

기하학 발달 이끈 ‘3대 작도 불능문제’ (作圖)

글_조용승 이화여자대학교 수학과 교수 yescho@ewha.ac.kr

최 근에는 컴퓨터 소프트웨어를 이용하여 3차원 도형까지도 실제보다 더 그럴 듯하게 그리는 세상이 되었으니 작도에 크게 비중을 두는 사람은 수학자 외에는 별로 없을 것이다. 그러나 고대 그리스인들은 세상에서 가장 정확한 것은 수학이라 생각하였고, 그 중에서도 특히 기하학이라 생각했다. 또 그리스인들은 기하학적인 도형에서 가장 아름답고, 기본적인 것은 직선과 원이며, 따라서 기하학에서는 직선을 그리는 자와 원을 그리는 컴퍼스만을 사용하여 도형을 그려야 한다고 생각했다. 이렇게 도구를 제한해 놓고 보니 문제를 푸는데 어려움이 따랐고, 특히 3대 작도 불능문제는 작도가 쉽지 않아 수학의 3대 난문제라 하여 2천년 이상 수학자들을 괴롭혔다.

그리스 시대, 자와 컴퍼스만으로 작도 제약

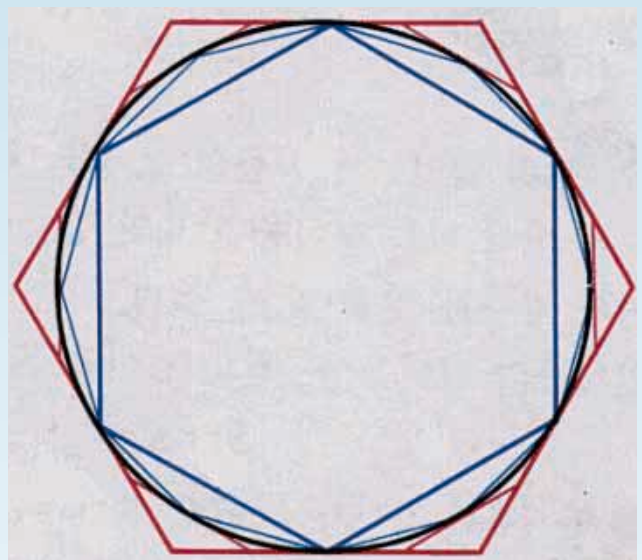
기하학의 작도는 건축물을 설계하고, 도시 계획을 세우고, 토지를 측량하는데 꼭 필요한 방법이다. 그리스에서 이러한 문제가 진지하게 다루어졌다는 것은 고대 그리스 사회가 대규모 토목, 건축 사업을 추진했음을 알 수 있다. 자와 컴퍼스만으로 문제를 해결해보려고 했지만 수천년간 해결하지 못한 이 난제는 18세기 독일의 수학자 람베르트가 불가능함을 증명하고 나서야 일단락 되었다.

그리스인들은 이성적이고 논리적인 사고를 중시했던 사람들이었다. 그들은 실용적인 가치보다도 바른 지식 체계를 중요시했기 때문에 의외로 쉽게 풀 수 있는 문제를 어렵게 푸는 경우도 많았다. 3대 작도 불능문제도 기하학의 발달에 큰 영향을 미쳤다. 그리스인들은 굳이 자와 컴퍼스만으로 작도하는 것을 강조하고 있는데, 그것은 그들이 작도하기 가장 간단한 도형을 성시(聖視)하고 타원, 쌍곡선, 포물선이나 그 외에 기계를 사용해서 그릴 수 있는 기술적인 도형은 천한 것으로 생각했기 때문이다. 결국 그들은 자로 그을 수 있는 직선과 컴퍼스로 그릴 수 있는 원만을 사용하여 작도하는 전통을 가지게 되었다. 그러한 전통의 시작은 플라톤 때부터였다. 플라톤은 “자와 컴퍼스 이외의 다른 작도 방

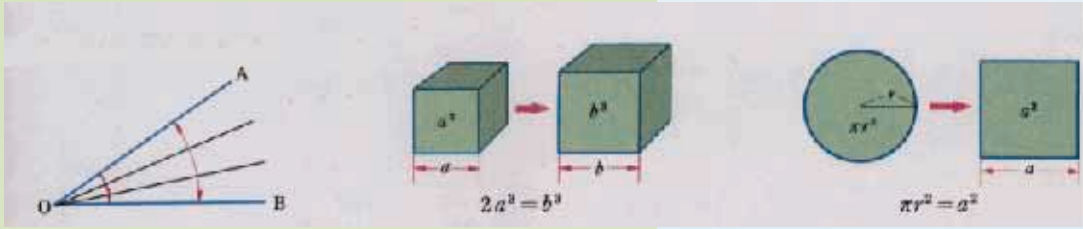
법은 기하학의 장점을 포기하고 파괴하는 것이다. 그것은 기하학을 영원한 사상의 영상으로 드높이기는커녕 오히려 이것을 다시 감각의 세계로 끌어내리기 때문이다”라고 말했다.

그리스의 대표적인 수학자 피타고라스도 입체도형 중 가장 아름다운 것은 구이고, 평면 도형 중 가장 아름다운 것은 원이라고 강조하였다. 그러한 사고의 영향으로 당시의 종교적 상징인 건축물에는 원과 직선이 많이 사용되고 있다. 그러나 자와 컴퍼스만으로 작도해야 한다는 제약은 많은 수학자들을 괴롭혔으며 이 세 가지 문제를 풀기 위한 왕성한 연구는 그리스의 기하학에 깊고 큰 영향을 미쳤다. 또한, 원, 쌍곡선, 포물선 등 원추곡선, 3차 곡선, 4차 곡선 등 풍부한 발견을 이끌어 냈으며, 나중에는 대수적인 부분까지 영향을 미쳤다. 그 3가지 문제는 주어진 정육면체의 2배의 부피를 갖는 정육면체의 한 변의 길이를 작도하는 문제, 임의의 각을 3등분하는 문제, 임의의 원과 면적이 같은 정사각형을 작도하는 문제가 그것이다.

이제 첫번째 문제에 대하여 알아보자. 정육면체의 부피를 2배로 할 수 있는가에 관한 문제의 발단에 대한 이야기는 2종류가



그리스인들은 자와 컴퍼스만으로 그린 도형을 신성시했다.



3대 난제



유클리드의 기하학원론

있다. 하나는 고대 그리스 시인으로부터 비롯되었다는 것이다. 미노스 왕이 그의 아들 글라우쿠스를 위해 세운 묘비의 크기에 불만스러워 했다고 표현한 대사에서 그 문제가 나타났다고 한다. 미노스는 묘비의 크기를 두 배로 하라고 그 시인에게 명령했는데, 이 때 시인은 묘비의 각 변의 길이를 두 배함으로써 묘비를 두 배로 만들 수 있다고 말하였다. 이 잘못된 생각이 기하학자들로 하여금 부피만 두 배로 늘리는 것이 어떻게 가능한가 하는 문제에 빠져들게 하였다.

19세기 이후에야 작도 불가능 증명돼


또 하나의 이야기는 기원전 400년에 아테네에 전염병이 퍼져서 수많은 시민이 죽었다. 아테네 시민들은 평소 숭배하는 텔레스의 신전 앞에 공물을 바치면서 기도를 올리고 병마를 쫓아줄 것을 빌었다. 이에 텔레스 신은 “정육면체의 제단을 두 배의 부피가 되도록 만들면 병마를 깨끗이 쫓아주겠다”라고 했다. 시민들은 각 모서리의 길이를 두 배로 늘려 새로 제단을 만들어 신전에 바쳤다. 그러나 유행병은 더욱 창궐하였다. 시민들이 항의하니 신은 꾸중하기를 “내가 언제 여덟 배나 되는 신전을 원했더냐? 두 배가 되는 것을 만들어 달랬지” 그제야 시민들은 부피가 여덟 배로 늘어난 것을 알았다.

그렇다면 이 문제는 19세기에 어떻게 해결되었을까? 이 문제가 자와 컴퍼스만으로는 풀릴 수 없다는 것은 여러 책에 증명되어 있는데 그 내용 중의 하나는 “유리근을 갖지 않는 3차방정식의 근을 크기로 하는 선분을 작도할 수 없다”는 것이다. 처음 정육면체는 한 모서리의 길이가 1이라면 부피도 1이다. 구하려는 정육면체의 한 모서리의 길이를 x 라 하면 x 의 세제곱이 2가 되어야 한다. 그런데 세제곱해서 2가 되는 수는 유리수 중에 없으므로 이는 유리근을 갖지 않는 3차방정식이다. 따라서 한 모서리의 길이가 x 인 정육면체의 길이는 작도할 수 없는 것이다. 아직까지 이 세상에 전염병이 있는 것을 보면 아직 이 문제가 풀리지 않았나 싶다.

두 번째 문제는 자와 컴퍼스만을 사용하여 임의의 각을 3등분하는 문제이다. 각을 이등분하는 것은 기하학에서 가장 초보적인 작도이다. 각의 3등분도 직각의 경우에는 쉽게 할 수 있다. 그래서 직각이 아닌 각의 3등분도 쉽다고 생각할 수 있지만 생각과 같이 쉽지 않다. 이 문제도 19세기에 와서야 작도할 수 없다는 것이 증명되었다.

그리스 기하학은 결과만을 중요시하지 않고 결과에 이르는 방법을 더욱 중요하게 생각하였다. 각을 3등분하는 것만이 문제가 아니었던 것이다. 실제로 19세기에 이 문제가 풀리기 전까지 온갖 기구를 고안하여 각을 3등분한 사람들은 무척 많았다고 한다. 그러나 그리스로부터의 유럽 수학의 전통은 결과보다는 방법을 연구하는데 치중해왔기 때문에 19세기에 와서야 이 각을 작도할 수 없다는 것을 알아낸 것이다.

임의의 원의 면적과 같은 면적의 정사각형을 구하는 세 번째 문제가 발생한 것은 곡선으로 되어 있는 논과 밭을 직선 도형으로 쉽게 고칠 수 있게 하기 위한 것이었다. 그래서 이 문제는 인간이 기하학을 생각하기 시작한 초기에 발생한 문제로 생각된다.

3가지의 작도문제를 연구하면서 얻은 부산물은 작도법의 발달, 히피아스의 곡선, 유선형의 콩코이드곡선, 원추곡선에 대한 연구, 제도 기구의 발명 등이 그것이다. 생각지도 못했던 곳에서 쏟아져 나온 이 지식들은 수학의 발달에 큰 도움을 주었다. 그러한 부산물이 아니더라도 우리는 그리스인들의 사고를 결코 무시해서는 안 된다. 자와 컴퍼스만을 고집했듯이 실용적인 것보다는 논리적이고 합리적인 지식 체계를 원했던 그들의 노력은 유클리드의 ‘원론’과 같은 위대한 결과들을 남겼다. 그러한 것들이 당장은 쓸 데 없어 보이지만 그 기초 위에 더욱 복잡하고 어려운 것들을 쌓아올려 현대 과학 문명을 만들었다는 것을 생각해보면 그들의 고집스런 사고방식에 고마움을 느끼게 된다. 



글쓴이는 미국 시카고대학교에서 박사학위를 취득하였으며, 현재 이화여대 수학과 교수로 재직중이다.