. D. H. Moon and M. S. Choi, 2000, "Vibration Analysis for Frame Structures Using Transfer of Dynamic Stiffness Coefficient Method, Journal of Sound and Vibration", Vol. 234, no. 5, pp. 725~736.
12. 최명수, 문덕홍, 김성진, 2002, "유한요소-전달강성계수법을 이용한 골조 구조물의 과도응답해석", 한국소음진동공학회논문집, 제 12권, 제9호, pp. 674~684.
13. Deok-Hong Moon and Myung-Soo Choi, 2003, "Development of Sensitivity Analysis Algorithm for a Straight-Line Beam Structure by the Transfer Stiffness Coefficient Method", JSME International Journal Series C, Vol. 46, No. 1, pp. 138~144.
14. Maurice Petyt, 1990, "Introduction to Finite Element Vibration Analysis", Cambridge university Press, pp. 229~293.