Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering
Vol, 28, No. 1, pp.114－120, March 2005.

多種類 작업물들이 있는 폐쇄형 대기행렬 네트워크에서의 隘路작업장 검출

유 인 선*

*수원대학교 경영학과

Bottleneck Detection in Closed Queueing Network with Multiple Job Classes

In-Seon Yoo*

*Department of Businesss Administration, The University of Suwon

This paper studies procedures for bottleneck detection in closed queueing networks(CQN's) with multiple job classes. Bottlenecks refer to servers operating at 100% utilization. For CQN's, this can occur as the population sizes approach infinity. Bottleneck detection reduces to a non-linear complementary problem which in important special cases may be interpreted as a Kuhn-Tucker set. Efficient computational procedures are provided.

Keywords : Bottleneck, Product-form, Closed Queueing Network(CQN)

1. 서 론

유연생산시스템(Flexible Manufacturing System), 컴퓨터 시스템 및 통신 네트워크의 성능을 평가하기 위해 모형화할 때 폐쇄형 대기행렬 네트워크(Closed Queueing Network; CQN) 모형은 매우 유용하게 활용되어 왔다. 본 연구는 다종류의 작업물들이 있는 CQN에서의 애로작업장(bottleneck)을 검출하기 위한 절차에 대해 다루기로 한다. 애로작업장이란 100% 이용률로 운용되는 작업장을 의미하며, CQN에서는 모집단(population)의 크기 즉 작업량을 점차적으로 증가시킬 때 발생하게 된다(Pollet, 2000).

이런 작업장들을 검출하기 위해서는 CQN에 관한 평균치 분석(Mean Value Analysis; MVA)을 활용한다. 애로작업장의 검출은 일반적인 비선형 상보문제(nonlinear complementary problem)(Karamardian, 1969)로 구성되어진다. 해를 구하기 위한 효율적인 계산절차는 제4절에서 제시한다. 또한 비선형 상보문제가 경우에 따라 최적화 문제로 구성될 수 있는 데, 이때 얻어진 모집단이 큰 CQN에 대한 결과들은 새로운 것이다.

본 연구에서 다루고자 하는 모형은 미리 정해진 공정절차(routing), 각 작업장마다 일정한(상태독립인) 서비스율, FCFS 서비스원칙 그리고 무한대로 큰 대기장소(waiting room)를 지니고 있는 다종류(multi-classes)의 작업물들이 있는 CQN을 대상으로 한다. 이런 가정들 중에서 현실에 맞도록 완화시키는 문제도 중요하기는 하지만, 하나의 시스템 행태(behavior)의 변화에 따른 애로작업장의 검출도 중요한 것으로 판단된다. 그리고 본 모형은 Pittel(1979)의 것과는 차이가 있는 데, 그는 각 작업장에 유한한 대기장소가 있다고 가정하고 분석하였다. 평균치분석(MVA)에 관련된 식은 Bard(1979)의 식들을 활용하기로 한다.

단종류(single classs)의 작업물들이 있는 CQN에 대해서는 Operational Analysis(Denning외, 1978)를 이용하여 간

단하게 애로작업장을 검출할 수 있다. 본 모형에서는 local balance(Baskett외, 1975) 위한 어떠한 가정도 하지는 않는 데, 승법형(product-form) 네트워크 모형보다는 일반적이지만 증명하기가 어려운 가정들을 활용한다는 어려움이 존재하고 있다.

2. CQN모형

먼저 각 종류의 작업물들이 모두 유한한 작업량(모집단의 크기)인 경우의 관련식을 제시하기로 한다. 이때 어떠한 작업장도 애로작업장이 아니라고 가정한다. 왜냐하면 일반적으로 모든 작업물이 다른 작업장들에 있을 수 있기 때문에 한 작업장이 유휴(idle) 상태일 확률이 존재한다고 가정하기 때문이다. 그러나 작업량을 점차적으로 증가시키면 애로작업장이 발생하는 데, 이런 방식으로 해서 얻어진 결과는 대체로 규모가 큰 유한 모집단들에 대한 개산치(approximation)로 활용될 수가 있다.

M개의 작업장이 있고 작업물의 종류가 R가지인 CQN을 고려하기로 한다. 모든 작업장에는 무한대의 대기장소가 있고 FCFS 서비스원칙을 따른다고 하자. P_r을 종류 r의 작업물에 대한 공정절차(routing) 행렬 (transtion probability matrix)라고 하면, 여기서 종류 r의 작업물이 작업장 i에서 서비스를 완료한 후 작업장 j로 갈 확률 p_{ijr}은 $p_{ijr} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{M} p_{ijr} = 1$ ($r=1,\cdots,R$; $i,j=1,\cdots,M$) 이 성립하며 미리 주어진다고 하자. 이 확률을 이용하면 종류 r의 작업물 하나가 작업장 i를 방문하는 평균 회수 V_{ir}를 구할 수 있다(Bruell, 1980). V_{ir}은

$$V_{ir} = \sum_{j=1}^{M} V_{jr} p_{ijr}, \quad r=1,\cdots,R\ ;\ i=1,\cdots,M$$

인 MR개의 연립방정식의 해이다. 이들 식은 R종류의 작업물 각각에 대해 각 작업장 내외로의 흐름들이 균형을 이룬다는 것을 의미한다. 또한 각 작업장에서의 서비스 시간분포를 정의하지는 않으나, S_{ir}을 작업장 i에서 종류 r 작업물의 평균 서비스 시간이라고 하고 입력모수로써 미리 조사되어 알고 있다고 한다. N_r을 종류 r의 작업물 수라고 할 경우 각 작업물 종류 r에 대해 $N_r \geq 1$이며, 이것 또한 입력모수로 주어져 있다고 하자.

성능평가시 구하고자 하는 성능척도들은 다음과 같다 :

L_{ir}= 작업장 i에서 종류 r 작업물의 평균 작업물 수(시간 평균값)

X_{ir}= 작업장 i에서 종류 r 작업물의 출력율(단위 시간당 작업장 i에서 완성되어 나온 종류 r의 작업물 수)

W_{ir}= 작업장 i에서 종류 r의 작업물이 평균 머무는 시간(대기시간+서비스시간)

으로 모두 3 MR개가 있다.

이들의 관계를 식으로 나타내면, $r=1,\cdots,R$; $i,j=1,\cdots,M$일 때

$$W_{ir} = S_{ir} + \sum_{k=1}^{R} L_{ik}^{(r)} S_{ik} - \varepsilon_{ir} \quad \cdots (1)$$

$$X_{ir} = \frac{V_{ir} N_r}{\sum_{j=1}^{M} V_{jr} W_{jr}} \quad \cdots (2)$$

$$L_{ir} = X_{ir} W_{ir} \text{ (Little의 공식)} \quad \cdots (3)$$

인 총 3 MR개의 식으로 표현된다. 여기서 ε_{ir}은 잔여(residual) 서비스 시간에 관한 수정항이다. 만약 각 작업장의 서비스 시간분포가 지수분포를 한다면, 단일(single) 서버인 경우 이 ε_{ir}항은 없어도 되며, 다중(parallel) 서버인 경우 M/M/S 시스템이 되어 복잡한 식으로 구성되는 데 이에 대해서는 Shalev-Oren외(1985)의 연구에 언급되어 있다.

또한 (1)식의 $L_{ik}^{(r)}$은 종류 r 작업물 하나가 작업장 i에 도착할 경우 그 작업장에 있는 종류 k의 평균 작업물 수이다. 이 $L_{ik}^{(r)}$ 값이 정해지면, 위의 식들에서 유일한 해를 얻을 수 있다. CQN이 승법형 네트워크(Baskett외, 1975)이라면, 잘 알려진 평균치 분석(MVA)에서는 $L_{ik}^{(r)} = L_{ik}(N_1, N_2, \cdots, N_r - 1, \cdots, N_R)$인 도착정리(Reiser, 1980)를 이용하여 위 식들을 유한번 반복해서 해를 구하게 된다. 그러나 이 방법도 각 작업물 종류의 모집단 크기가 크면 실용적일 수 없으며, 게다가 승법형 네트워크가 아니라면 부정확해지므로 개산법(approximation method)를 활용할 수밖에 없게 된다.

Schweitzer(1986)는 다음과 같은 계산식을 제시하였다 :

$$L_{ik}^{(r)} = \begin{cases} L_{ik}, & k \neq r \\ \left(\dfrac{N_r - 1}{N_r}\right) L_{ir}, & k = r \end{cases} \quad \cdots (4)$$

이 식을 이용하면 계산량이 상당히 줄어드는 이점이 있는 데, 왜냐하면 (1), (2), (3)식이 3 MR개의 변수들을 지닌 3 MR개의 식으로부터 $\sum_{j=1}^{M} V_{jr}W_{jr}$ $(r=1,\cdots,R)$과 $\sum_{r=1}^{R} L_{jr}S_{jr}$ $(i=1,\cdots,M)$인 $M+R$개의 변수들을 지닌 $M+R$개의 식으로 줄어들기 때문이다. M개의 단일 서버 작업장으로 구성된 승법형 네트워크의 경우 (4)식을 (1)식에 대입하여 개략적인(approximate) 성능척도를 구하는 평균치분석(MVA)를 'Bard-Schweitzer' 알고리즘(Reiser, 1979)이라고 불리운다. 이 알고리즘의 수렴성(convergence) 에 관한 증명은 단종류의 작업물이 있는 CQN에 대해 Agrawal(1985)이 연구하였는 데, 그 결과는 다종류의 작업물들이 있는 CQN에 대해서도 그대로 확장 적용되어질 수 있다.

그리고 (4)의 개산식은 다음과 같은 정당성을 지니는 것으로 볼 수 있다(Reiser, 1979). $k\neq r$일 때 도착한 종류 k의 작업물은 자기 자신과 다른 작업물 종류에 대해서는 시간평균(time average)한 평균 대기행렬의 길이(queue length)를 보게 된다는 것이다. $k=r$일 때 도착한 종류 k의 작업물은 그 자신이 그와 같은 작업물 종류의 대기행렬 내에 있는 자기 자신을 볼 수 없으므로 $\left(\frac{N_r-1}{N_r}\right)$로 하향 조정된 그 자신의 종류에 대해 시간 평균한 대기행렬의 길이를 보게 된다는 것이다.

3. 애로작업장의 검출

CQN 내의 총 작업물 수는 $N=\sum_{r=1}^{R} N_r$이므로, 작업물 종류 r에 속하는 모집단의 비율 $f_r=\frac{N_r}{N}$을 구한다. 애로작업장의 검출을 위해 각 작업물 종류에 대한 모집단 비율 f_r을 유지하면서 $N\to\infty$로 보낼 경우 다음과 같은 가정을 한다(Harrison외, 2002, Knessl, 1992). $i=1,\cdots,M$; $r,k=1,\cdots,R$일 때,

(A1) $|L_{ik}^{(r)}-L_{ik}|=0(N)$

(A2) $\varepsilon_{ir}=0(N)$

이와 같은 가정에 의해 (1)식의 W_{ir}은 $0(N)$의 항들과 함께 r과 무관해진다는 것을 알 수 있다. 그리고

(A3) $\lim_{n\to\infty}\frac{W_{ir}}{N}=w_i^*$

라고 하자. 이상과 같은 가정들에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_{ir}}{N}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_{ir}}{N}+\sum_{k=1}^{R}L_{ik}^{(r)}\cdot\frac{S_{ik}}{N}\right)\cdots\cdots(5)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{R}L_{ik}\cdot\frac{S_{ik}}{N}\right)=w_i^*$$

가 됨을 의미한다. 이 w_i^*은 작업장 i에서 재조정되어진 가상적인 대기시간(waiting time)으로 볼 수 있다. 따라서

$$w_i^*\geq 0\ ,\quad i=1,\cdots,M\cdots\cdots(6)$$

전술한 가정들을 재검토한다면, (A1) 가정은 도착한 작업물들에게 보여지는 평균 대기행렬의 길이는 시간평균한 대기행렬의 길이와 거의 차이가 없다는 것이다. 이런 경우는 대기행렬의 길이가 길고 상대적으로 변동이 천천히 일어날 때 성립하는 것으로 알려져 있다(Pittel, 1979). (A2) 가정의 ε_{ir}에 대해서는 전술했듯이 서비스 시간들이 제한될(bounded) 경우 바로 성립하며, 실제 시스템에서는 그대로 적용될 수 있다. (A3) 가정은 (5)식으로 확인되어지는 데, $W_{ir}\leq S_{ir}+\sum_{k=1}^{R}N_k\cdot S_{ik}$이므로 $N\to\infty$일 때 $(\frac{W_{ir}}{N})$는 동일하게 제한되어져서 적어도 하나의 한계치 w_i^*를 갖는다. 이 한계치는 (5)식에서 보듯이 작업물 종류 r과 무관하다.

이런 가정들을 이용하면, (2)와 (3)식은

$$X_{ir}^*=\frac{V_{ir}f_r}{\sum_{j=1}^{M}V_{jr}\cdot w_j^*}\geq 0\ ,\quad\cdots\cdots(7)$$
$$r=1,\cdots,R\ ;\ i=1,\cdots,M$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{L_{ir}}{N}=X_{ir}^*w_i^*\ ,\quad\cdots\cdots(8)$$
$$r=1,\cdots,R\ ;\ i=1,\cdots,M$$

으로 변한다. 그리고 작업장 i는 100% 미만의 이용률로 운용되고 있으므로

$$\sum_{r=1}^{R}X_{ir}^*\cdot S_{ir}\leq 1\ ,\quad i=1,\cdots,M\cdots\cdots(9)$$

가 성립한다. 따라서 (6)과 (9)식의 관계를 이용한다면, 본 연구에서 가장 중요한 조건으로써 상보여유 (complementary slackness) 조건은

" $w_i^*>0$이면, (9)식은 등식이 된다." .... (10)

라고 할 수 있다. 이는 $w_i^*>0$인 작업장 i에는 매우 긴 대기행렬이 발생하여 100%의 이용률로 운용된다는 것을 의미한다.

4. 계산절차

(6), (7), (9), 및 (10)식들의 관계는 아래에서 보듯이 $\{w_i^*\}$와 $\{X_{ir}^*\}$에 대한 비선형 상보집합(nonlinear complementary set)의 형태(Karamardian, 1969)를 한다. (10)식의 상보여유(complementary slackness)를 이용하면,

$$w_{ir}^*\left[1-\sum_{r=1}^{R}X_{ir}^*\cdot S_{ir}\right]=0\ ,\quad i=1,\cdots,M$$

이므로

$$w_{ir}^*=w_{ir}^*\sum_{r=1}^{R}\left(\frac{V_{ir}\cdot f_r\cdot S_{ir}}{\sum_{j=1}^{M}V_{jr}\cdot w_j^*}\right)\ ,\quad i=1,\cdots,M \cdots\cdots (11)$$

으로 쓰여질 수 있다.

(11)식에서 성립되는 w_i^*, $1,\cdots,M$을 찾기 위해서는 괄호 안의 $\sum_{j=1}^{M}V_{jr}\cdot w_j$를 미지수로 하는 M개의 연립방정식을 푼 후, 또 다시 그 연립방정식의 해를 우변 값으로 하는 R개의 연립방정식 $\sum_{j=1}^{M}V_{jr}\cdot w_j$를 풀면 구할 수 있다. 이런 과정에서 구한 w_j값이 음수이면, 그 값을 0으로 놓고 다시 한번 해를 구하면 나머지 값들이 정해진다. 실제 시스템들에서는 $M\geq R$인 경우가 일반적이므로 항상 $\{w_i^*\}$를 구할 수 있다. 하나의 해집합 $\{w_i^*\}$와 그에 따른 $\{X_{ir}^*\}$ 집합이 얻어지면, 애로작업장들은 $\left\{i\mid \sum_{r=1}^{R}X_{ir}^*S_{ir}=1\right\}$인 작업장들이다. 상당히 규모가 큰 유한 모집단들을 지닌 CQN의 성능척도에 관한 개산치(approximation)는

$$W_{ir}\simeq Nw_i^* \cdots\cdots (12\text{-}1)$$

$$X_{ir}\simeq X_{ir}^* \cdots\cdots (12\text{-}2)$$

$$L_{ir}\simeq NX_{ir}^*w_{ir}^* \cdots\cdots (12\text{-}3)$$

으로 주어지고, 이 값들은 (1), (2), (3)식의 휴리스틱 해의 하나로 보다 정확한 해를 구하기 위한 알고리즘들의 초기치로 쓰여질 수 있다. 그리고 (11)식의 해가 유일하지 않은 경우가 있을 수 있다. 예를 들어 $f_r=\frac{1}{R}$, $V_{ir}=\frac{1}{M}$, $S_{ir}=S(\,i=1,\cdots,M\ ;\ r=1,\cdots,R$일 때)인 경우, (11)의 해집합은 $\left\{(w_1^*,\cdots,w_M^*)\mid \sum_{i=1}^{M}w_i^*=S\text{이고},\ w_i^*\geq 0\right\}$이고 $X_{ir}^*=\frac{1}{RS}$가 나온다.

5. 최적화 문제

서비스 시간 S_{ir}들을 $S_{ir}=D_r\cdot S_i$=(모든 작업장에서 종류 r의 한 작업물에 의해 부과되는 작업요구량)×(작업장 i에서의 서비스 시간) 즉, 종류 r의 작업물 하나가 그 자신이 방문하는 모든 작업장에다가 똑같은 작업요구량 D_r을 부과한다고 특성화시킨다. 그런 다음 적당한 목적함수를 첨가하면, 제4절의 비선형 상보문제는 비선형계획법의 최적화 문제가 되어서 Kuhn-Tucker 해집합(Bazaraa, 1979)으로 쌍대(dual) 해석도 행할 수 있다. 예를 들어 FMS인 경우 D_r은 종류 r 작업물의 작업장당 평균 가공요구 개수이고, S_i는 작업장 i에서의 작업물 한 개당 평균 가공시간이라고 할 수 있다. 통신네트워크이라면, 종류 r 메세지의 평균 메시지 길이(bit 단위)이고, S_i는 채널 i의 라인당 처리시간(초/bit)이라고 할 수 있다.

K-T 해집합을 얻기 위해 최적화 문제의 변수와 제약식을 각각

$$x_r\equiv\frac{f_r}{\sum_{j=1}^{M}V_{jr}\cdot w_j^*}\ ,\quad r=1,\cdots,R \cdots\cdots (13)$$

$$g_i(x_1,\cdots,x_R)\equiv\sum_{r=1}^{R}V_{ir}\cdot D_r\cdot x_r-\frac{1}{S_i}\leq 0,\quad i=1,\cdots,M \cdots\cdots (14)$$

라고 정의하자. 이에 따라 $X_{ir}^*=V_{ir}\cdot x_r$이 된다. 그리

고 (14)식은 작업장 i의 이용률이 100% 미만이라는 사실을 의미하는 식인 데, (14)식의 첫 항은 작업장 i의 전체 출력율(throughput)이므로 이 출력율은 총 서비스율보다 작거나 같다는 것이다. (13)과 (14)식으로 4절에서 얻어진 결과를 나타내보면,

$$w_i^* > 0 \ , \quad i=1,\cdots,M \quad \cdots\cdots (15)$$

$$w_i^* g_i(x_1,\cdots,x_R)=0, \quad i=1,\cdots,M \quad \cdots\cdots (16)$$

가 되는 데, (16)식은 상보여유(complementary slackness)을 나타내는 식이다.

따라서 (13), (14), (15) 그리고 (16)의 관계식은 $f(x_1,\cdots,x_R)=-\sum_{r=1}^{R} f_r \cdot D_r \log x_r$가 목적함수인

$$\begin{aligned} &\min\left(-\sum_{r=1}^{R} f_r \cdot D_r \log x_r\right) \\ &s.t \quad \sum_{r=1}^{R} V_{ir} \cdot D_r x_r \le \frac{1}{S_i} \ , \quad i=1,\cdots,M \quad \cdots\cdots (17) \\ &\qquad x_r \ge 0 \ , r=1,\cdots,R \end{aligned}$$

라는 비선형계획법 문제의 Kuhn-Tucker 해집합이다. 변수 x_r에 관한 (13)식은

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left[f(x_1,\cdots,x_R)+\sum_{i=1}^{M} w_i^* g_i(x_1,\cdots,x_R)\right]=0$$

에서 얻어진 것으로 쉽게 보일 수 있다.

그런데 이와 같은 최적화 문제에 대한 의미해석은 자연스럽게 할 수 없다. 단지 재조정된 가상적인 대기시간변수 w_i^*는 서비스 능력에 관한 제약식 (14)에 대응되는 쌍대 변수(또한 Lagrangian multiplier)들로 볼 수 있다. 그러면 (17)식의 쌍대 문제는

$$\begin{aligned} \max\,[&F(w_1, w_2,\cdots, w_M) \\ &\equiv f(x_1(w_1,\cdots,w_M),\cdots,x_R(w_1,\cdots,w_M)) \cdot (18) \\ +&\sum_{i=1}^{M} w_i \cdot g_i(x_1(w_1,\cdots,w_M),\cdots,x_R(w_1,\cdots,w_M))\Big] \end{aligned}$$

가 된다. 여기서 (13)식에 의해 $x_r(w_1,\cdots,w_M)\equiv \dfrac{f_r}{\sum_{i=1}^{M} V_{ir} \cdot w_i}$ 이 된다.

(18)식과 같은 무제약 조건(unconstrained) 하의 최적화 문제에서 해를 구하기 위해서는 the method of steepest descent나 Newton 방법과 같은 각종 비선형계획법의 알고리즘들을 적용할 수 있다. 또한 쌍대 문제에 대해서 의미해석을 할 수 있을 것이다(Bazaraa, 1979).

끝으로 쌍대변수 또는 Lagrangian multiplier $\{w_i^*\}$가 유일하게 존재하지 않는 경우가 있을 수 있는 데, 목적함수 $f(x_1,\cdots,x_R)$가 convex 또는 concave 함수인지를 판정할 수 없는 함수일 경우에 발생한다. 그리고 최적치에 관한 상하한계를 제시하거나 정지기준(stopping rule)을 정해서 (17)과 (18)식을 비교할 수 있다

6. 적용예제

4절의 계산절차를 컴퓨터 프로그램으로 작성하여 다음과 같은 두 가지 예제에 대해 분석을 실시하였다.

예-1) M=2, R=2인 CQN에서 $N_1=2$, $N_2=3$인 경우

작업장 i	V_{i1}	S_{i1}	V_{i2}	S_{i2}
1	9	0.1	9	0.1
2	1	0.1	10	0.1

계산절차에 따른 작업장 1과 2의 이용률은 각각 1.0535와 0.6255가 얻어진다. 따라서 작업장 1이 애로작업장이다.

예-2) M=4, R=3인 CQN에서 $N_1=10$, $N_2=30$, $N_3=20$인 경우

작업장 i	V_{i1}	S_{i1}	V_{i2}	S_{i2}	V_{i3}	S_{i3}
1	1	10.0	0	0	0	0
2	7	0.06	100	0.8	100	0.01
3	2	0.3	0	0.3	33	0.3
4	1	0.2	10	0.2	66	0.2

도출되어진 결과는 다음과 같다. 각 작업장의 이용률들이 작업장 1에서는 0.999(실제로 1.0), 작업장 2에서는 1.7326(실제로 1.0), 작업장 3에서는 0.1982, 그리고 작업장 4에서는 0.2462가 얻어진다. 따라서 작업장 1과 2가 애로작업장이며, 작업장 2가 수치에서 보듯이 먼저 애로작업장이 된다는 것도 알 수 있다.

또한 모집단 비율 f_r들에 대해 두 예제에 대해 각각 민감도 분석을 실시하여 다음과 같은 <표 1>과 <표 2>로 정리하였다.

<표 1> M=2, R=2인 CQN에서 $N_1=2$, $N_2=3$인 경우

모집단 비율 f_r	(0.1, 0.9)	(0.3, 0.7)	(0.5, 0.5)	(0.7, 0.3)	(0.9, 0.1)
작업장 1의 이용률	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
작업장 2의 이용률	1.0000	0.7901	0.6111	0.4111	0.2111

<표 2> M=4, R=3인 CQN에서 $N_1=10$, $N_2=30$, $N_3=20$인 경우

모집단 비율 f_r	(0.167,0.5,0.333)	(0.167,0.333,0.5)	(0.5,0.333,0.167)	(0.5,0.167,0.333)	(0.333,0.5,0.167)	(0.333,0.167,0.5)
작업장 1의 이용률	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
작업장 2의 이용률	1.7326	1.1796	0.9105	0.9266	0.9087	0.9374
작업장 3의 이용률	0.1919	0.2675	0.1136	0.2730	0.0957	0.3798
작업장 4의 이용률	0.2462	0.3246	0.1130	0.3255	0.0891	0.4679

7. 결 론

다종류의 작업물들이 있는 폐쇄형 대기행렬 네트워크에서 애로작업장을 검출하기 위한 효율적인 계산절차를 구성하였다. 이 결과는 유연생산시스템, 컴퓨터 시스템 및 통신 네트워크의 설계 초기 단계에서 각 작업장의 처리능력과 각 작업물 종류별 작업량의 크기 등을 결정하는 데 기초자료로 매우 유용하게 활용될 수 있을 것이다. 검출의 편의를 위해 컴퓨터 프로그램의 패키지화를 준비하였다.

참고문헌

[1] Agrawal, S. C., *Metamodeling : A study of approximations in queueing models*, The MIT Press, Cambridge, M.A., 1985.

[2] Bard, Y., "Some extensions to multiclass queueing network analysis," In *Performance of Computer Systems,* Arato, M., Butrimenko, A. and Gelenbe, E.(eds.), North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1979.

[3] Baskett, F., Chandy, K. M., Muntz, R. R. and Palacios, F. G., "Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers," *J.ACM,* 22(2), pp.248-260, 1975.

[4] Bazaraa, M. S. and Shetty, C. M., *Nonlinear programming : theory and algorithms*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1979.

[5] Bruell, S. C. and Balbo, G., *Computational algorithms, for single and multiple class queueing models,* Elsevier/North-Holland, New York, 1980.

[6] Denning, P. J. and Buzen, J. P., "The operational analysis of queueing network models," *Computing Survey*, 10(3), pp.225-261, 1978.

[7] Harrison, P. G. and Sergio Coury, "On the asymptotic behaviour of closed multiclass queueing networks," *Performance Evaluation*, 47, pp. 131-138, 2002.

[8] Karamardian, S., "The nonlinear complementary problem with applications, Part 1& 2," *J. of Optimization Theory and Applications,*. 4(2&3), pp.87-98, 167-181, 1969.

[9] Knessl, C. and Tier, C., "Asymptotic expansions for large closed queueing networks with multiple job classes," *IEEE Trans, on Computers*, 41(4), pp.480-488, 1992.

[10] Pittel, B., "Closed exponential networks of queues with saturation : The Jackson-type stationary distribution and its asymptotic analysis," *Math. of Operations Research*, 4, pp.357-378, 1979.

[11] Pollett, P. K., "Modeling congestion in closed queuing networks," *Intl. Trans. in Op. Res.*, 7, pp.319-330, 2000.

[12] Reiser, M., "A queueing network analysis of computer communication networks with window flow control," *IEEE Trans. on Communications*, COM-27, pp.1199-1209, 1979.

[13] ________, and Lavenberg S. S., "Mean-value analysis of closed multichain queueing networks," *J.ACM*, 27(4), pp.312-322, 1980.

[14] Schweitzer, P. J., Seidmann, A. and Shalev-Oren, S., "The correction terms in approximate mean-value analysis," *Operations Research Letters*, 4(5), pp.197-200, 1986.

[15] Shalev-Oren, S., Seidmann, A. and Schweitzer, P. J., "Analysis of flexible manufacturing system with priority scheduling : PMVA," *Annals of Operations Research*, 3, pp.115-139, 1985.