

〈 논문 〉

통합형 점소성구성식을 이용한 손상재료거동해석

하 상 열* · 김 기 태 †

(2004년 7월 19일 접수, 2004년 12월 27일 심사완료)

Analysis of Damaged Material Response Using Unified Viscoplastic Constitutive Equations

Sang Yul Ha and Ki Tae Kim

Key Words : Unified Viscoplastic Constitutive Model(통합형 점소성 구성모델), FEM(유한요소법), Generalized Mid-Point Rule(일반 중간점법), Strain Rate-Dependent Effect(변형률속도의존효과), Unit Cell Model(단위격자모델)

Abstract

In decades, a substantial body of work on a unified viscoplastic model which considers the mechanism of plastic deformation and creep deformation has developed. The systematic scheme for numerical analysis of unified model is necessary because the dominant failure mechanism is the defect growth and coalescence in materials. In the present study, the unified viscoplastic model for materials with defects suggested by Suquet and Michel was employed for numerical analysis. The constitutive equations are integrated based on the generalized mid-point rule and implemented into a finite element program (ABAQUS) by means of user-defined subroutine (UMAT). To evaluate the validity of the developed UMAT code and the assessment of the adopted viscoplastic model, the results obtained from the UMAT code was compared with the numerical reference solution and experimental data. The unit cell analysis also has been investigated to study the effect of strain rate, temperature, stress triaxiality and initial defect volume fraction on the growth and coalescence of the defect.

1. 서 론

일반적으로 고분자 화합물과 고온에서의 금속재료는 크리프(creep) 등의 시간에 의존하는 비탄성 변형이 재료거동에 미치는 영향이 크기 때문에 탄소성 변형에 비하여 무시할 수 없다.⁽¹⁾ 또한 재료 내부에 결함(defect)이 존재하는 경우 결함들의 성장 및 결함(growth and coalescence)에 의한 파손현상(failure phenomena)이 지배적인 파손기구로 나타나게 된다. 따라서 재료의 비탄성 거동을 위한 효율적이고 체계적인 수치해석 기술이 요구될 뿐만 아니라 재료 내부에 존재하는 결함의 진전에 대한 정확한 예측기술이 요구된다.

고전적인 구성방정식은 크리프 변형과 소성변형을 별개의 메커니즘으로 구분하였으나, 최근에는 내부변수이론(internal variable theory), 전위이론(dislocation theory)등에 바탕을 둔 통합형 구성모델(unified constitutive model)들이 개발되고 있다. 특히 재료 내부에 결함이 존재하는 경우 Cocks,⁽²⁾ Suquet and Michel⁽³⁾ 등은 미소역학적인 연구를 통하여 일반적인 형태의 통합형 점소성 구성방정식을 제안하였다.

한편, 개발된 구성식을 수치해석적 방법을 이용하여 재료의 비탄성 거동의 해석에 적용하기 위한 연구가 활발히 진행되고 있다.^(4,5) Hughes,⁽⁶⁾ Nagtegaal,⁽⁷⁾ Lush⁽⁸⁾ 등은 큰 회전이 동반되는 비선형 문제에 대하여 응력의 객관성(objectivity)을 유지하면서 변형률 형태의 구성식을 적분하는 객관적인 증분 알고리즘(incrementally objective algorithm)을 제안하였다. 또한 Honberger 등⁽⁹⁾은 GMR 법(generalized mid-point rule)을 적용하여 Robinson 통합형 점소성 모델을 ABAQUS⁽¹⁰⁾

† 책임저자, 회원, 포항공과대학교 기계공학과
E-mail : Korean@postech.ac.kr
TEL : (054)279-2164 FAX : (054)279-5569

* 포항공과대학교 대학원

의 사용자 정의 서브루틴(user-defined subroutine) UMAT 으로 구현하였으며, Aravas⁽¹²⁾와 Zavaliangos⁽¹³⁾는 후방 오일러법(backward Euler method)을 적용하여 Gurson 모델을 UMAT 으로 구현하였다. 또한, 윤삼손 등⁽¹³⁾은 Chaboche 모델을 GMR 법으로 수식화하여 UMAT 으로 구현하였다. 그러나 이러한 연구들은 결함이 없는 재료의 거동묘사에 한정되어 있을 뿐 아니라, 고온에서 필연적으로 나타나는 재료거동의 변형률속도의존효과(strain rate-dependent effect)를 적절히 고려하지 못하고 있다.

최근 손상재료의 미시적인 거동을 분석하기 위하여 Needleman 등⁽¹⁴⁾이 제안한 단위격자모델(unit cell model)이 빈번히 사용되고 있다. 단위격자모델은 미소역학적인 측면에서 재료의 거시적인 응력과 변형률의 관계를 규명하기 위하여 대표체적(representative volume element: RVE)을 중공구형 등 일정한 기하학적인 모양으로 가정한 뒤 수치해석적인 방법으로 재료거동을 연구한다. 그러나 기존의 연구는 모두 상온에서의 재료거동을 나타내는데 치중하였으며 고온에서의 결함의 성장 및 결함에 대한 변형률 속도와 온도에 대한 영향은 무시하였다.

본 연구에서는 응력의 객관적인 적분을 위하여 Hughes 등⁽⁶⁾이 제안한 회전이 없는 형상(rotation-neutralized configuration)에서 GMR 시간적분법을 이용하여 통합형 점소성 구성식의 수치적분을 수식화하고, 이를 ABAQUS의 UMAT 코드로 구현하였다. 개발된 코드의 안정성과 정확성을 평가하기 위하여 압축, 변형률속도 점프 해석을 수행하였으며, 시간 적분법에 따른 유한 요소 해석 결과를 비교하여 사용된 점소성 구성식을 효율적으로 수치계산할 수 있는 적분법을 제안하였다. 또한, 구성모델에 의한 유한 요소 해석 결과는 실험결과와 비교하여 선정된 구성모델의 유용성을 검증하고자 하였다. 한편 단위격자모델 해석을 통하여 고온에서의 변형률 속도, 응력삼축성, 온도, 초기결함의 파괴분율이 결함의 성장 및 결함에 미치는 영향을 조사하였다.

2. 이론적 배경

2.1 비탄성 구성방정식

전체 변형률 속도성분 $\dot{\epsilon}$ 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^m + \dot{\epsilon}^h \quad (1)$$

여기서, $\dot{\epsilon}^e$, $\dot{\epsilon}^m$, $\dot{\epsilon}^h$ 는 각각 탄성변형률 속도성분, 비탄성변형률 속도성분, 열변형률 속도성분을 나타낸다. 탄성변형에 대해서는 후크의 법칙을 적용하면 응력변형률 속도성분 $\dot{\sigma}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C} : \dot{\epsilon}^e \quad (2)$$

선형등방탄성재료(linear isotropic elastic material)라 가정하면 탄성 계수 \mathbf{C} 는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{C} = 2G\mathbf{I}^{(4)} + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\mathbf{I}^{(2)} \otimes \mathbf{I}^{(2)} \quad (3)$$

여기서, G 와 K 는 각각 전단 탄성계수, 체적 탄성계수이며, $\mathbf{I}^{(2)}$ 와 $\mathbf{I}^{(4)}$ 는 각각 2차, 4차 항등행렬이다.

열변형률 속도성분은 다음과 같은 선형식으로 쓸 수 있다.

$$\dot{\epsilon}^h = \alpha \dot{T}\mathbf{I}^{(2)} \quad (4)$$

여기서, α 는 열팽창계수이다.

2.2 통합형 점소성 구성식

통합형 점소성 구성방정식은 크리프 변형과 소성 변형을 동일한 발생기구에 의해서 생겨나는 비탄성 변형으로 가정하고, 변형률 함수 형태로 표현되는 내부변수들을 도입하여 재료의 거동을 보다 정확히 예측할 수 있는 모델이다. 일반적으로 멱수법칙 크리프(power-law creep) 거동을 따르는 일반재료의 크리프 포텐셜(creep potential)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi_{matrix} = \frac{m\dot{\epsilon}_0}{1/m+1} \left(\frac{\sigma_{matrix}}{g} \right)^{1/m+1} \quad (5)$$

여기서, m 과 $\dot{\epsilon}_0$ 은 변형률속도 민감도(strain rate sensitivity)와 기준 변형률속도(reference strain rate)를 나타내는 재료 상수이며, σ_{matrix} 는 유효응력을 나타낸다. 최근에 Cocks⁽²⁾와 Suquet and Michel⁽³⁾ 등은 미소역학적인 연구를 통하여 결함이 존재하는 크리프재료에 대하여 다음과 같은 일반적인 형태의 점소성 구성식을 제안하였다.

$$\Phi = \frac{m\dot{\epsilon}_0}{1/m+1} \left(\frac{\sigma_m}{g} \right)^{1/m+1} [A(f)T^2 + B(f)]^{(1/m+1)/2} \quad (6)$$

여기서, T 는 응력삼축성(stress triaxiality)을 나타내며 유효응력에 대한 정수압응력의 비로 쓸 수 있다. $A(f)$ 와 $B(f)$ 는 밀도에 대한 함수로 본 연구에서는 Suquet and Michel⁽³⁾이 제안한 형태를 사용하였다.

한편, 비탄성 거동은 소성포텐셜에 조합유동법칙(associated flow rule)을 적용하여 해석하였다. 따라서, 비탄성 변형률속도 성분은 다음과 같이 유효변형률 성분($\dot{\epsilon}_{eq}^m$)과 정수압변형률 성분($\dot{\epsilon}_m^m$)으로 나누어 쓸 수 있다.

$$\dot{\epsilon}^m = \dot{\epsilon}_{eq}^m \mathbf{n} + \dot{\epsilon}_m^m \mathbf{I} \quad (7)$$

$$\mathbf{n} = \frac{3\sigma'}{2\sigma_{eq}} \quad (8)$$

식 (8)은 비탄성 변형률 속도성분의 방향이 편차응력성분의 방향과 일치함을 나타내며 고전이론에서의 직교법칙(normality rule)을 만족한다.⁽⁴⁾

재료내부 결함의 파괴분율을 나타내는 상태변수

f 는 질량보존의 법칙으로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{f} = (1-f)\dot{\epsilon}_m^p \quad (9)$$

2.3 변형속도 민감성

대부분의 고분자 화합물이나 고온에서의 금속재료들은 변형속도 민감성을 가지고 있다. 일반적으로 모재의 변형속도 민감성을 나타내기 위하여 다음과 같은 지수형 식을 이용한다.

$$\dot{\epsilon}^{in} = \dot{\epsilon}_0 \left(\frac{\sigma_{matrix}}{g} \right)^{1/m} \quad (10)$$

결합이 존재하는 재료의 경우 변형률속도 민감성을 나타내기 위해서 식 (10)에서의 유효응력을 등가인장응력으로 대체하여 다음과 같은 형태를 사용한다.

$$\dot{\epsilon}^{in} = \dot{\epsilon}_0 \left(\frac{\sigma_e}{g} \right)^{1/m} \quad (11)$$

한편, 모재의 등가응력(equivalent stress) σ_{matrix} 은 등가소성일의 원리(equivalent plastic work principle)로부터 정의된다.

$$(1-f)\sigma_{matrix} \frac{\partial \Phi_{matrix}}{\partial \sigma_{matrix}} = \sigma \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad (12)$$

3. 구성식의 수치적분

3.1 구성방정식의 수식화

응력의 적분시 변형이 커짐에 따라 회전과 비선형성이 커지므로 구성식의 객관성(objectivity)을 유지하는 것이 중요하다. 본 연구에서는 Hughes 와 Winget⁽⁶⁾가 제안한 회전이 없는 형상(rotation-neutralized configuration)에서 수치적분을 수행하는 B-bar 법을 이용하여 점소성 구성모델을 해석하였다. 일반적으로 구성방정식에 사용되는 객체들 ($\{\dot{\sigma}_t, \dot{\epsilon}_t, \dot{\xi}_t\}$), 즉 응력변형률속도, 변형률속도, 상태변수 변형률속도는 현재 형상(spatial configuration)에서 객관적이지 않다. 따라서 Fig. 1 에 보여진

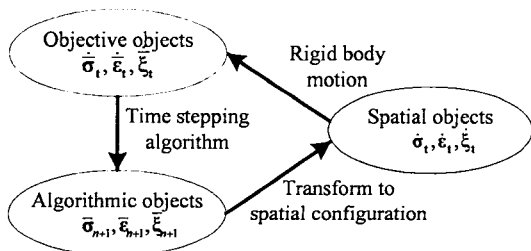


Fig. 1 General algorithmic scheme for incrementally objective algorithms

것처럼 강체운동(rigid body motion)(식 (13))을 통하여 회전의 영향을 받지 않는 형상으로 옮겨진 후 GMR 법과 같은 수치적분법을 이용하여 계산한 후 다시 원래의 형상으로 매핑(mapping)시킨다.⁽⁶⁻⁸⁾

$$\bar{\sigma} := \mathbf{R}^T \sigma \mathbf{R} \quad (13)$$

식 (13)은 현재형상의 객체들을 회전이 없는 형상으로 변환하는 강체운동을 나타낸다.

GMR 법은 식 (14)와 같이 미분방정식의 형태로 표현되는 비탄성 구성식의 해를 구하기 위하여 쓰이는 방법으로서 식 (15)와 같이 이산화시킬 수 있다.⁽³⁾

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \quad (14)$$

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_\theta, t + \theta \Delta t) \Delta t \quad (15)$$

식 (15)에서 $\mathbf{x}_\theta = \mathbf{x}_n + \theta \Delta \mathbf{x}$ 이며, $\theta = 0, 1, 0.5$ 인 경우는 각각 외연적 오일러, 내연적 오일러 및 Crank-Nicholson 시간 적분법에 해당한다. 탄소성 문제에서 $0.5 \leq \theta \leq 1$ 인 경우에는 무조건적인 안정성(unconditionally stable)을 가지며, $\theta = 0.5$ 인 경우에는 2 차의 정확도를 가지는 것으로 알려져 있다.⁽⁴⁾

회전이 없는 형상에서 우리가 계산하고자 하는 객체들에 GMR 법을 적용하면 다음과 같은 식들을 얻을 수 있다.

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+\theta}^* - \Delta t \mathbf{C} : [\dot{\epsilon}_\theta^{in} + \dot{\epsilon}_\theta^{th}] \quad (16)$$

$$f_{n+1} = f_n + \Delta t (1-f_\theta) (\dot{\epsilon}_m^p)_\theta \quad (17)$$

여기서, $\bar{\sigma}$ 는 회전이 없는 형상에서의 응력을 나타낸다. 또한, 식 (16)의 우변의 첫 번째 항은 탄성예측자(elastic predictor), 두 번째 항은 소성보정자(plastic corrector)를 나타내며, 이는 Wilkins⁽²²⁾이 제안한 반경회귀법과 일치한다. 식 (16)을 I 와 n 에 투영시키면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\bar{\sigma}_{eq} = \bar{\sigma}_{eq}^* - 3K \Delta t (\dot{\epsilon}_{eq}^m)_\theta \quad (18)$$

$$\bar{\sigma}_m = \bar{\sigma}_m^* - K \Delta t (\dot{\epsilon}_m^m)_\theta + 3K \alpha \quad (19)$$

따라서 GMR 법을 이용하여 수식화된 식 (17), (18), (19)는 비선형 방정식의 형태로 전환되고 이는 Newton-Raphson 법을 이용하여 풀 수 있다.

3.2 접선강성행렬의 유도

내연적 유한요소 코드에서 평형방정식들은 증분마지막에 쓰여지며 절점 미지수에 대한 비선형 방정식을 야기한다. Newton-Raphson 법을 사용하여 이들 비선형 방정식의 해를 구할 때 2 차의 수렴도를 유지하기 위해 접선강성행렬(consistent tangent modulus)이 필요하며, 적분과정과 일치하는 방법으로 결정되어야 한다.⁽¹¹⁾ 접선강성행렬은 (n+1)번째 스텝에서의 전변형의 변분에 의해 야기된 응력 변화의 선형화로 정의되고 (n+1)번째 스텝에서의 소성일치조건(plasticity consistency condition)을 만족하여야 하며, 식 (20)과 같이 표현된다.

$$C = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1}} \quad (20)$$

본 연구에서는 Zhang,⁽¹⁹⁾ Govindarajan⁽²⁰⁾ 및 윤삼손 등⁽¹³⁾이 적용한 방법과 동일한 과정으로 통합형 점소성 모델에 대한 접선강성행렬을 유도하였으며, 그 결과는 다음 식과 같다.

$$c = 2G \frac{\sigma_r}{\sigma_r'} J + \left(K - \frac{2}{3} G \frac{\sigma_r}{\sigma_r'} - 3K' C_{11} \right) I \otimes I \quad (21)$$

$$-6GK_{11} N \otimes N - 2GK_{12} I \otimes N + \left(\frac{4G^2}{\sigma_r'} \Delta \epsilon_{rr} - 4G^2 C_{22} \right) N \otimes I$$

이 때, C 행렬은 식 (18)-(19)를 중간점 (n+θ) 에서 Δε_{rr}^p 와 Δε_{rr}^m 에 대해 식 (22)의 관계를 이용하여 편미분을 취한 뒤 행렬연산을 통해 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \sigma_{n+\theta}}{\partial \epsilon_{n+1}} = \frac{\partial \sigma_{n+\theta}}{\partial \epsilon_{n+\theta}} \frac{\partial \epsilon_{n+\theta}}{\partial \epsilon_{n+1}} = \theta \frac{\partial \sigma_{n+\theta}}{\partial \epsilon_{n+\theta}} \quad (22)$$

식 (21)의 접선강성행렬은 von Mises 항복 함수에 내연적 오일러법(backward Euler method)을 적용한 경우와 달리 비대칭행렬(asymmetric matrix)이다. 비대칭 접선강성행렬의 사용은 계산시간 및 비용의 증가를 가져올 수 있다. 접선강성행렬의 대칭 부분으로 근사화시킨 경우 수렴속도에만 영향을 미칠 뿐 해의 정확도에는 영향이 없으므로 본 연구에서는 대칭 접선강성행렬을 사용하였다.⁽³⁾

3.3 ABAQUS와의 연결

Fig. 2 는 ABAQUS 와 UMAT 의 연결과 UMAT 의 수치계산 절차를 나타낸 흐름도이다. 작성된 프로그램은 ABAQUS⁽¹⁰⁾로부터 변형경사행렬(deformation gradient tensor), 변형률 증분, 온도 증분 등을 넘겨 받은 후 이에 해당하는 응력 및 강성행렬을 계산하여 ABAQUS 에 넘겨주는 역할을 수행한다.

처음 예측한 탄성예측이 해가 되는 경우, 즉 탄

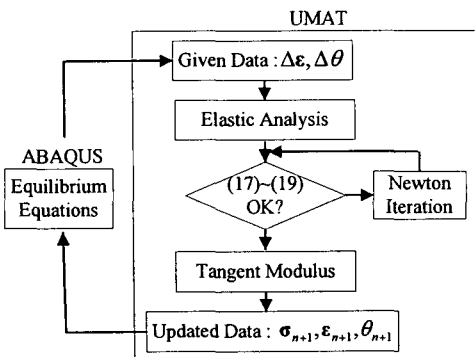


Fig. 2 General algorithmic scheme for incrementally objective algorithms

성변형만 생기는 경우에는 계산된 응력값과 접선강성행렬을 계산하여 ABAQUS 로 넘겨주고(elastic predictor), 소성변형이 생기는 경우에는 소성일치 조건을 만족시키기 위하여 식 (17)-(19)의 비선형 연립방정식을 Newton-Raphson 법을 이용하여 해를 구하게 된다(predictor corrector). ABAQUS 는 UMAT 으로 받은 데이터로부터 평형방정식을 계산하게 된다.

3.4 단위격자모델

Fig. 3 은 본 연구에서 고려한 단위격자 모델의 기하학적 모양 및 유한요소 격자를 나타낸다. 이때 y 축에 대한 축대칭과 x 축에 대한 대칭조건으로부터 전체 단면의 1/4 만 해석하였다. 단위격자 모델은 주기 조건(periodic condition)에 의하여 상부 경계면 및 측면 경계면이 각각 같은 양의 변위를 가지게 되며, 변형중 응력삼축성은 일정하게 유지된다. 이때 결합의 초기 부피분율은 다음 과 같이 주어진다.

$$f_0 = \frac{2}{3} \left(\frac{r_0}{R_0} \right)^3, \quad (23)$$

단위격자 모델에서 축대칭 조건의 경우 유효 응력 및 정수압 응력은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Sigma_{eq} = |\Sigma_{33} - \Sigma_{11}|, \quad \Sigma_h = \frac{(2\Sigma_{11} + \Sigma_{33})}{3} \quad (24)$$

응력삼축성은 유효응력에 대한 정수압의 비로 정의된다.

$$T = \frac{\Sigma_h}{\Sigma_{eq}} \quad (25)$$

또한 축방향 변형률은 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$E_{11} = E_{22} = \ln \left(\frac{R}{R_0} \right), \quad E_{33} = \ln \left(\frac{L}{L_0} \right) \quad (26)$$

체적변형은 오직 탄성변형으로부터 생긴다고 가

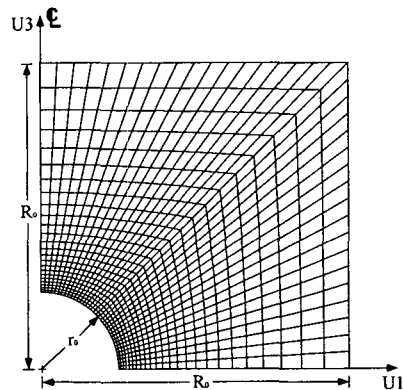


Fig. 3 Finite element mesh for unit cell analysis for f₀=0.0104

정하면 현재 결함의 파괴분율은 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽¹⁴⁾

$$f = 1 - (1 - f_0) \frac{V_0}{V} \left(1 + \frac{3(1 - 2\nu)}{E} \Sigma_h \right) \quad (27)$$

4. 수치해석

4.1 단일요소해석을 통한 신뢰성 평가

본 연구에서는 앞장에서 기술한 구성방정식의 수치적분 알고리즘을 Suquet and Michel⁽³⁾이 제안한 통합형 점소성 구성식에 적용하여 ABAQUS의 사용자정의 서브루틴 UMAT으로 구현하였다. 개발된 프로그램의 수치적 정확도를 검증하고, 적용된

모델의 재료거동 예측능력을 평가하기 위해 단일 요소를 사용하여 결함이 존재하지 않는 재료에 대한 단순압축 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 Fe-2%Si의 모재응력합수와 재료물성치는 참고문헌 (1)과 (20)에서 인용하였으며 Table 1에 나타내었다. 해석시 중간값(θ)은 0, 0.5, 1.0의 값을 사용하고, 1 (sec), 2 (sec), 5 (sec)의 시간증분을 사용하여 θ 값과 시간증분이 해석에 미치는 영향을 비교하였다. 여기서 온도와 변형률 속도는 각각 800 °C와 0.1 (/sec)로 고정하였다.

Fig. 4는 $\theta=1$, 즉 내연적 적분법을 사용할 경우 시간 증분에 따른 응력-변형률 곡선을 나타낸 것으로 시간 증분이 작아질수록 실제 인장 곡선에 점점 가까이 접근하는 경향을 나타낸다. 그러나 해석시 고정된 시간증분을 사용할 경우는 탄성-소성 천이 영역에서 큰 오차를 나타낸다. 이것은 고온에서 재료의 연성(ductility)이 증가하는 것과 동시에 포화응력(saturation stress)에 빨리 도달하게 되므로 탄소성 천이 영역이 매우 작기 때문이다.

Fig. 5는 고정된 시간증분 (0.5 sec)을 사용한 경우와 ABAQUS의 자동시간 옵션 (*AUTOMATIC TIME INCREMENT)을 사용한 경우를 비교한 것이다. 자동시간 옵션 사용시 해석에는 모두 17개의 시간 증분이 사용되었으며 탄성-소성천이 영역에서는 고정된 시간증분을 사용한 경우보다 실제 인장 곡선을 잘 예측함을 알 수 있다.

Table 1 Material properties for Fe-2%Si^(1,20)

Material Parameter	Value	Material Parameter	Value
A (/sec)	10 ¹²	a	1.6
\bar{g} (MPa)	31.98	m	0.1541
h ₀ (MPa)	1324	n	0.01474
Q (kJ/mol)	324.51		

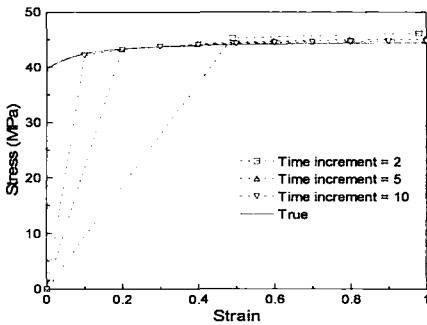


Fig. 4 Comparison of stress - strain curves between different time increments when $\theta = 1$

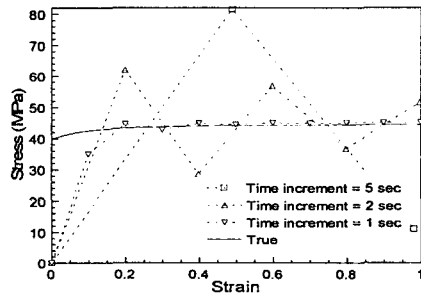


Fig. 6 Comparison of stress - strain curves between different time increments when $\theta = 0.5$

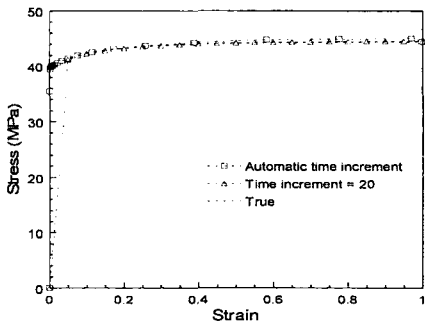


Fig. 5 Comparison of stress - strain curves between automatic time increment and fixed time increment when $\theta = 1$

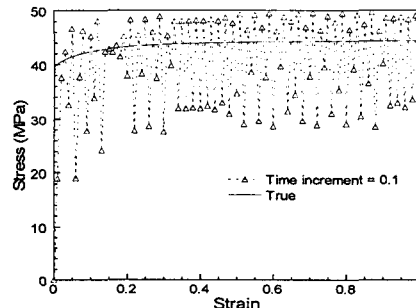


Fig. 7 Stress - strain curve when $\theta = 0$

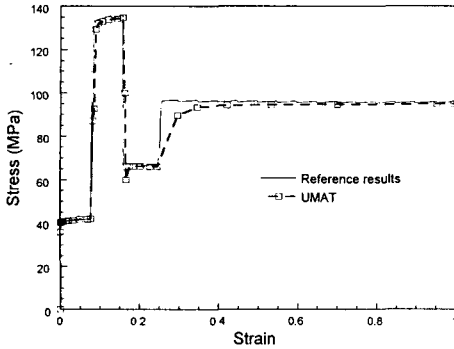


Fig. 8 Stress - strain curves for strain rate jump test when $\theta = 1$

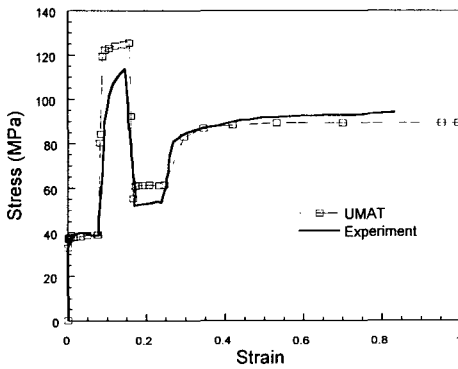


Fig. 9 Comparison between the FEM and experimental results for the strain rate jump test

Fig. 6 은 semi-implicit 적분법을 사용할 경우 시간 증분에 따른 응력-변형률 곡선을 타나낸 것으로 시간 증분의 크기가 증가할수록 오차가 크게 증가하는 것을 알 수 있다. 또한 시간 증분에 따라 오차의 부호가 변하더라도 중간값은 실제해와 일치하는 것을 확인할 수 있다. 일반적으로 탄성-소성 천이구간이나 소성변형률 속도의 변화가 큰 구간에서는 semi-implicit 적분법이 내연적 적분법보다 오차가 작다고 알려져 있으나⁽⁶⁾, 여기에서는 주어진 시간 증분이 탄성 - 소성 천이구간을 지나 존재하기 때문에 확인할 수는 없었다.

Fig. 7 은 외연적 적분법을 사용한 경우의 응력-변형률 곡선을 나타낸 그림이다. 시간 증분이 0.1 (sec)로 앞의 해석들보다 매우 작지만 큰 오차의 진동이 발생하였다. 또한 0.5 (sec)의 시간 증분이 사용된 경우는 계산이 발산하여 수렴하지 않았다.

Fig. 4 ~ 7 의 결과로부터 재료의 포화응력에 빨리 도달하는 연성이 큰 재료의 고온 비탄성 거동 해석에는 내연적 적분법이 자동시간증분 알고리즘과 함께 사용될 경우 효율적이고 안정적인 해석결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 8 은 압축시험 중 변형률 속도가 변하는 변형률속도 점프해석을 내연적 적분법을 이용하여 해석한 결과이다. 변형률 속도를 0.001 (/sec), 1.0 (/sec), 0.01 (/sec), 0.1 (/sec)로 차례로 변화시켜 개발된 코드가 속도민감성을 반영하는지 확인해보았고 실험치⁽¹⁷⁾와 비교하여 적용된 모델이 재료의 속도민감성을 잘 반영함을 확인하였다.

개발된 코드를 사용하여 계산을 수행시 압축해석과 변형률속도 점프해석시 각각 16 개와 35 개의 시간증분이 사용되었으며, 수치적인 기준해 (reference solution)는 시간증분을 1000 개로 고정하여 해석하였다. 이 때, 소성변형률이 0.01 (/sec)에서 0.1 (/sec)으로 증가하는 부분에서 오차가 가장 크게 나타나는데 이것은 소성변형률 속도가 갑자기 증가함으로 써 나타나는 오차로 볼 수 있다. 그 외의 부분에는 실제 인장곡선과 0.1% 이내의 오차만 보이므로 개발된 UMAT 프로그램이 수치적 정확성을 가지는 것을 확인하였다. 또한 Fig. 9 는 결함의 초기부피분율이 0.0437 일 때 유한요소해석 결과와 실험결과를 비교한 것으로써, 변형률 속도에 대한 재료거동을 잘 예측함을 알 수 있다.

이와 같이 압축해석과 변형률점프 해석을 수행하여 이를 수치적인 기준해와 비교하여 개발된 UMAT 의 수치적 정확성을 확인할 수 있었고, 또한 해석결과와 실험결과와의 비교로부터 본 연구에서 채택한 점소성 모델이 재료의 거동을 잘 예측함을 확인하였다. 특히 고분자 화합물과 고온에서의 금속의 비탄성 거동은 속도민감성(rate sensitivity)이 매우 강하므로 본 연구에서 적용된 모델은 이러한 재료들의 비탄성거동을 예측하는데 유용하게 적용될 수 있다.

4.2 단위격자모델을 통한 재료손상해석

격자 모델에 일정한 응력삼축성을 유지하기 위하여 ABAQUS 의 사용자 정의 요소(user-defined element) UEL 과 DLOAD 를 사용하였다. 사용자 정의 요소(user-defined element)는 두 개의 노드로 이루어진 스프링 요소(spring element)이며, 가상노드에서의 변위 또는 변형률 속도가 주어지면 격자 모델의 상부 경계면에 같은 크기의 변위 또는 변형률 속도를 부가한다. 스프링 상수값이 너무 클 경우 전체 강성 행렬이 불량조건(ill-condition)을 가지므로 좋지 않고, 너무 작은 경우 스프링에 저장된 탄성 에너지가 해에 영향을 줄 수 있다.⁽¹⁵⁾ 본 연구에서는 모델 재료의 탄성계수의 약 100 배의 값을 스프링 상수로 사용하였다. 또한 DLOAD 는 상부 경계면에 변형이 발생할 때 일정한 응력삼축성을 유지하기 위하여 측면 경계면에 식 (24)에 따른 압력을 가하게 된다. 또한 격자 모델의 주기 조건을 만족시키기 위하여 상부와 측면의 경계면은 MPC(multi-point constraints)를 이용하여 변형

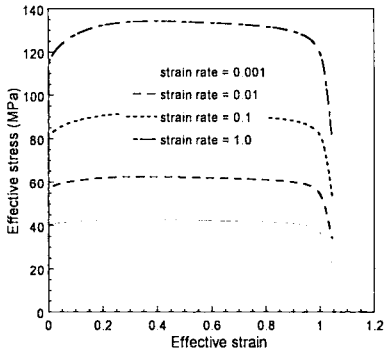


Fig. 10 Stress - strain curves with various strain rate under the conditions of stress triaxiality $T=1$ at 800°C

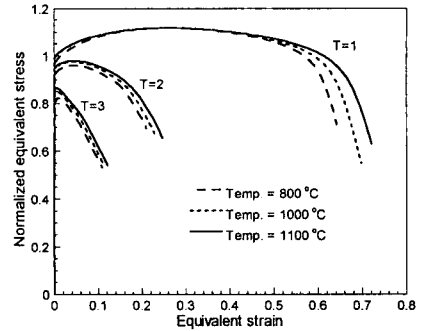
중 일정하게 유지되었다.

단위격자모델 해석시 변형 국소화(strain localization)현상이 발생하므로 요소의 선택이나 수가 해석에 큰 영향을 끼치게 된다. 본 연구에서는 Brocks⁽¹⁶⁾가 제안했듯이 4 절점 축대칭 하이브리드 요소 (CAX4H element) 를 사용하였으며, 변형중 격자(mesh) 의존도를 최소화하기 위하여 864 개의 요소를 사용하였다. 구성식의 적분은 앞 절의 결과로부터 내연적 적분법을 ABAQUS 의 자동 시간증분 알고리즘과 연계하여 이루어졌다.

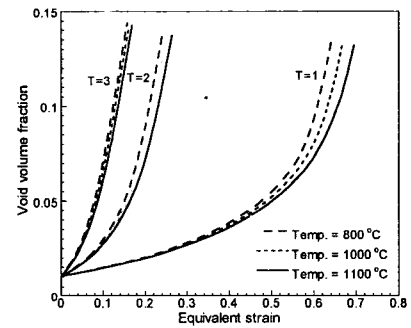
온도와 변형률 속도가 결합의 성장 및 결합에 미치는 영향을 조사하기 위하여 각각, 800°C , 900°C , 1000°C , 1100°C 와 $0.001(\text{sec})$, $0.01(\text{sec})$, $0.1(\text{sec})$, $1.0(\text{sec})$ 의 다양한 조건을 사용하였다. 또한, 초기 결합의 부피분율에 따른 영향을 알아보기 위하여 초기 부피분율을 0.000163 , 0.0013 , 0.0104 로 변화시켰다. 일반적으로 결합의 성장은 응력삼축성에 크게 영향을 받는다. 일축인장의 경우 응력삼축성은 약 $1/3$ 의 값을 가지며, 노치가 있는 시편은 1 , 구속조건이 강한 균열끝(crack-tip)의 경우는 약 3 의 값을 가지므로 본 연구에서는 응력삼축성이 각각 $1, 2, 3$ 의 값을 가질 때 결합의 성장속도에 대한 영향을 조사하였다.

Fig. 10 은 초기 결합의 부피분율이 0.0013 이고 응력 삼축성을 1 로 일정하게 유지시킬 때의 변형률 속도에 따른 응력-변형률 곡선이다. 변형률 속도가 증가함에 따라 전체적인 유효 응력도 증가하고 변형경화의 상승률도 증가함을 알 수 있다.

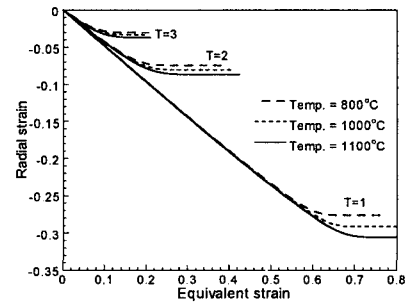
응력 - 변형률 곡선에서 급격한 기울기 변화가 일어나는 지점은 결합들 간의 합체(coalescence)가 일어나 재료의 하중지지능력이 급격히 감소되는 곳이라 볼 수 있다. 그러나 재료의 하중지지능력이 붕괴되는 파손지점에 이를 때까지의 변형률은 변형률 속도와 무관하게 거의 일정함을 알 수 있다. 이후 해석은 특별한 언급이 없는 한 변형률



(a)



(b)



(c)

Fig. 11 Cell model results for various stress triaxiality and temperature. (a) Effective strain-normalized effective stress curves. (b) Effective strain - defect volume fraction curves. (c) Effective strain - radial strain curves

속도를 $1.0/\text{sec}$ 로 고정하고 해석하였다.

Fig. 11(a)는 초기 결합의 부피분율이 0.0104 일 때 응력삼축성과 온도에 따른 응력 - 변형률 곡선을 보여준다. 응력삼축성이 감소할수록 온도가 증가할수록 파손에 이르는 변형률과 최대응력 또한 증가하는 것을 알 수 있다. 또한 응력삼축성이 증가할수록 온도가 결합의 성장에 미치는 영향은 거의 없음을 알 수 있다.

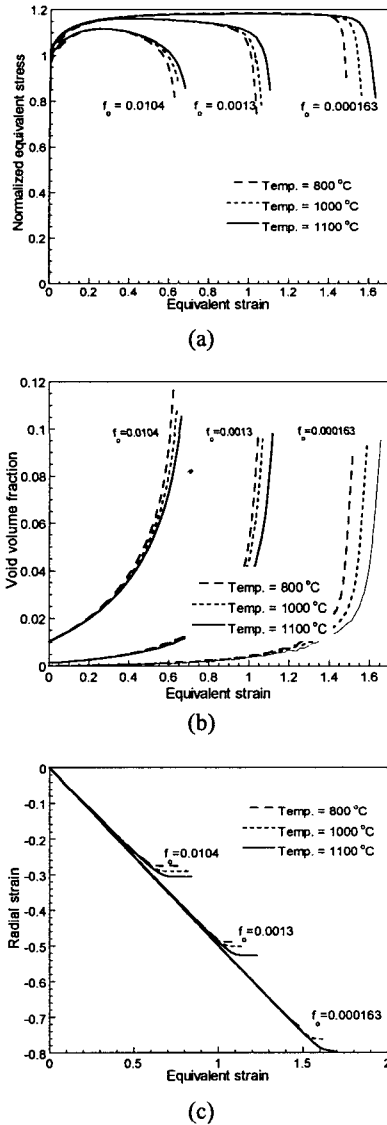


Fig. 12 Cell model results for various initial void volume fraction and temperature (a) Effective strain - normalized effective stress curves (b) Effective strain - defect volume fraction curves (c) Effective strain - radial strain curves

Fig. 11(b)는 응력 - 결함부피분율 곡선을 보여준다. 응력삼축성이 증가할수록 온도가 감소할수록 결함의 성장(growth)은 증가하고 있다. 즉, 결함이 성장하여 합체(coalescence)가 빨리 일어나는 재료에서 파손이 급격히 일어나는 것을 알 수 있다. 또한 Fig. 11(b)에서와 같이 응력삼축성이 증가할수록 온도의 영향은 감소하는 것을 알 수 있다.

Fig. 11(c)는 변형률 - 반경변형률 곡선을 보여준

다. 유효변형률이 어느 이상되면 반경방향 변형률은 일정한 값을 가지게 되는데, 이것은 결함의 성장이 어느 정도 일어나게 되면 일축방향으로의 변형만 발생하게 되며 결함간의 합체가 급속히 일어나게 되는 것을 의미한다.^(14,15) 또한, 응력삼축성이 증가할수록 온도가 감소할수록 결함간의 합체가 일어나는 변형률이 감소하게 된다.

Fig. 12(a)는 응력삼축성이 1 일 때, 결함의 부피분율과 온도에 따른 응력 - 변형률 곡선이다. 결함의 초기 부피분율이 증가할수록 파손에 도달하는 변형률의 크기는 감소하며 최대 유효응력의 크기 또한 감소하게 된다. 온도가 증가할수록 결함의 합체는 서서히 일어나게 되나 초기 결함의 부피분율이 큰 경우에는 온도에 따른 영향은 적은 것으로 나타난다.

Fig. 12(b)와 (c)에서도 (a)에서와 비슷한 결과를 확인할 수 있다. Fig. 12(b)에서 보듯이 초기 결함의 부피분율이 클수록 온도가 낮을수록 결함의 성장속도는 작아진다. 그러나 결함의 부피분율이 작을수록 그래프의 기울기가 커지므로 급격한 결함의 합체가 일어나는 것을 확인할 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 온도와 변형률속도가 결함의 성장 및 합체에 미치는 영향을 잘 표현할 수 있는 통합형 점소성 구성식의 적분 알고리즘을 수식화하고 ABAQUS의 사용자 정의 서브루틴 UMAT으로 구현하였다. 단순삼축해석으로부터 내연적 오일러법이 ABAQUS의 자동시간증분 알고리즘과 연계되어 사용될 때 효율적이고 안정적인 수치적 분법임을 확인할 수 있었다. 또한 유한 요소 해석 결과와 실험 결과의 비교로부터 선정된 구성식이 고온에서의 재료의 비탄성 거동을 잘 예측함을 알 수 있었다.

한편, 고온에서의 결함의 성장 및 합체에 미치는 온도, 변형률속도, 응력삼축성 및 초기결함의 부피분율의 영향을 조사하기 위하여 단위격자모델 해석을 수행하였다. 단위격자모델 해석으로부터 변형률속도가 증가할수록 유효응력의 크기는 증가하나 결함의 성장에는 거의 영향을 주지 않음을 알 수 있다. 응력삼축성이 증가할수록 온도가 감소할수록 초기결함의 부피분율이 클수록 결함의 성장속도는 감소하는 것을 확인하였다. 그러나 응력삼축성이 증가하거나 초기결함의 부피분율이 큰 경우 결함의 성장 및 결함에 미치는 온도의 영향은 아주 작은 것을 알 수 있다.

참고문헌

- (1) Hui, L., Sunil, S. and Piehler, H. R., 1995, "A Critical Evaluation and Extension of Internal State

- Variables Constitutive Models," *Int. J. Plasticity*, Vol. 11, pp. 331~345.
- (2) Cocks, A. C. F., 1989, "Inelastic Deformation of Porous Materials," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 37, pp. 693~715.
- (3) Michel, J. C. and Suquet, P., 1992, "The Constitutive Law of Nonlinear Viscous and Porous Materials," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 40, pp. 783~812.
- (4) Ortiz, M. and Simo, J. C., 1986, "An Analysis of a New Class of Integration Algorithms for Elasto-Plastic Constitutive Equations," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 23, pp. 353~366.
- (5) Ortiz, M. and Popov, E. P., 1985, "Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 21, pp. 1561.
- (6) Hughes, T. J. R. and Winget, J., 1980, "Finite Rotation Effects in Numerical Integration of Rate Constitutive Equations Arising in Large-Deformation Analysis," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 15, pp. 1862.
- (7) Nagtegaal, J. C., 1982, "On the Implementation of Inelastic Constitutive Equations with Special Reference to Large Deformation Problems," *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 33, pp. 469.
- (8) Lush, A. M., Weber, G. and Anand, L., 1989, "An Implicit Time-Integration Procedure for a Set of Internal Variable Constitutive Equations for Isotropic Elasto-Viscoplasticity," *Int. J. Plasticity*, Vol. 5, pp. 521~549.
- (9) Honberger, K. and Stamm, H., 1989, "An Implicit Integration Algorithm with a Projection Method for Viscoplastic Constitutive Equations," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 28, pp. 2397.
- (10) ABAQUS, User's manual I and II, 2003, Hibbit, Karlsson, and Sorensen, USA.
- (11) Simo, J. C. and Hughes, T. J. R., 1997, *Computational Inelasticity*, Springer
- (12) Aravas, N., 1987, "On the Numerical Integration of a Class of Pressure-Dependent Plasticity Models," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 24, pp. 1395~1416.
- (13) Zavaliangos, A., Anand, L. and von Turkovich, B. F., 1991, "Towards a Capability for Predicting the Formation of Defects During Bulk Deformation Processing," *Annals of CIRP*, Vol. 40, pp. 267~271
- (14) Needleman, A. and Rice, J. R., 1980, "Void growth in an Elastic-Plastic Medium," *J. Appl. Mech.*, Vol. 41, pp. 964~970.
- (15) Koplik, J. and Needleman, A., 1988, "Void growth and Coalescence in Porous Plastic Solids," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 24, pp. 835~853.
- (16) Brocks, W., Sun, D. -Z. and Honig, A., 1995, "Verification of the Transferability of Micromechanical Parameters by Cell Model Calculations with Visco-Plastic Materials," *Int. J. Plasticity*, Vol. 11, pp. 971~989.
- (17) S. S. Youn, S. B. Lee, J. B. Kim, H. Y. Lee and B. Yoo, 2000, "Generalization of Integration Methods for Complex Inelastic Constitutive Equations with State Variables," *Transactions of KSME(A)*, Vol. 24, No. 5, pp. 1075 ~1082.
- (18) Zhang, Z. L., 1995, "On the Accuracy of Numerical Integration Algorithms for Gurson-Based Pressure-Dependent Elastoplastic models," *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 121, pp. 15~28.
- (19) Zhang, Z. L., 1995, "Explicit Consistent Tangent Moduli with a Return Mapping Algorithms for Pressure-Dependent Elastoplastic Constitutive Models," *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 121, pp. 29~44.
- (20) Govindarajan, R. M., 1992, *Deformation Processing of Porous Metals*, Doctorial thesis, University of Pennsylvania, U. S. A.
- (21) Haggi, M., 1992, *Elasto-Viscoplasticity of Porous Metals at Elevated Temperatures*, Doctorial thesis, M. I. T, U. S. A.
- (22) Wilkins, M. L., 1964, "Calculation of Elastic-Plastic Flow," in *Methods of Computational Physics*, Vol. 3, (ed. Alder, B., Fernbach, S. and Rotenberg, M), Academic Press, New York.