〈 논문 〉

# 성능지표 선정을 통한 강인한 칼만필터 설계

정 종 철* · 허 건 수†

(2004 년 6 월 29 일 접수, 2004 년 12 월 6 일 심사완료)

# Robust Kalman Filter Design via Selecting Performance Indices

Jongchul Jung and Kunsoo Huh

**Key Words :** Kalman Filter(칼만필터), Robustness(강인성), Condition Number, Performance Index(성능지표), Optimization(최적화)

**Abstract**

In this paper, a robust stationary Kalman filter is designed by minimizing selected performance indices so that it is less sensitive to uncertainties. The uncertainties include not only stochastic factors such as process noise and measurement noise, but also deterministic factors such as unknown initial estimation error, modeling error and sensing bias. To reduce the effect on the uncertainties, three performance indices that should be minimized are selected based on the quantitative error analysis to both the deterministic and the stochastic uncertainties. The selected indices are the size of the observer gain, the condition number of the observer matrix, and the estimation error variance. The observer gain is obtained by optimally solving the multi-objectives optimization problem that minimizes the indices. The robustness of the proposed filter is demonstrated through the comparison with the standard Kalman filter.

## 1. 서 론

확률적인 시스템에서 상태변수를 추정하는 대표적인 관측기는 칼만필터[1]이다. 칼만필터는 프로세스와 측정 신호에 가우시안 노이즈가 존재할 때 추정오차 분산을 최소화시켜주는 최적 필터이다. 그러나 시스템에 불확실 요소가 존재한다면 칼만필터는 과도상태 혹은 정상상태에서 추정 성능의 저하를 초래할 수 있다. 즉, 칼만필터는 정확한 모델에 대하여 프로세스와 측정 신호에 백색잡음이 존재한다는 가정하에서 설계되기 때문에 다른 불확실 요소가 존재한다면 그 성능은 저하될 수 있다. 이러한 불확실 요소는 임의의 초기 추정오차, 라운드오프오차, 모델링오차나 센싱편차 등의 확정적인 성분과 Non-Gaussian 잡음이나 상호분산행렬 값의 불확실성 등의 확률적 성분으로 구분할 수 있다. 따라서, 칼만필터 설계시 이러한 불확실 요소에 강인한 설계 방식이 필요하다.

이러한 문제를 해결하고자 칼만필터의 강인성에 관한 다양한 연구가 진행되었다. 확정적 불확실 요소에 대한 강인성 연구에서는 오차 분산의 상한값을 보장해주는 guaranteed cost 설계 방식[2~9]과 set-valued 접근 방법[10~12]이 있다. guaranteed cost 설계 방식은 설계 관점에 따라 크게 세 가지로 분류해 볼 수 있다. 첫째, 외란으로부터 추정오차의 $H_\infty$-norm을 구속조건으로 추가하여 오차 분산의 상한값의 크기를 보장해주는 mixed $H_2/H_\infty$ 설계 방법이다.[2~4] 둘째, 설계 파라미터를 도입하여 오차 분산의 상한값을 최소화시켜주는 파라미터를 찾는 방식이다.[5~7] 셋째, polytopic 불확실 요소에 대하여 LMI solver를 이용하여 오차 분산의 상한값을 최소화시키는 방법이다.[8,9] Set-valued 접근 방법[10~12]은 주어진 입출력 데이터로부터 이와 일치하는 상태변수의 집합을 구하는 모델 validation 기법이다. 이러한 집합은 상태 공간에서 타원 형태의 집합으로 나타난다. 특히, Savkin and Petersen[12]은 불확실 요소가 IQC (integral quadratic constraints) 형태의 불확실 요소가 존재하는 시스템에서 이 기법을 확장시키는 연구를 수행하였다. 그러나 이러한 방법은 불확실 요소에 대한 사전 정보를 요구하는데, 예

* 한양대학교 대학원 정밀기계공학과
† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : khuh2@hanyang.ac.kr
TEL : (02)2290-0437 FAX : (02)2295-4584

를 들면, 불확실 요소가 norm-bounded, convex-bounded 또는 IQC 형태로 가정하여 강인한 칼만필터를 설계하는 방식이다. 이러한 가정은 불확실 요소를 다루는데 한계가 있다. 확률적 불확실 요소에 대한 강인성 연구에서는 프로세스 노이즈가 non-Gaussian 일때 불확실 요소 자체를 외란관측기를 이용하여 그 값을 추정하거나[13] 노이즈의 상호잡음행렬 자체를 추정하여[14,15] 칼만필터의 강인성을 향상시키는 방법도 연구되었다.

성능지표를 이용한 설계 방법으로 칼만필터의 강인성을 보장하기 위하여 Lee[16]는 싱글 출력 2차 시스템에서 프로세스 노이즈 상호분산과 측정 노이즈 상호분산의 비를 칼만필터의 강인성 향상을 위한 설계지표로 선정하여, 불확실 요소에 대한 영향을 감소시킬 수 있는 방법을 제시하였다. 이를 바탕으로 Jung and Huh[17]는 2차 시스템에서의 강인한 칼만필터의 설계 방법을 제시하였다. 그러나 관측기의 수렴속도, condition number나 관측기 게인의 크기 등의 칼만필터 성능과 관계되는 지표들은 서로 상충될 수 있기 때문에 condition number만을 설계지표로 하여 설계한다면 모든 불확실 요소에 대한 강인성을 보장할 수 없게 된다.

본 논문에서는 불확실 시스템에서 강인한 칼만필터의 설계 방법을 제시하고자 한다. 먼저, 불확실 요소를 확정적 성분과 확률적 성분으로 분류하고 각각에 대한 추정오차 분석을 통하여 성능오차를 줄여줄 수 있는 성능지표를 선정한다. 이 성능지표를 강인한 칼만필터를 위한 목적함수로 선정하고 최적화 기법을 통해 최적의 칼만필터 게인을 구한다. 상세히 언급하면, 각각의 불확실 요소에 대한 오차 분석을 통하여 성능지표로서 관측기 행렬의 condition number, 관측기 게인의 크기, 추정오차 분산으로 선정하였다. 또한 이러한 지표를 목적함수로 선정하였고, 칼만필터의 안정성을 보장해주는 리카티 부등식을 구속조건으로 하는 최적화 문제를 풀어 불확실 요소에 강인한 칼만필터를 설계하는 방법을 제시하였다. 본 논문에서 제시하는 방법은 불확실 요소의 구조에 대한 사전정보를 필요로 하지 않기 때문에 더 폭넓은 시스템에 적용할 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서 강인한 칼만필터 설계를 위한 성능지표를 구하였고, 3장에서 강인한 칼만필터 설계 방법을 제시하였으며, 4장에서 예제를 통하여 그 성능을 검증하였다.

## 2. 강인한 칼만필터를 위한 성능지표

### 2.1 Problem statement

다음과 같은 선형 시불변 시스템을 가정한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A+\Delta A)x + (B+\Delta B)u + Gw \\ y &= (C+\Delta C)x + v \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, $x\in\Re^n$는 상태변수, $y\in\Re^l$은 출력변수이다. $\Delta A$, $\Delta B$, $\Delta C$는 모델링오차이고, $w$와 $v$는 영평균 백색잡음이며, 그 상호분산은 각각 $Q_p$와 $R_p$로 가정한다. 또한 다음과 같이 입출력 측정시 센싱 편차가 존재한다고 가정한다.

$$\begin{aligned} u' &= u + \delta u \\ y' &= y + \delta y \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 $\delta u$와 $\delta y$는 각각 입력과 출력에서의 정적 센싱 편차이다. 즉, 불확실성으로서 확정적 성분의 모델링오차와 센싱편차가 존재하고, 확률적 성분의 프로세스 노이즈와 센싱 노이즈가 존재한다.

식 (1)에서의 모델링오차가 없는 nominal 플랜트와 식 (2)의 측정값에 대한 칼만필터는 다음과 같이 설계될 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu' + L(y' - C\hat{x}) \\ &= (A - LC)\hat{x} + Bu' + Ly' \end{aligned} \tag{3}$$

식 (1)에서 식 (3)를 빼면 오차방정식을 식 (4)와 같이 구할 수 있다.

$$\dot{e} = (A - LC)e + \Phi + \Psi \tag{4}$$

여기서,

$$\begin{aligned} e &= x - \hat{x} \\ \Phi &= \Delta A x + \Delta B u - L\Delta C x - B\delta u - L\delta y \\ \Psi &= Gw - Lv \end{aligned}$$

이며, 각각 추정오차, 확정적 불확실 요소인 모델링오차와 센싱편차에 의해 발생되는 오차항과 확률적 노이즈로 인해 발생되는 오차항이다. 즉, 확정적 불확실 요소인, 모델링오차와 센싱편차가 없다면 $\Phi$=0이며 확률적 노이즈가 없다면 $\Psi$=0이다.

### 2.2 확정적 관점에서의 성능지표

초기 추정오차, 모델링오차나 센싱편차 등의 확정적 불확실 요소가 존재할 때, 추정오차에 대한 정량적 분석을 통해 오차의 크기를 줄일 수 있는 성능지표를 선정하고자 한다. 첫째, 초기 추정오차에 대한 성능지표를 구하기 위하여 초기 추정오차에 대한 과도상태에서의 오차 형상 민감도를 분석하고 그 값을 줄일 수 있는 성능지표를 선정한다. 둘째, 모델링오차와 센싱편차에 대한 정상상태 오차의 영향을 줄이기 위해 정상상태에서의 오차의 상한값을 줄일 수 있는 성능지표를 선정한다.

2.2.1 과도상태의 오차 형상 민감도 해석

과도상태의 오차 형상에 대한 초기 추정 오차의 영향은 오차 응답의 초기 기울기에 의하여 크게 좌우된다. 즉, 초기 오차 형상은 초기값의 선택에 따라 매우 민감하며 이러한 오차 형상의 민감도는 초기값의 방향에 따라 다음과 같이 결정된다.[18]

$$\sigma_n(A_c) \le \frac{\left\| \dot{e}(t)\,|_{t=0} \right\|_2}{e_0} \le \sigma_1(A_c) \qquad (5)$$

여기서, $A_c$=$A$-$LC$이며, $\sigma_1(\cdot)$과 $\sigma_n(\cdot)$은 각각 최대, 최소 특이값이다.

식 (5)에서 관측기 행렬의 최대 특이값이 크다는 것이 오차 형상의 민감도가 크다는 것을 의미하는 것은 아니지만, 만약 그 값이 작도록 관측기를 설계한다면 상한값이 줄어들기 때문에 초기값에 대한 초기 추정 오차 형상의 민감도를 줄일 수 있어, 과도 상태에서의 오차를 줄일 수 있다.

2.2.2 정상상태에서의 오차 분석

모델링오차와 센싱편차에 대한 추정오차의 영향을 줄이기 위한 성능지표를 선정하고자 한다. 모델링오차와 센싱편차에 대한 영향은 추정오차의 크기에 의해서 파악될 수 있다. 식 (4)의 오차방정식에서 확률적 노이즈에 의한 성분을 제거하고 정상상태에서의 오차를 고려하기 위해 시간에 대한 미분 항을 무시한다. 또한, 관측기 행렬 ($A$-$LC$)의 역행렬이 존재한다고 가정하면 정상상태 오차는 다음과 같다.[18]

$$e_{ss} = -(A - LC)^{-1}\Phi$$

양변에 $L_2$-norm을 적용하면, 오차의 크기에 대한 상한값은 식 (6)으로 표현된다[18].

$$\| e_{ss} \|_2 = \| (A-LC)^{-1} \cdot \Phi \|_2 \le \frac{1}{\sigma_n(A_c)} \cdot \| \Phi \|_2 \qquad (6)$$

여기서, $\Phi = \Delta A x + \Delta B u - L\Delta C x - B\delta u - L\delta y$ . 또한, 출력에서의 모델링오차나 센싱편차의 영향만을 살펴보면, 다음과 같이 상한값이 표현된다.[19]

$$\begin{aligned} \| e_{ss} \|_2 &\le \frac{1}{\sigma_n(A_c)} \cdot \| L\Delta C x + L\delta y \|_2 \\ &\le \frac{1}{\sigma_n(A_c)} \cdot \| L \|_2 \cdot \| \Delta C x + \delta y \|_2 \end{aligned} \qquad (7)$$

식 (6)과 (7)을 종합하면 관측기 게인 $L$이 크거나 관측기 행렬의 최소 특이값이 작다면 모델링오차와 센싱편차에 의한 영향을 증폭시킬 수 있다. 이러한 사실로부터 만약 $L$과 $1/\sigma_n(A_c)$의 크기가 작게 되도록 관측기 게인을 선정할 수 있다면, 오차 크기에 대한 상한값은 줄어들 것이다.

2.2.3 성능지표 선정

확정적 관점의 불확실 요소에 대한 추정 오차에의 영향을 줄이기 위한 성능지표를 선정하고자 한다. 초기 오차에 의한 오차 형상의 민감도 해석과 모델링오차와 센싱편차에 의한 정상상태 오차의 정량적 분석으로부터 $\sigma_1(A_c)$, $\sigma_n(A_c)$과 $L$을 확정적 불확실 요소에 대한 영향을 줄일 수 있는 성능지표로 선정할 수 있다. 또한, $\sigma_1(A_c)$을 최소화 시키고 $\sigma_n(A_c)$을 최대화 시키는 것은 행렬 $A_c$의 condition number를 최소화 시키는 방식을 통해 이룰 수 있으므로 확정적 관점에서는 다음과 같이 성능지표를 선정할 수 있다.

$$\begin{aligned} &Minimize\ \ \kappa_2(A_c) = \sigma_1(A_c)/\sigma_n(A_c) \\ &Minimize\ \ \| L \|_2 \end{aligned}$$

2.3 확률적 관점에서의 성능지표

확률적 관점에서의 불확실 요소는 프로세스와 센싱에서의 non-Gaussian 노이즈 또는 상호분산행렬의 불확실성을 들 수 있다. Sasa[20]는 상호분산행렬에서의 섭동이 있을 때 칼만필터가 일반적인 극점배치기법의 관측기보다 더 좋은 성능을 보인다는 것을 증명하였다. 이를 근거로 본 논문에서는 확률적 관점에서의 성능지표로서 다음과 같이 추정오차 분산을 선정하고자 한다.

$$Minimize\ \ tr(\mathbf{E}[ee^T])$$

여기서 $\mathbf{E}$는 평균값을 의미하며 $tr$은 행렬의 trace이며 $tr(\mathbf{E}[ee^T])$는 오차 분산을 뜻한다.

2.4 칼만필터에서의 성능지표

칼만필터 설계시 프로세스 노이즈와 측정 노이즈의 상호분산 행렬인 $Q$와 $R$이 결정되면 리카티 방정식에 의해서 칼만필터 게인이 결정된다. 이것은 칼만필터의 특성이 결정된다는 의미이다. 즉, 칼만필터 설계시 상호분산행렬인 $Q$와 $R$에 따라 칼만필터의 수렴속도, 관측기 행렬의 condition number와 칼만필터 게인의 크기가 결정된다. 상호분산 행렬인 $Q$와 $R$은 시스템과 센서의 노이즈에 의해서 결정되는 값이지만, 칼만필터 설계시 적절한 수렴속도를 얻기 위해서는 이러한 노이즈 상호분산행렬의 적절한 값이 필요하다.[21]

그러나 앞에서 칼만필터의 강인성 향상을 위해

선정된 성능지표들과 수렴속도는 동일한 상호분산 행렬에 대하여 일반적으로 서로 상충할 수 있기 때문에 칼만필터 설계시 이들간의 trade-off가 요구되며 시스템에 따라 원하는 수렴속도를 얻기 위해서는 칼만필터의 불확실성에 대한 강인성이 현저히 떨어질 수 있다. 따라서 오차 분산만을 최소화시키는 칼만필터의 설계 방법으로는 그 강인성을 보장하지 못하기 때문에 앞에서 언급한 모든 성능지표를 고려하여 설계하는 방법이 필요하다.

## 3. 강인한 칼만필터 설계

2장에서 언급된 성능지표를 바탕으로 불확실성을 포함하는 시스템에서의 강인한 칼만필터를 설계하고자 한다. 이를 위하여 목적함수를 다음과 같이 선정할 수 있다.

1) 추정오차 분산의 최소화
2) 관측기 게인의 크기의 최소화
3) 관측기 행렬의 condition number의 최소화

1)의 조건은 확률적 관점에서의 설계 요소이며, 2)와 3)의 조건은 확정적 불확실성에 대한 강인성을 보장해주는 설계 관점이다. 이 세 가지의 다목적 함수를 구성하여 강인한 칼만필터를 설계하는 방법을 제시하고자 한다.

### 3.1 추정오차 분산의 최소화

확률적 불확실성 요소만 존재할 때, 식 (4)의 오차 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{e} = (A - LC)e + Gw - Lv \tag{8}$$

정상상태 오차의 상호분산 $P$는 다음의 Lyapunov 방정식을 만족한다.

$$(A - LC)P + P(A - LC)^T + GQG^T + LRL^T = 0 \tag{9}$$

여기서, $Q$와 $R$은 각각 칼만필터 설계를 위해 선정된 프로세스 노이즈와 측정 노이즈의 상호분산행렬이다. 또한, Nominal 플랜트를 위하여 설계되는 칼만필터 게인은 식 (10)과 같다.

$$L = PC^T R^{-1} \tag{10}$$

여기서 $P$는 다음의 리카티 방정식을 만족한다.

$$AP + PA^T + GQG^T - PC^T R^{-1} CP = 0 \tag{11}$$

이를 최적화 문제로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\underset{P>0}{Min}\ tr(P) \\ &s.t.\ \ AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + GQG^T < 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Schur complement[22]에 의해 식 (12)는 다음의 LMI (Linear Matrix Inequality) 형태로 변환이 가능하다.

$$\begin{aligned} &\underset{P>0}{Min}\ tr(P) \\ &s.t.\ \begin{bmatrix} AP + PA^T + GQG^T & PC^T \\ CP & R \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \tag{13}$$

### 3.2 관측기 게인의 최소화

식 (10)에서 볼 수 있듯이 관측기 게인의 크기를 줄이는 것은 추정오차의 상호분산의 크기를 줄이는 것과 같으므로 $P$의 최대 고유값을 최소화시키는 것과 같은 결과를 가져온다.[22] 따라서 식 (13)의 리카티 부등식을 구속조건을 포함하며 관측기 게인을 최소화 시키는 최적화 문제를 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\underset{P>0,t>0}{Min}\ t \\ &s.t.\ \ P < tI \\ &\begin{bmatrix} AP + PA^T + GQG^T & PC^T \\ CP & R \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \tag{14}$$

### 3.3 관측기 행렬의 condition number 의 최소화

관측기 행렬 $A_c$의 $L_2$-norm condition number가 다음과 같은 상한값을 갖는다고 가정한다.

$$\kappa_2(A_c) < \gamma \tag{15}$$

칼만필터 게인이 식 (10)과 같으므로 관측기 행렬은 다음과 같다.

$$A_c = A - PC^T R^{-1} C \tag{16}$$

따라서, 관측기 행렬의 condition number를 최소화시키는 최적화 문제는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\underset{P>0,\gamma>1}{Min}\ \gamma \\ &s.t.\ \begin{bmatrix} AP + PA^T + GQG^T & PC^T \\ CP & R \end{bmatrix} < 0 \\ &\kappa_2(A - PC^T R^{-1} C) < \gamma \end{aligned} \tag{17}$$

### 3.4 다목적 함수의 최적화

위에서 제시한 3개의 목적함수는 일반적으로 상충하므로 목적함수간의 trade-off가 필요하다. 또한, 일반적으로 condition number는 작은 값을 요구하며 반드시 최소값일 필요는 없으므로 본 논문에서는 문제를 간단히 하기 위하여 condition number에 관한 목적함수를 구속조건으로 변화시켜 다음의 다목적 함수에 관한 최적화 문제를 구성한다.

$$\begin{aligned} &\underset{P>0,t>0}{Min} \quad w_1 tr(P)+(1-w_1)t \\ &s.t. \quad P<tI \\ &\begin{bmatrix} AP+PA^T+GQG^T & PC^T \\ CP & R \end{bmatrix}<0 \\ &\kappa_2(A-PC^TR^{-1}C)<\gamma \end{aligned} \tag{18}$$

여기서 $w_1 \in [0, 1]$은 두 목적함수 사이의 trade-off를 결정하는 가중치이며, $\gamma$는 1보다 큰 상수이다.

## 4. 예 제

본 논문에서 제시하는 강인한 칼만필터의 성능을 예제를 통해 검증하고자 한다. 즉, 임의의 2차 수학적 모델과 3차 시스템인 레이저 본더 모델에서의 강인한 칼만필터의 성능을 검증하고자 한다. 3.4절에서 제시한 최적화 문제를 풀기 위하여 semidefinite programming에 기반한 LMITOOL Ver. 2.1[23]을 이용하였다.

**Example 1**: A second order system

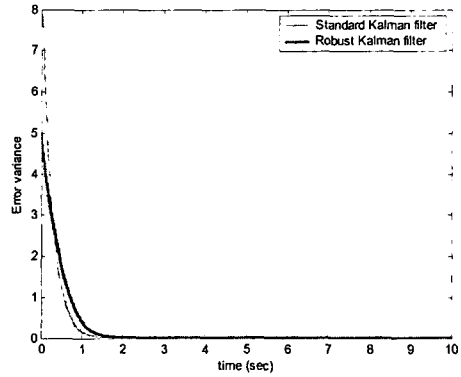
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}w \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x+v \end{aligned}$$

여기서 $w$와 $v$는 영평균 백색잡음이라 가정하였다. 개루프 시스템의 고유값은 $-0.5\pm j1.32$이다. 칼만필터 설계 시 적절한 수렴속도를 위해 시정수 0.5초를 요구한다고 가정한다. 즉, 폐루프 시스템의 고유값이 -2이하가 되도록 하고자 한다. 따라서 이러한 성능 만족을 위해 본 예제에서는 $Q/R$=10000으로 선택하였으며 식 (18)의 $w_1$=0.5, $\gamma$=10으로 선정하였다. 표준 칼만필터 (Standard Kalman Filter, SKF)와 강인한 칼만필터 (Robust Kalman Filter, RKF)의 게인과 condition number는 다음과 같다.

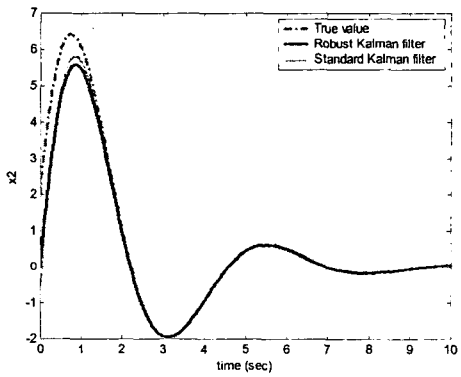
**SKF**: $L=[100.9658 \quad 97.0442]^T$, $\kappa_2(A_c)=100$
$\lambda_i=-2.0008, -99.965$

**RKF**: $L=[3.9706 \quad -0.0025]^T$, $\kappa_2(A_c)=3.3$
$\lambda_i=-2.0286, -2.942$

확정적 불확실 요소인 모델링오차와 센싱편차가 존재하지 않는 경우에 설계된 SKF와 RKF의 추정 성능을 Fig. 1에서 비교하였다. 이 경우는 두 필터의 그 성능이 거의 비슷함을 볼 수 있다.




(a) Error variance




(b) Estimation result of $x_2$

**Fig. 1** Comparison of the SKF and RKF w/o modeling error and sensing bias in example 1

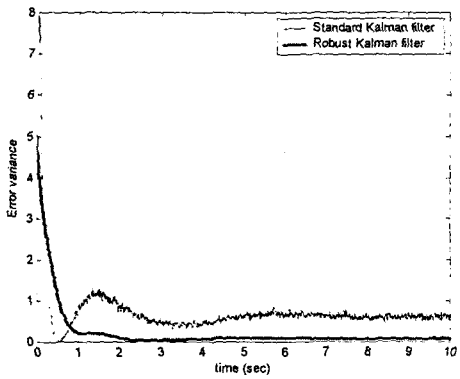
다음과 같은 확률적 요소와 확정적 요소의 불확실성이 시스템에 존재한다고 가정한다.

a) initial estimated error: $e(0)=[-1 \quad 2]^T$
b) modeling error:

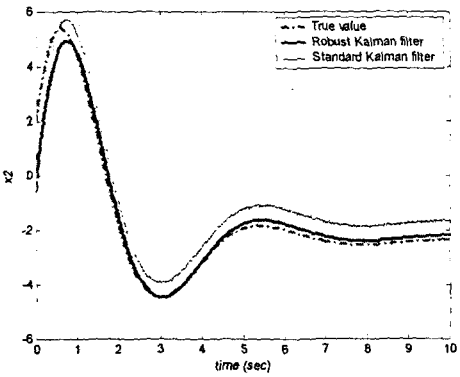
$$\Delta A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad \Delta B=\begin{bmatrix} 0.2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) sensing bias: 5% output sensing bias
d) stochastic noise uncertainties: $Q_p$=$R_p$=0.01

불확실 요소가 존재하는 시스템에서의 SKF와 RKF의 추정 성능을 Fig. 2에서 비교하였다. 결과를 살펴보면 초기 추정오차에 의한 오차 형상이 SKF에서는 바람직하지 않은 형상으로 나타나며 이것은 과도상태에서의 큰 초기 오차를 유발시킨다. 그 이유는 초기오차에 대한 오차형상의 민감도가 크기 때문에 나타나는 현상이다. 또한, RKF에서 모델링오차와 센싱편차에 의한 정상상태에서의 오차 분산의 크기가 SKF에 비하여 약 88% 감소하였고, $x_2$ 추정 오차는 약 77% 감소하였다.

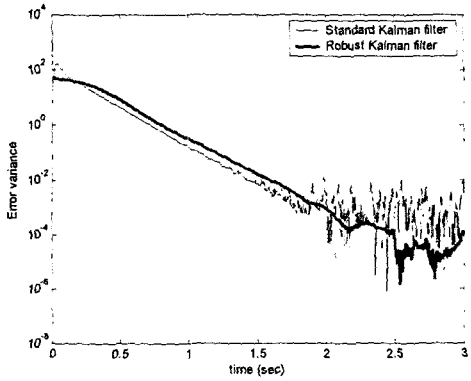



(a) Error variance

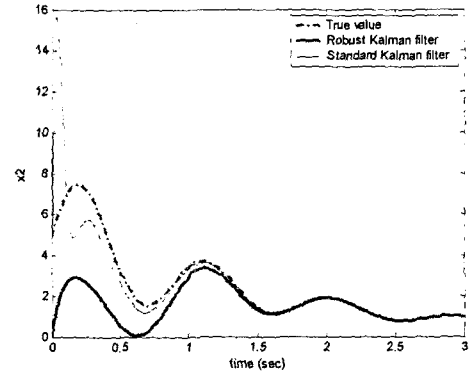



(b) Estimation result of $x_2$

**Fig. 2** Comparison of the SKF and RKF w/ modeling error and sensing bias in example 1




(a) Error variance




(b) Estimation result of $x_2$

**Fig. 3** Comparison of the SKF and RKF w/o modeling error and sensing bias in example 2

**Example 2**: Laser bonder model

레이저 본더는 IC 기판의 패드에 IC 칩을 납땜하는 soldering machine이며 본더 헤드는 VCM (voice coil motor)에 의해서 상하 방향으로 구동되며 위치 센서에 의해서 그 수직 위치가 측정된다. 헤드의 속도에 대한 정보는 정밀 위치 제어를 위해 유용하며 속도를 추정하기 위하여 칼만필터를 설계하고자 한다. 모델식은 다음과 같다.[24]

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -11.518 & 0 & 6.702\\ 0 & -5.689 & -2.649\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0.44\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}0\\ 10\\ 1\end{bmatrix}w$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x+v$$

여기서 $w$와 $v$는 영평균 백색잡음이라 가정하였다. 개루프의 고유값은 {-0.6308, -1.0091±j6.8813}이다. 적절한 수렴속도를 위해 시정수 1/3초를 요구한다고 가정한다. 이를 위하여 칼만필터 설계시 $Q$=1, $R$=0.0001을 선택하였다. 설계된 SKF와 RKF의 게인과 이때의 condition number는 각각 다음과 같다.

**SKF**:

$$L=\begin{bmatrix}44.2557\\ 975.2845\\ -148.1096\end{bmatrix},\ \kappa_2(A_c)=1793$$

$$\lambda_i=-3.31,\ -21.79\pm j22.95$$

**RKF**:

$$L=\begin{bmatrix}13.0451\\ 48.4577\\ -55.091\end{bmatrix},\ \kappa_2(A_c)=119.58$$

$$\lambda_i=-3.05,\ -6.32\pm j7.37$$

확정적 불확실 요소인 모델링오차와 센싱편차가 존재하지 않는 경우에 설계된 SKF와 RKF의 추정성능을 Fig. 3에서 비교하였다. 초기 추정오차에 의한 과도상태에서의 오차 형상을 살펴보면, condition number가 크게 설계된 SKF의 결과에서 초기에 바람직하지 않은 방향성을 갖는 것을 볼 수 있는데, 이것은 초기에 큰 과도상태의 오차를 유발시키며, 이는 본 논문에서 제시하는 방법의

타당성을 보여주는 것이다. 정상상태에서는 SKF와 RKF의 추정성능이 거의 유사함을 볼 수 있다.

SKF와 RKF의 불확실 요소에 대한 강인성 정도를 비교하기 위하여 위의 시스템에 다음과 같은 불확실성을 가정한다.

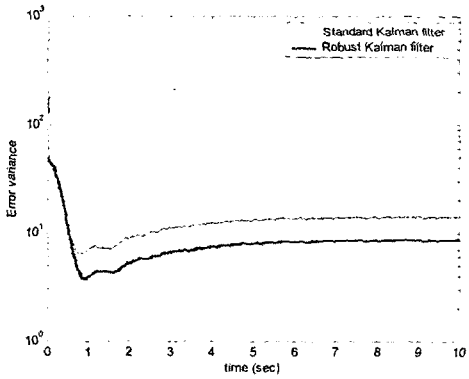
a) initial estimation error: $e(0)=[1 \quad 5 \quad 5]^T$

b) *modeling error*: $\|\Delta A\|_2 \le 1.15$

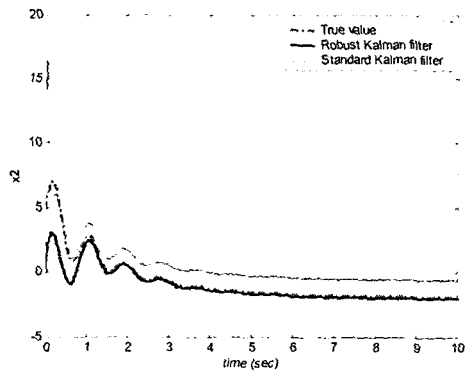
c) sensing bias: 2% output sensing bias

d) stochastic noise uncertainties: $Q_p$=0.001, $R_p$=0.0001

위의 불확실 요소에 대하여 SKF와 RKF의 추정 성능을 Fig. 4에서 비교하였다. 결과를 보면 RKF가 SKF에 비하여 정상상태에서 훨씬 좋은 추정 결과를 보여주는데, 오차 분산의 크기에서 약 41% 감소하였으며, $x_2$ 추정 오차에서는 약 90% 감소하였다. 이것은 시스템에 불확실 요소가 존재한다면 SKF의 추정 성능은 RKF보다 훨씬 더 나빠질 수 있으며 본 논문의 방법에 대한 타당성을 보여준다.




(a) Error variance




(b) Estimation result of $x_2$

**Fig. 4** Comparison of the SKF and RKF w/ modeling error and sensing bias in example 2

## 5. 결 론

불확실성이 존재하는 확률시스템에서 칼만필터의 추정 성능은 저하될 수 있다. 이를 개선하기 위하여 불확실성에 대하여 강인한 칼만필터를 설계하는 방법을 제시하였다. 먼저 시스템에 존재하는 불확실 요소를 확정적 성분과 확률적 성분으로 분류하고 각각에 대한 추정오차 분석을 통하여 성능오차를 줄여줄 수 있는 성능지표를 선정하였다. 이 성능지표를 강인한 칼만필터를 위한 목적함수로 선정하고 최적화 기법을 통해 최적의 강인한 칼만필터를 설계하였다. 상세히 언급하면, 각각의 불확실 요소에 대한 오차 분석을 통하여 성능지표로서 관측기 행렬의 condition number, 관측기 게인의 크기, 추정오차 분산으로 선정하였다. 또한 이러한 지표를 목적함수로 선정하였고, 칼만필터의 안정성을 보장해주는 리카티 부등식을 구속조건으로 하는 최적화 문제를 푸는 방법에 의하여 필터 게인을 구할 수 있었다. 이렇게 설계된 필터는 일반적인 칼만필터에 비하여 시스템의 불확실 요소에 대한 추정 오차에의 영향을 감소시킬 수 있음을 살펴보았다. 결론적으로 본 논문에서 제안된 강인한 칼만필터는 불확실 요소가 존재하는 확률시스템에서 불확실 요소에 대한 강인성을 향상시켜 추정 오차의 성능을 개선시켜준다.

## 후 기

이 논문은 한국과학재단의 목적기초지원사업에 의하여 연구되었음. (No. R01-2003-000-10109-0)

## 참고문헌

(1) Kalman, R. E. and Bucy, R. S., 1961, "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," *Trans. of the ASME Series D: J. of Basic Engineering*, Vol. 83, No. 3, pp. 95~108.

(2) Bernstein, D. S. and Haddad, W. M., 1989, "Steady-State Kalman Filtering with an $H_\infty$ Error Bound," *Systems and Control Letters*, Vol. 12, No. 1, pp. 9~16.

(3) Khargonekar, P. P. and Rotea, M. A., 1992, "Mixed $H_2/H_\infty$ Filtering," *Proc. of the 31st Conference on Decision and Control*, pp. 2299~2304.

(4) Chen, X. and Zhou, K., 2002, "$H_\infty$ Gaussian Filter on Infinite Time Horizon," *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 49, No. 5, pp. 674~679.

(5) Petersen, I. R. and McFarlane, D. C., 1994, "Optimal Guaranteed Cost Control and Filtering for Uncertain Linear Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 39, No. 9, pp. 1971~1977.

(6) Xie, L. and Soh, Y. C., 1994, "Robust Kalman Filtering for Uncertain Systems," *Systems and Control Letters*, Vol. 22, No. 2, pp. 123~129.

(7) Fu, M., de Souza, C. E. and Luo, Z. Q., 2001, "Finite-Horizon Robust Kalman Filter Design," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 49, No. 9, pp. 2103~2112.

(8) Geromel, J. C., 1999, "Optimal Linear Filtering Under Parameter Uncertainty," *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 47, No. 1, pp. 168~175.

(9) Shaked, U., Xie, L. and Soh, Y. C., 2001, "New Approaches to Robust Minimum Variance Filter Design," *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 49, No. 11, pp. 2620~2629.

(10) Bertsekas, D. P. and Rhodes, I. B., 1971, "Recursive State Estimation for a Set-membership Description of Uncertainty," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 16, No. 2, pp. 117~128.

(11) Jain, B. N., 1975, "Guaranteed Error Estimation in Uncertain Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 20, No. 2, pp. 230~232.

(12) Savkin, A. V. and Petersen, I. R., 1995, "Recursive State Estimation for Uncertain Systems with an Integral Quadratic Constraint," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 40, No. 6, pp. 1080~1083.

(13) Kwon, S., Chung, W. K. and Youm, Y., 2003, "A Combined Observer for Robust State Estimation and Kalman Filtering," *Proc. of the American Control Conference*, pp. 2459~2464.

(14) Mehra, R. K., 1970, "On the Identification of Variances and Adaptive Kalman Filtering," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 15, No. 2, pp. 175~184.

(15) Sage, A. P. and Melsa, J. L., 1971, *Estimation Theory with Application to Communications and Control*, McGraw-Hill, Inc.

(16) Lee, B. S., 1997, "Quantitative Performance Comparison of Observers with Uncertainties," M. S. Thesis, Hanyang University, Seoul, Korea.

(17) Jung, J. and Huh, K., 2002, "Design of the Well-Conditioned Observer Using the Non-Normality Measure," *Trans. of the KSME*, A, Vol. 26, No. 6, pp. 1114~1119.

(18) Huh, K. and Stein, J. L., 1994, "A Quantitative Performance Index for Observer-Based Monitoring Systems," *Trans. of the ASME: J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 116, pp. 487~497.

(19) Golub, G. H. and Van Loan, C. F., 1996, *Matrix Computations*, 3rd Ed., The Johns Hopkins University Press.

(20) Sasa, S., 1998, "Robustness of a Kalman Filter Against Uncertainties of Noise Covariances," *Proc. of the American Control Conference*, pp. 2344~2348.

(21) Huh, K., Jung, J. and Stein, J. L., 2001, "Discrete-Time Well-Conditioned State Observer Design and Evaluation," *Trans. of the ASME: J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 123, No. 4, pp. 615~622.

(22) Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V., 1994, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM.

(23) El Ghaoui, L., Delebeque, F. and Nikoukhah, R., 1999, LMITOOL Ver. 2.1, available via anonymous ftp to ftp.ensta.fr, directory pub/elghaoui/lmitool-2.1.

(24) Oishi, J. and Balakrishnan, V., 2000, "Linear Controller Design for the NEC Laser Bonder via Linear Matrix Inequality Optimization," *In Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control* (Edited by El Ghaoui, L. and Niculescu, S.-L.), SIAM, Philadelphia, pp. 295~307.