

끝이 잘린 원추형 셸의 진동해석 알고리즘의 개발 Development of Vibrational Analysis Algorithm for Truncated Conical Shells

여 동 준
D. J. Yeo

Key Words : Vibration Analysis(진동해석), Conical Shell(원추형 셸), Natural Frequency(고유진동수), Mode Shape(모드형상), 전달영향계수법(Transfer Influence Coefficient Method)

Abstract : This paper deals with the free vibrations of truncated conical shell with uniform thickness by the transfer influence coefficient method. The classical thin shell theory based upon the Flügge theory is assumed and the governing equations of a conical shell are written as a coupled set of first order differential equations using the transfer matrix. The Runge-Kutta-Gill integration and bisection method are used to solve the governing differential equations and to compute the eigenvalues respectively. The natural frequencies and corresponding mode shapes are calculated numerically for the truncated conical shell with any combination of boundary conditions at the edges. And all boundary conditions and the intermediate supports between conical shell and foundation could be treated only by adequately varying the values of the spring constants. Numerical results are compared with existing exact and numerical solutions of other methods.

1. 서 론

셸구조물은 선박, 항공기, 우주선 등의 산업분야에 자주 사용되는 중요한 구조요소로서, 이러한 구조물의 진동해석에 대한 연구도 공학적 필요성에 의해 많은 연구가 진행되어 왔다. 끝이 잘린 원추형 셸은 그것의 기하학적인 형상에 기인하여 좌우양단의 반지름이 달라 운동방정식에 수학적 복잡함이 포함되므로 원통형 셸에 대한 연구보다는 훨씬 적은 편이다. Leissa¹⁾는 여러 가지 종류의 셸의 진동을 다룬 문헌들을 모으고 재정리하였다. Siu 와 Bert²⁾는 Rayleigh-Ritz법을 사용하여 균일두께의 원추형 셸의 자유진동을, Yang³⁾은 수치적 적분기법을 사용하여 이방성 원추형 셸의 고유진동수와 진동모드를 구하였다. Delpak와 Hague⁴⁾는 유한요소법을 사용하여 변두께를 갖는 축대칭 원추형 셸모델에 대해 이론해석을 함과 동시에 실험을 통해 조사하였다. Tong⁵⁾은 락스법을 이용하여 등방성 및 직방성 원추형 셸의 자유진동을 해석하였다. Irie 등^{6)~7)}은 전달행렬법을 이용하여 균일두께 및 변두께

의 원추형 셸에 대한 자유진동을 해석하였다. Lam과 Hua⁸⁾는 Galerkin법을 사용하여 회전하는 원추형 셸의 진동특성에 대한 경계조건의 영향을 조사하였다. 그 결과 다른 경계조건 하의 여러 가지 원추각에서 진동수 파라미터와 원주파의 수 및 진동수 파라미터와 회전속도 사이의 관계를 얻었다. 그 외 많은 연구자들에 의해 여러 가지 해석방법이 적용되어 진동해석이 행해져 왔다.

본 연구에서는 Runge-kutta-Gill 수치적분기법을 이용하여 끝이 잘린 원추형 셸의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 해석한 후, 동적영향계수의 전달에 그 개념을 두고 있는 전달영향계수법^{9)~10)}을 적용하여 끝이 잘린 원추형 셸의 고유진동수 및 고유모드를 구하고자 한다. 여러 가지 경계조건을 갖는 간단한 모델에 대해 수치실험을 수행하여 본 방법으로 구한 계산결과를 다른 해석 방법이 적용된 문헌의 계산결과들과 비교하여 본 연구에서 제시된 해석기법의 타당성을 확인하였다.

2. 정식화

2.1 운동방정식

Fig.1에서 보는 바와 같이 끝이 잘린 원추형 셸의

접수일 : 2005년 7월 13일
여동준(책임저자) : 여수대학교 동력시스템공학과
E-mail : djyeo@yosu.ac.kr Tel. 061-659-3133

원주, 자오선 및 반경방향의 좌표를 ϕ, s 및 z 축으로 잡고, 각각의 변위를 u, v 및 w 로 한다. 끝이 잘린 원추형 셸의 자오선방향 길이를 $l(-s_2-s_1)$, 두께를 h , 셸의 큰쪽 반경을 R , 원추형의 반정각을 α 로 한다.

끝이 잘린 원추형 셸은 양쪽 경계단과 임의의 길이 부분이 탄성스프링으로 지지될 수 있고, 힘벡터가 불연속이 되는 곳을 절원주로 하여 n 개의 요소로 분할할 수 있다. 지지스프링으로는 원주, 자오선 및 반경방향의 스프링과 자오선방향에 대한 회전에 저항하는 회전스프링의 4가지 스프링이 동시에 존재할 수 있다. 변위벡터는 연속이며, 수식의 기호 위에 $-$ 가 붙은 것은 무차원량이고, 붙지 않는 것은 차원량이다. 또한 \sim 와 \wedge 가 붙은 것은 각각 상태벡터의 절원주 좌·우측의 무차원 물리량이다. 위첨자 t 는 행렬의 전치를 나타내고, 하첨자 j 는 절원주 j 또는 j 번째 원추형 셸요소의 물리량을 나타낸다.

원추형 셸의 임의 요소의 자유진동에 대한 운동방정식은 다음과 같다.¹¹⁾

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s_j} \frac{\partial}{\partial s_j} (s_j n_{s\phi}) + \frac{1}{s_j \sin \alpha} \frac{\partial n_{\phi s}}{\partial \phi} + \frac{n_{\phi s}}{s_j} \\ & - \frac{q_\phi}{s_j \tan \alpha} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ & \frac{1}{s_j} \frac{\partial}{\partial s_j} (s_j n_x) + \frac{1}{s_j \sin \alpha} \frac{\partial n_{\phi s}}{\partial \phi} - \frac{n_\phi}{s_j} \\ & - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\ & \frac{n_s}{s_j \tan \alpha} + \frac{1}{s_j \sin \alpha} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{s_j} \frac{\partial}{\partial s_j} (s_j q_s) \\ & + \frac{1}{R} n_\phi - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

전단력 성분은

$$\begin{aligned} q_s &= \frac{1}{s_j} \frac{\partial (s_j m_s)}{\partial s_j} + \frac{1}{s_j \sin \alpha} \frac{\partial m_{\phi s}}{\partial \phi} - \frac{m_\phi}{s_j} \\ q_\phi &= \frac{1}{s_j} \frac{\partial (s_j m_{s\phi})}{\partial s_j} + \frac{1}{s_j \sin \alpha} \frac{\partial m_\phi}{\partial \phi} + \frac{m_{\phi s}}{s_j} \end{aligned} \quad (2)$$

Kelvin-Kirchhoff 전단력과 전단합력은

$$V_s = q_s + \frac{1}{s_j \sin \alpha} \frac{\partial m_{s\phi}}{\partial \phi}$$

$$S_{s\phi} = n_{s\phi} - \frac{\partial m_{s\phi}}{s_j \tan \alpha} \quad (3)$$

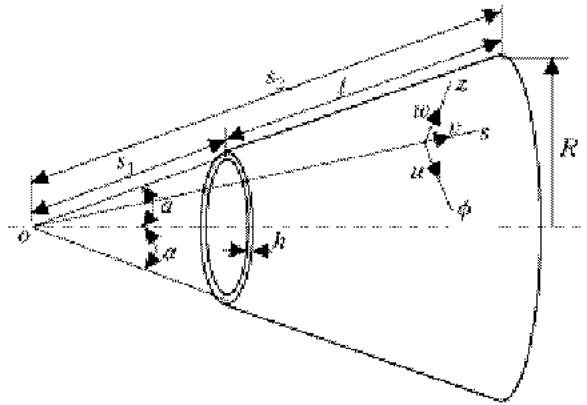


Fig. 1 Coordinate system of a truncated Conical Shell

막력의 성분은

$$\begin{aligned} n_s &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\nu}{s_j} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \phi} + v + \frac{w}{\tan \alpha} \right) + \frac{\partial v}{\partial s_j} \right\} \\ n_\phi &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{s_j} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial u}{\partial \phi} + v + \frac{w}{\tan \alpha} \right) + \nu \frac{\partial v}{\partial s_j} \right\} \\ n_{s\phi} = n_{\phi s} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial s_j} + \frac{1}{s_j} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial v}{\partial \phi} - w \right) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

모멘트 성분은

$$\begin{aligned} m_s &= D_s \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial s_j} + \frac{\nu}{s_j} \left(\frac{1}{s_j \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \phi \right) \right\} \\ m_\phi &= D_s \left\{ \frac{1}{s_j} \left(\frac{1}{s_j \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \phi \right) + \nu \frac{\partial \phi}{\partial s_j} \right\} \\ m_{s\phi} = m_{\phi s} &= \frac{(1-\nu)}{s_j \sin \alpha} D_s \left(\frac{1}{s_j} \frac{\partial w}{\partial \phi} - \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $D_s = Eh^3/12(1-\nu)$ 는 굽힘강성, E 는 종탄성계수, ρ 는 밀도, ν 는 프와송 비이다.

원추형 셸요소가 조화운동을 한다고 가정할 때, 변위성분과 힘성분들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} (u, s_{s\phi}) &= [U_j(s_j), S_{s\phi j}(s_j)] \sin \eta e^{i\omega t} \\ (v, w, \phi) &= [V_j(s_j), W_j(s_j), \Psi_j(s_j)] \cos \eta \phi e^{i\omega t} \\ (m_s, n_s, v_s) &= [M_{sj}(s_j), N_{sj}(s_j), V_{sj}(s_j)] \cos \eta e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 η 는 원주방향의 반파수, ω 는 고유각진동수이다.

각변위는

$$\phi = \frac{\partial w}{\partial s_j} \quad (7)$$

이고, 해석의 간편함을 위해 도입되는 무차원량들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{U}_j &= \frac{1}{R} U_j, \quad \bar{V}_j = \frac{1}{R} V_j, \quad \bar{W}_j = \frac{1}{h} W_j, \\ \bar{\Psi}_j &= \Psi_j, \quad \bar{S}_{s\phi j} = \frac{R^2}{D_s} S_{\phi j}, \quad \bar{N}_{sj} = \frac{R^2}{D_s} N_{sj}, \\ \bar{V}_{sj} &= \frac{R^2}{D_s} V_{sj}, \quad \bar{M}_{sj} = \frac{R}{D_s} M_{sj}, \quad \xi_j = \frac{s_j}{R}, \\ \bar{h} &= \frac{h}{R}, \quad \lambda^2 = \frac{\rho h R^2 \omega^2}{D_s} \end{aligned} \quad (8)$$

식 (6)을 식 (1)~(5)와 (7)에 대입하여 변형한 후, 식 (8)의 무차원량을 대입하여 행렬 미분방정식으로 나타내면

$$\frac{d}{d\xi_j} \bar{\mathbf{Z}}_j(\xi_j) - \mathbf{A}_j(\xi_j) \bar{\mathbf{Z}}_j(\xi_j) \quad (9)$$

여기서 $\bar{\mathbf{Z}}_j$ 는 임의의 j 요소에 있어서의 상태량벡터이고, \mathbf{A}_j 는 8×8 의 계수행렬이며, 그 요소들은

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{\xi_j}, \quad A_{12} = \frac{\eta}{\xi_j \sin \alpha}, \quad A_{13} = \frac{\eta \bar{h}^2}{6 \xi_j^3 \sin \alpha \tan \alpha}, \\ A_{14} &= -\frac{\eta \bar{h}^2}{6 \xi_j^2 \sin \alpha \tan \alpha}, \quad A_{15} = \frac{\bar{h}^2}{6(1-\nu)}, \\ A_{21} &= \frac{-\nu \eta}{\xi_j \sin \alpha}, \quad A_{22} = -\frac{\nu}{\xi_j}, \quad A_{23} = \frac{-\nu}{\xi_j \tan \alpha}, \\ A_{26} &= \frac{\bar{h}^2}{12}, \quad A_{34} = A_{43} = 1, \quad A_{43} = \frac{\nu \eta^2}{\xi_j \sin^2 \alpha}, \\ A_{44} &= -\frac{\nu}{\xi_j}, \quad A_{51} = \frac{12}{h^2} \left\{ \frac{(1-\nu^2) \eta^2}{\xi_j^2 \sin^2 \alpha} - \lambda^2 \right\}, \\ A_{52} &= \frac{12(1-\nu^2) \eta}{\xi_j^2 h^2 \sin \alpha}, \quad A_{53} = \frac{(1-\nu) \eta}{\xi_j^2 \sin \alpha \tan \alpha} \\ &\times \left[\frac{12(1+\nu)}{h^2} + \frac{1}{\xi_j^2} \left\{ 1 + \frac{(1+\nu) \eta^2}{\sin^2 \alpha} \right\} \right], \\ A_{54} &= -\frac{(1-\nu)(2+\nu) \eta}{\xi_j^3 \sin \alpha \tan \alpha}, \quad A_{55} = -\frac{2}{\xi_j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{56} &= \frac{\nu \eta}{\xi_j \sin \alpha}, \quad A_{58} = \frac{-\nu \eta}{\xi_j^2 \sin \alpha \tan \alpha}, \\ A_{61} &= \frac{12(1-\nu^2) \eta}{\xi_j^2 h^2 \sin \alpha}, \quad A_{62} = \frac{12}{h^2} \left\{ \frac{(1-\nu^2)}{\xi_j^2} - \lambda^2 \right\}, \\ A_{63} &= \frac{(1-\nu)}{\xi_j^2 \tan \alpha} \left\{ \frac{12(1+\nu)}{h^2} - \frac{\eta^2}{\xi_j^2 \sin^2 \alpha} \right\}, \\ A_{64} &= -\frac{(1-\nu) \eta}{\xi_j^3 \sin \alpha \tan \alpha}, \quad A_{65} = -\frac{\eta}{\xi_j \sin \alpha}, \\ A_{66} &= \frac{-(1-\nu)}{\xi_j}, \quad A_{71} = \frac{-12(1-\nu^2) \eta}{\xi_j^2 h^2 \sin \alpha \tan \alpha}, \\ A_{72} &= \frac{-12(1-\nu^2)}{\xi_j^2 h^2 \tan \alpha}, \quad A_{73} = \frac{12}{h^2} \left\{ \lambda^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1-\nu^2)}{\xi_j^2 \sin^2 \alpha} \right\} - \frac{(1-\nu) \eta^2}{\xi_j^4 \sin^2 \alpha} \left\{ 2 + \frac{(1+\nu) \eta^2}{\sin^2 \alpha} \right\}, \\ A_{74} &= \frac{(1-\nu)(3+\nu) \eta^2}{\xi_j^3 \sin^2 \alpha}, \quad A_{76} = \frac{-\nu}{\xi_j \tan \alpha}, \\ A_{77} &= -\frac{1}{\xi_j}, \quad A_{78} = \frac{\nu \eta^2}{\xi_j^2 \sin^2 \alpha}, \\ A_{83} &= -\frac{(1-\nu)(3+\nu) \eta^2}{\xi_j^3 \sin^2 \alpha}, \\ A_{84} &= \frac{(1-\nu)}{\xi_j^2} \left(1 + \nu + \frac{2 \eta^2}{\sin^2 \alpha} \right), \quad A_{87} = 1, \\ A_{88} &= -\frac{(1-\nu)}{\xi_j} \end{aligned} \quad (10)$$

이고, 상기 이외의 계수 항은 0이다. 식 (9)을 풀면

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}_j(\xi_j) &= \mathbf{F}_j(\xi_j) \bar{\mathbf{Z}}_j(0), \\ \frac{d}{d\xi_j} \mathbf{F}_j(\xi_j) &= \mathbf{A}_j \mathbf{F}_j(\xi_j) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 필드전달행렬 $\mathbf{F}_j(\xi_j)$ 는 Runge-Kutta-Gill의 수치적분법을 이용하여 구하였다.

임의의 j 번째 원추형 셀요소 좌·우측의 절원주 $j-1$ 과 j 에 있어서의 상태벡터 $\bar{\mathbf{Z}}_{j-1} = {}^t(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{f}})_j$ 와 $\bar{\mathbf{Z}}_j = {}^t(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{f}})_j$ 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{Z}}_j = \mathbf{F}_j(\phi) \bar{\mathbf{Z}}_{j-1} \quad (12)$$

식 (12)를 변위벡터 $\bar{\mathbf{a}}_j = {}^t(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}, \bar{\Psi})_j$ 와

힘벡터 $\tilde{\mathbf{f}}_j = {}^t(\bar{S}_{s\phi}, \bar{N}_s, \bar{V}_s, \bar{M}_s)$ 에 대한 부분행렬로 재정리하면

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}} \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{f}} \end{bmatrix}_j \quad (13)$$

로 되고, $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j$ 및 \mathbf{D}_j 는 4×4 의 정방행렬이며, 식 (13)을 $\hat{\mathbf{z}}_{j-1}$ 에 대하여 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{f}} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{D} & -{}^t\mathbf{B} \\ -{}^t\mathbf{C} & {}^t\mathbf{A} \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}} \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{bmatrix}_j \quad (14)$$

식 (13)과 (14)의 우변의 계수행렬은 서로 역행렬의 관계에 있다.

원추형 셀의 임의의 절원주 j 에 스프링 지지가 있는 경우, 절원주 좌·우측의 상태벡터는

$$\hat{\mathbf{z}}_j = \mathbf{P}_j \hat{\mathbf{z}}_{j-1} \quad (15)$$

여기서 \mathbf{P}_j 는 절원주 j 에서 좌·우측 사이의 전달행렬인 포인트 전달행렬이다.

식 (15)를 변위벡터 $\tilde{\mathbf{a}}_j$ 및 $\hat{\mathbf{a}}_j$ 와 힘벡터 $\tilde{\mathbf{f}}_j$ 및 $\hat{\mathbf{f}}_j$ 에 대한 부분행렬로 재정리하면

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}} \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K} & \mathbf{I} \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{f}} \end{bmatrix}_j \quad (16)$$

여기서 \mathbf{I} 는 단위행렬, $\mathbf{0}$ 는 영(null)행렬이다.

절원주 j 의 좌측과 우측에 있어서, 힘의 평형조건으로부터

$$\tilde{\mathbf{f}}_j = \hat{\mathbf{f}}_j - \mathbf{K}_j \tilde{\mathbf{a}}_j \quad (17)$$

여기서

$$\mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} \bar{k}_\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{k}_r \end{bmatrix}_j \quad (18)$$

이고, 스프링상수들의 무차원량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (\bar{k}_\phi, \bar{k}_s, \bar{k}_z) &= \frac{hR^2}{D_s} (k_\phi, k_s, k_z), \\ \bar{k}_r &= \frac{hR}{D_s} k_r \end{aligned} \quad (19)$$

2.2 영향계수의 전달

임의의 절원주 j 의 좌측과 우측에서 변위벡터 \mathbf{d}_j 와 힘벡터 $\tilde{\mathbf{f}}_j, \hat{\mathbf{f}}_j$ 사이의 관계를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_j &= \bar{\mathbf{T}}_j \tilde{\mathbf{f}}_j, & \bar{\mathbf{T}}_j &= {}^t\bar{\mathbf{T}}_j \\ \mathbf{d}_j &= \hat{\mathbf{T}}_j \hat{\mathbf{f}}_j, & \hat{\mathbf{T}}_j &= {}^t\hat{\mathbf{T}}_j \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 $\bar{\mathbf{T}}_j, \hat{\mathbf{T}}_j$ 는 4×4 의 대칭인 동적영향계수행렬이다.

식 (14)와 (20)에서 j 번째 요소에 있어서 동적영향계수의 필드전달식은

$$\mathbf{X}_j \bar{\mathbf{T}}_j = \mathbf{Q}_j \quad (j=2, \dots, n) \quad (21)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_j &= \hat{\mathbf{T}}_{j-1} {}^t\mathbf{C}_j + {}^t\mathbf{D}_j \\ \mathbf{Q}_j &= \hat{\mathbf{T}}_{j-1} {}^t\mathbf{A}_j + {}^t\mathbf{B}_j \end{aligned} \quad (22)$$

식 (17)과 (20)에서 동적영향계수의 포인트 전달식은

$$\bar{\mathbf{X}}_j \hat{\mathbf{T}}_j = \bar{\mathbf{T}}_j \quad (23)$$

여기서

$$\bar{\mathbf{X}}_j = \mathbf{I}_j + \bar{\mathbf{T}}_j \mathbf{K}_j \quad (24)$$

상기의 필드 및 포인트 전달식을 결합시키면, 식 (21)과 (23)으로부터 필드-포인트 전달식은

$$\mathbf{Y}_j \hat{\mathbf{T}}_j = \mathbf{Q}_j \quad (j=2, \dots, n) \quad (25)$$

여기서

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{X}_j + \mathbf{Q}_j \mathbf{K}_j \quad (26)$$

이고, 식 (25)는 필드와 포인트 전달식을 하나로 결합시킨 식이므로 이 식을 이용하면 계산시간을 훨씬 단축시킬 수 있다.

본 해석기법에 있어서는 계산시점의 경계조건을 처음부터 고려해야 한다. 즉 원추형 셀의 좌측의 경계선인 절원주 0를 스프링 지지로 간주하여 절원주 0 우측에서의 동적영향계수 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\hat{T}_0 - K_0^{-1} \quad (27)$$

여기서, K_0 는 절선 0에서의 포인트 강성행렬이다. 그러나, K_0 가 특이행렬인 경우, K_0 의 역행렬이 구해지지 않으므로, 절원주 0와 1사이의 동적영향계수의 전달과정은 K_0 를 그대로 사용한 다음식이 이용된다.

$$X_1 \hat{T}_1 - Q_1 \quad (28)$$

여기서

$$\begin{aligned} X_1 &= {}^t C_1 + K_0 {}^t D_1 \\ Q_1 &= {}^t A_1 + K_0 {}^t B_1 \end{aligned} \quad (29)$$

식 (29)의 K_0 의 요소인 스프링상수 $\bar{k}_\phi, \bar{k}_\nu, \bar{k}_z, \bar{k}_r$ 의 값들을 적절히 변화시킴으로서 모든 경계조건에 대응시킬 수 있다.

3. 진동수방정식 및 고유모드

3.1 진동수방정식

본 기법의 진동수방정식은 원추형 셀의 우측단의 경계조건에 따라 두 종류로 대별 할 수 있다.

우선 $K_n = 0$ 인 경우 ($\hat{f}_n - \tilde{f}_n = 0$)에는 식 (21)에서 j 에 n 을 대입하면 $X_n \hat{T}_n - Q_n$ 로 되고, 식 (20)에서 $\tilde{T}_n = d_n \tilde{f}_n^{-1}$ 이므로 이것을 $X_n \hat{T}_n - Q_n$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} X_n \tilde{a}_n - Q_n \tilde{f}_n &= 0, \\ X_n \tilde{a}_n &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

로 되고, $\tilde{a}_n \neq 0$ 이므로 진동수방정식은 다음과 같다.

$$X_n - \det(X_n) = 0 \quad (31)$$

다음으로, $K_n \neq 0$ 인 경우에 대해서는 식 (17)과 (20)으로부터

$$(I + K_n \tilde{T}_n) \tilde{f}_n = 0 \quad (32)$$

로 되고, \tilde{T}_n 의 대칭성과 식 (21)에서 j 에 n 을 이 대입한 식을 이용하면

$$\tilde{T}_n - X_n^{-1} Q_n - {}^t Q_n {}^t X_n^{-1} \quad (33)$$

식 (33)을 (32)에 대입하면

$$\begin{aligned} (I + K_n {}^t Q_n {}^t X_n^{-1}) \tilde{f}_n &= 0 \\ (X_n + K_n {}^t Q_n {}^t X_n^{-1} X_n) {}^t X_n^{-1} \tilde{f}_n &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

식 (34)에서 ${}^t X_n^{-1} X_n = I$ 이고, 식 (26)으로부터 ${}^t X_n + K_n {}^t Q_n - {}^t Y_n$ 이므로

$${}^t Y_n {}^t X_n^{-1} \tilde{f}_n = 0 \quad (35)$$

여기서, $\tilde{f}_n \neq 0$ 이므로, 진동수방정식은

$$\begin{aligned} \det({}^t Y_n {}^t X_n^{-1}) - \frac{\det(Y_n)}{\det(X_n)} = 0 \\ Y_n = \det(Y_n) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

로 되고, 결과적으로 식 (36)은 $K_n = 0$ 인 경우의 식 (31)을 포함하고 있음을 알 수 있다.

진동수방정식 (36)에 이분법을 적용하여 고유진동수를 구할 경우, 참 근뿐만 아니라 거짓 근(반대칭극)도 구해버리게 되므로 식 (36) 대신에 다음 식을 이용하여 고유진동수를 구한다.

$$\text{sgn}(G_n) - \text{sgn}(X_1) \cdot \text{sgn}(\hat{X}_1) \prod_2^n \text{sgn}(Y_j) \quad (37)$$

진동수방정식 (31), (36) 대신에 식 (37)을 사용함으로써, 모든 경계조건 및 중간조건을 스프링상수 값만을 변화시켜 대응할 수 있으며, 동시에 거짓근도 해소할 수 있게 된다.

3.2 고유모드의 계산

고유모드의 계산은 고유진동수를 구한 후, 원추형 셀의 우측에서 좌측으로 실행된다. 원추형 셀의 우측단이 자유단인, 즉 $K_n = 0$ 인 경우에는 절원주 n

의 좌우측의 모든 힘벡터는 0이되므로 절원주 $n-1$ 의 우측의 힘벡터 성분 중에서 전단합력 $\hat{S}_{s\phi n-1} = -1$ 로 두고, \hat{N}_{sn-1} , \hat{V}_{sn-1} , \hat{M}_{sn-1} 을 차례로 구한 후, 식(20)에 의해 변위 \hat{U}_{n-1} , \hat{V}_{n-1} , \hat{W}_{n-1} 및 각변위 $\hat{\psi}_{n-1}$ 을 구하고, 다음에 절원주 n 에서의 상태량들을 계산한다. 절원주 $n-2$ 에서 1까지의 상태량들은 식 (14), (17) 및 (20)에 의해 차례로 역방향으로 구한다. 또한 절원주 n 이 탄성 지지되어 있거나 고정단인, 즉 $K_n \neq 0$ 인 경우에는 절원주 n 우측의 힘벡터는 0이고, 절원주 n 좌측의 힘벡터 $\hat{f}_n \neq 0$ 이므로, 식 (32)에서 임의의 하나의 힘, $\hat{S}_{s\phi n} = -1$ 로 두고, \hat{N}_{sn} , \hat{V}_{sn} , \hat{M}_{sn} 을 차례로 구하면 된다. 변위벡터는 식 (20)에 의해 변위 \hat{U}_n , \hat{V}_n , \hat{W}_n 및 각변위 $\hat{\psi}_n$ 을 구할 수 있다. 다음에 절원주 $n-1$ 에서 1까지의 상태량들은 식 (14), (17) 및 (20)에 의해 차례로 역으로 계산하면 된다. 절원주 0에서의 변위벡터와 힘벡터 성분은 식 (17)에 의해 구할 수 있다.

4. 수치계산 결과 및 고찰

본 연구에서는 균일 두께의 끝이 잘린 원추형 셸의 계산모델에 대하여 수치실험을 행하고, 영향계수의 전달에 의한 본 방법의 계산 결과들을 멱급수법에 의한 Tong⁵⁾의 결과 및 전달행렬법에 의한 Irie 등⁶⁾의 결과와 비교하여 알고리즘의 타당성을 확인하였다. 수치계산에 사용된 끝이 잘린 원추형 셸의 특성값은 은 두께가 5 mm, 반경이 500 mm이며, 종탄성계수는 2.1×10^{11} N/m², 밀도는 7840 kg/m³, 프와송 비는 0.3으로 하였다.

Table 1-2는 $R/h=100$, $\nu=0.3$, $l \sin \alpha/R=0.25$ 의 끝이 잘린 원추형 셸의 양단이 단순지지 및 단순지지-고정된 경우의 경계조건에 대해 진동수 파라미터 λ 값을 참고문헌[5]와 비교하여 나타낸 것이다. 원추형 반정각은 $\alpha=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 의 경우이며 진동수 파라미터 값들은 원주방향의 반파수 η 와 원추형 반정각 α 의 변화에 관계없이 참고문헌[6]의 멱급수법의 결과와 대체로 잘 일치하고 있음을 보이고 있다.

Table 3-5는 $R/h=100$, $\nu=0.3$, $l \sin \alpha/R=0.5$ 의 끝이 잘린 원추형 셸의 양단이 고정-자유, 고정-

단순지지 및 양단고정의 경계조건에 대해 진동수 파라미터 λ 값을 참고문헌[6]과 비교하여 나타낸 것이다. Table 1-2에서와 마찬가지로 진동수 파라미터 λ 값들은 원주방향의 반파수 η 와 원추형 반정각 α 의 변화에 관계없이 참고문헌[6]의 전달행렬법의 결과와 잘 일치하고 있음을 나타내고 있다.

Table 1 Frequency parameters λ of conical shells with simply supported at the two end

η	$\alpha=30^\circ$		$\alpha=45^\circ$		$\alpha=60^\circ$	
	Present	Ref.[6]	Present	Ref.[6]	Present	Ref.[6]
0	0.19098	0.1910	0.28540	0.2854	0.36283	0.3628
1	0.59229	0.5923	0.52546	0.5254	0.47538	0.4753
2	0.79097	0.7910	0.68788	0.6878	0.57217	0.5720
3	0.72840	0.7284	0.69733	0.6972	0.60014	0.5998
4	0.63524	0.6353	0.66639	0.6662	0.60538	0.6048
5	0.55307	0.5531	0.63039	0.6300	0.60772	0.6069
6	0.49488	0.4949	0.60321	0.6026	0.61589	0.6147
7	0.46531	0.4653	0.59182	0.5910	0.63431	0.6327
8	0.46448	0.4644	0.59923	0.5981	0.66499	0.6630
9	0.48924	0.4891	0.62567	0.6243	0.70839	0.7060

Table 2 Frequency parameters λ of conical shells with simply supported small edge and clamped large end

η	$\alpha=30^\circ$		$\alpha=45^\circ$		$\alpha=60^\circ$	
	Present	Ref.[5]	Present	Ref.[5]	Present	Ref.[5]
0	0.98886	0.9889	0.88014	0.8801	0.78527	0.7853
1	0.95382	0.9535	0.86727	0.8673	0.78208	0.7821
2	0.86422	0.8643	0.83291	0.8329	0.77384	0.7738
3	0.75803	0.7582	0.78747	0.7876	0.76401	0.7641
4	0.66262	0.6629	0.74244	0.7426	0.75693	0.7570
5	0.58960	0.5900	0.70662	0.7069	0.75648	0.7566
6	0.54206	0.5426	0.68522	0.6856	0.76541	0.7656
7	0.52005	0.5208	0.68058	0.6810	0.78525	0.7854
8	0.52239	0.5223	0.69317	0.6937	0.81659	0.8168
9	0.54677	0.5479	0.72230	0.7229	0.85939	0.8597

Table 3 Frequency parameters λ of conical shell with Clamped small edge and free large edge

η	$\alpha=30^\circ$		$\alpha=45^\circ$		$\alpha=60^\circ$	
	Present	Ref.[6]	Present	Ref.[6]	Present	Ref.[6]
0	0.58367	0.5837	0.65295	0.6529	0.46929	0.4683
1	0.32603	0.3260	0.38222	0.3822	0.32443	0.3244
2	0.17795	0.1780	0.22511	0.2251	0.20326	0.2033
3	0.11164	0.1116	0.14987	0.1499	0.14318	0.1432
4	0.09112	0.0911	0.11825	0.1182	0.11888	0.1189
5	0.10342	0.1034	0.11967	0.1197	0.12289	0.1229
6	0.13448	0.1345	0.14471	0.1447	0.14829	0.1483
7	0.17532	0.1753	0.18383	0.1838	0.18760	0.1876
8	0.22308	0.2231	0.23200	0.2320	0.23643	0.2364
9	0.27721	0.2772	0.28737	0.2874	0.29287	0.2929

Table 4 Frequency parameters λ of conical shell with clamped small edge and simply supported large edge

η_1	$\alpha = 30^\circ$		$\alpha = 45^\circ$		$\alpha = 60^\circ$	
	Present	Ref.[6]	Present	Ref.[6]	Present	Ref.[6]
0	0.80651	0.8065	0.71489	0.7149	0.53953	0.5395
1	0.81104	0.8110	0.70954	0.7095	0.53494	0.5349
2	0.62800	0.6280	0.64743	0.6474	0.50654	0.5065
3	0.43548	0.4355	0.52031	0.5203	0.44711	0.4471
4	0.32625	0.3263	0.41643	0.4164	0.38958	0.3896
5	0.27783	0.2778	0.35983	0.3598	0.35957	0.3596
6	0.27547	0.2755	0.34580	0.3458	0.36125	0.3612
7	0.30531	0.3053	0.36572	0.3657	0.39024	0.3902
8	0.35452	0.3545	0.41015	0.4102	0.44028	0.4403
9	0.41555	0.4156	0.47147	0.4715	0.50607	0.5061

Table 5 Frequency parameters λ of conical shell with clamped at the two edge

η_1	$\alpha = 30^\circ$		$\alpha = 45^\circ$		$\alpha = 60^\circ$	
	Present	Ref.[6]	Present	Ref.[6]	Present	Ref.[6]
0	0.99299	0.9930	0.87305	0.8731	0.66853	0.6685
1	0.87761	0.8776	0.81196	0.8120	0.63158	0.6316
2	0.64216	0.6422	0.66962	0.6696	0.55234	0.5523
3	0.48027	0.4803	0.54299	0.5430	0.47854	0.4785
4	0.38158	0.3816	0.45695	0.4570	0.42977	0.4298
5	0.33112	0.3311	0.40950	0.4095	0.40930	0.4093
6	0.32164	0.3216	0.39700	0.3970	0.41591	0.4159
7	0.34498	0.3450	0.41511	0.4151	0.44657	0.4466
8	0.39064	0.3906	0.45773	0.4577	0.49724	0.4972
9	0.45050	0.4505	0.51858	0.5186	0.56395	0.5640

단순지지단의 경계조건의 처리는 스프링상수 \bar{k}_ϕ , \bar{k}_z 값을 ∞ 로 대치함으로써 대응시켰다. 실제의 계산에 있어서 ∞ 의 값은 고유진동수가 포화할 정도의 큰 값인 10^{20} 을 수치상의 무한대로 간주하였다. 또한 고정단의 경계조건의 처리는 스프링상수 \bar{k}_ϕ , \bar{k}_z 및 \bar{k}_r 값을 ∞ 로 대치함으로써 대응시켰다.

Fig. 2는 $R/h = 100$, $\nu = 0.3$, $l \sin \alpha / R = 0.75$ 및 $\alpha = 30^\circ$ 에 대해서 원추방향의 반파수 $\eta = 2$ 이고, 원추형 셸의 양쪽단의 경계 및 계의 중간이 탄성지지된 경우에 대해 1차에서 4차까지의 고유모드를 나타낸 것이다. 지지된 스프링 상수 값은 $\bar{k}_\phi = \bar{k}_z = 100$ 이고, 고유진동수를 구할 경우에는 달리 분할수를 더욱 세분하여 고유모드를 구하였다. Fig. 2에서 실선은 원추방향의 변위 (\bar{U}), 파선은 자오선 방향의 변위 (\bar{V}), 점선은 반경방향의 변위

(\bar{W})를 각각 나타내며, 최대변위를 1로 하여 자오선 방향의 길이에 대해 도시한 것이다.

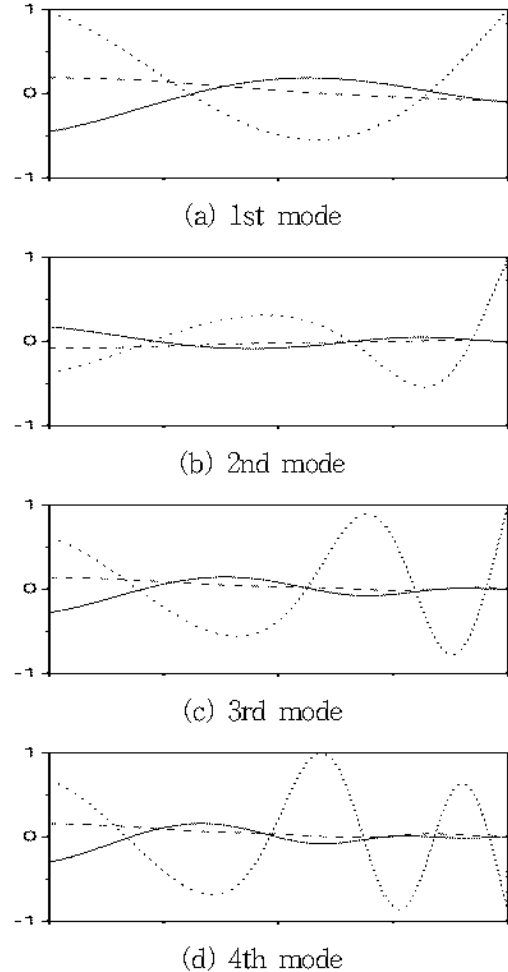


Fig. 2 Mode shapes

5. 결 론

본 연구에서는 동적영향계수의 축차전달에 그 개념을 두고 있는 전달영향계수법을 사용하여 끝이 잘린원추형 셸의 자유진동해석 알고리즘을 정식화하였다. 본 알고리즘에 매트랩을 이용하여 고유진동수와 고유모드를 구하는 전산프로그램을 개발한 후, 간단한 계산모델에 대하여 수치실험을 수행하였다. 본 방법의 유효성을 검증하기 위하여 계산결과를 다른 해석 방법에 의한 다른 문헌의 결과와 비교하여 타당성을 검증하였다. 그 결과 제안된 방법의 수치계산 결과는 기존의 맥급수법이나 전달행렬법에 의한 결과들과 잘 일치하였다. 또한 본 기법에서는 여러 가지 경계조건의 처리를 동일한 해석 알고리즘에 원주, 자오선, 반경 및 회전방향의 스프링 상

수 값만을 적절히 변경시켜 적절히 대응시킬 수 있었다.

후 기

본 연구는 여수대학교 2001학년도 학술연구지원비에 의하여 연구되었음.

참고 문헌

1. A. W. Leissa, 1973, "Vibration of Shell", NASA SP-288.
2. C. C. Siu and C. W. Bert, 1970. "Free Vibrational Analysis of Sandwich Conical Shells with Free Edges", Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 47, No. 3, pp. 943~945.
3. C. C. Yang, 1974, "On Vibrations of Orthotropic Conical Shells", Journal of Sound and Vibration, Vol. 34, pp. 552~555.
4. R. Delpak and W. M. Hague, 1980, "An Experimental and Theoretical Investigation of the Frequencies and Mode Shapes of Axi-symmetric Shell Models", Journal of Sound and Vibration, Vol. 72, pp. 235~249.
5. L. Tong, 1993, "Free Vibration of Orthotropic Conical Shells", International Journal of Engineering Science, Vol. 31, No.5, pp. 719~733.
6. T. Irie, G. Yamada, and Y. Kaneko, 1982, "Free Vibration of a Conical Shell with Variable Thickness", Journal of Sound and Vibration, Vol. 82, No. 1, pp. 83~94.
7. T. Irie, G. Yamada and Y. Kaneko, 1984, "Natural Frequencies of Truncated Conical Shell", Journal of Sound and Vibration, Vol. 92, No. 3, pp. 447~453.
8. K. Y. Lam and L. Hua, 1999. "Influence of Boundary Conditions on the Frequency Characteristics of a Rotating Truncated Circular Conical Shell", Journal of Sound and Vibration, Vol. 2235, No. 2, pp. 171~195.
9. 문덕홍, 여동준, 1994, "전달영향계수법에 의한 탄성지지를 갖는 원통형 셸구조물의 자유진동해석", 한국소음진동공학회지, 제4권, 제4호, pp. 469~478.
10. 문덕홍, 여동준, 1996, "보강재를 갖는 원통셸 구조물의 진동해석 알고리즘의 개발", 한국소음진동공학회지, 제6권, 제4호, pp. 481~491.
11. W. Flügge, 1973, "Stresses in Shells", Springer-Verlag, Berlin. pp. 402~413.