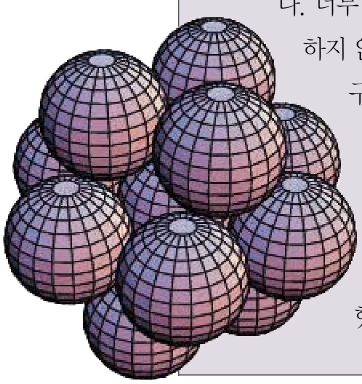
공 쌓기의 비밀
– 케플러 추측

글 _ 조용승 이화여대 수학과 교수 yescho@ewha.ac.kr

1611년 독일의 천문학자 요하네스 케플러(Johannes Kepler, 1571~1630)는 공을 가장 조밀하게 쌓는 방식은 오렌지나 사과를 쌓을 때 쓰는 방식과 동일하다는 추측을 내놓았다. 그 후 400년 동안 이를 수학적으로 확실하게 증명하지 못했는데 1998년 미국 미시간대학교의 젊은 수학자 토머스 헤일스 교수가 드디어 증명에 성공했다. 증명 과정의 상당 부분을 컴퓨터에 의존했다고 하니 익숙한 3차원의 문제를 증명하는데도 만만치 않은 세월이 걸린 셈이다. "공을 가장 밀도 높게 쌓으려면 각각의 공이 12개의 공에 의해 둘러싸이도록 하는 배열일 것이다"라고 케플러가 최초로 이런 추측을 내놓았을 당시만 해도 그렇게 어려운 문제라고는 생각지 않았으나, 결국 페르마의 마지막 정리와 더불어 가장 유명한 풀리지 않은 수학의 난제로 인정되었다.

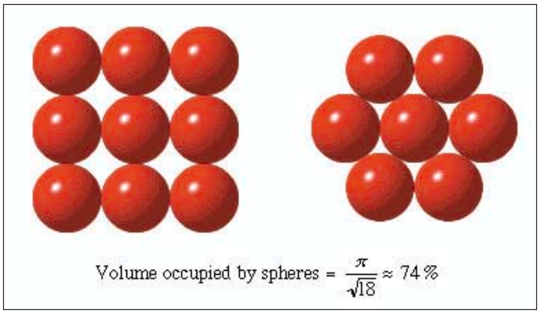
과일처럼 쌓는 '육방밀집쌓기'가 가장 밀도 높아

1차원 공간에서 가장 밀도가 높도록 구를 놓는 방법은 무엇일까? 이 경우 1차원 직선이니까 성냥을 쌓듯이 서로 맞대어 놓은 방식으로 하면 100%의 밀도를 얻는다. 너무 명백하기 때문에 수학자의 증명을 요구하지 않는다. 2차원의 경우는 어떨까? 평면에 구를 놓은 방법은 동전을 밀도 높게 배치하는 방법과 같은 것으로 각 동전들이 6개의 다른 동전들로 둘러싸이도록 배열하는 것이다. 이 배열의 밀도는 대략 90%이다. 동전을 정사각형으로 배열했을 때의 밀도 79%에 비해 훨씬 효율적이나 경계가 없는 무한평면에서의 가정이다. 그러면 정말로 정육각형보다 밀도가 높은 배열은 존재하지 않는가? 후에 조제프 루이 라그랑주(Joseph Louis Lagrange, 1736~1813)는 정육각형 배열이 밀도가 가장 높은 격자쌓기임을 실질적으로 증명했다.



3차원에서 가장 밀도가 높게 구를 쌓은 방법은 무엇일까? 케플러는 가장 밀도가 높게 구를 쌓는 방법은 시장 상인들이 사과나 오렌지, 또는 멜론을 쌓을 때처럼 최대한 촘촘하게 채우는 것이라고 결론지었다. 멜론이 정육각형일 경우 차곡차곡 쌓으면 밀도를 100%할 수 있을 것이다. 그러나 멜론과 같은 과일들은 수분 손실을 될 수 있는 한 최소화하기 위해서 표면적이 가장 작은 둥근 모양으로 진화했다. 무게는 같지만 정육면체 모양과 둥근 모양의 멜론의 표면적을 비교해 보면 둥근 모양의 멜론의 표면적이 20% 적다. 첫번째 켜는 2차원에서 배열하듯이 하고, 두 번째 켜에서는 오목한 곳에 멜론을 쌓고 다음 오목한 곳은 비워놓고, 그 다음 오목한 곳에 멜론을 올려놓는다. 이런 식의 쌓고 비워놓고, 쌓고 비워놓고의 방식을 '육방밀집쌓기(Hexagonal Close Packing, HCP)'라고 하는데 밀도는 74.05%에 달하며, 3차원에서 가장 밀도가 높은 쌓기 방식이다.

케플러는 석류씨에 대해 살펴본 후 석류씨가 12개의 면을 지닌 입체 마름모꼴이라는 사실을 알게 되었다. 그는 석류안에서 씨들이 서로 밀착하게 되면 이런 형태로 변하게 된다고 추측했고, 그의 이런 추측은 옳았다. 씨가 아주 작을 때는 둥근 모양을 하고 자유롭게 떠다니지만 점차 커져 공간이 부족해지면서 각각의 씨는 12개의 다른 씨와 맞닿도록 배열을 이루게 된다. 이러한




요하네스 케플러

사실은 케플러 이후 100년도 더 지난 후인 1727년에 영국의 식물학자 스티븐 헤일스에 의해 다시금 확인되었다. 케플러는 어떤 논증도 없이 씨앗들은 가장 밀도가 높은 방식으로 자연스럽게 배열된다고 믿었고, 여기에서 출발하여 케플러의 유명한 추측이 등장한다. 각각의 구가 다른 12개의 구에 의해 적절한 방식으로 둘러싸이도록 하면 밀도가 가장 높은 배열을 얻게 된다는 주장이다.

컴퓨터 활용한 헤일즈의 증명, 일부에선 혹평

1998년 8월9일 일요일 아침, 토머스 헤일스 교수는 증명을 완료했다. 그는 자리에 앉아 마침내 케플러 추측이 해결되었다는 내용의 이메일 편지를 전세계 동료 수학자들에게 발송했다.

"친애하는 동료학자들에게,

본인은 가장 오래된 이산기하학 문제인 케플러 추측을 증명했으며, 이를 일련의 논문으로 정리하여 배포하기 시작했습니다. 다른 이의 논문에 인용된 적이 없고, 또 아직 학술지에 투고하지 않았기 때문에 본인의 결과를 확정된 것이라고는 할 수 없겠지만, 그래도 제 소견으로는 본 증명은 완벽한 것이라고 믿고 있습니다."

그는 5년의 산고 끝에 결실을 맺게 되었다. 4주 후 케플러는 추측 증명에 대한 최초의 강연을 할 참으로 이스라엘 하이파에서 열리는 ISIS 학술회의에 참석하여 열렬한 환호 속에 이를 발표했으며, 청중들은 400년 만에 풀린 문제를 직접 목격한다는 역사적 순간의 전율 속에서 열렬히 환호했다.

헤일스가 증명을 발표한 이후로 부정적인 목소리들이 여기저기서 터져 나왔다. 반대의 목소리를 높이는 사람들은 엔드류 와일즈가 증명한 페르마의 마지막 정리의 증명은 아름답고 우아하며 높은 품격을 지니고 있는데 반해, 헤일스의 증명은 컴퓨터를 이용한 완전히 다른 모습이라고 비꼬았다.

어떤 수학자는 와일즈의 페르마 정리 증명을 톨스토이의 '전쟁과 평화'에 견준다면, 헤일스의 케플러 추측 증명은 전화번호부에 견줄 수 있다고 혹평했다. 그러나 헤일스 자신은 "1998년 증명에 컴퓨터를 사용한 이유는 다른 대안이 떠오르지 않았고, 최근 들어 컴퓨터를 활용한 증명은 수학 발전에 매우 필수 불가결하다는 생각을 갖고 있다" 고 말했다.

멀쩡한 정리가 언제 갑자기 오류로 판명이 나게 될지는 아무도 알 수 없는 노릇이다. 오류가 발견되면 그 증명은 지체 없이 폐기처분된다. 하지만 오류가 발견되지 않는다 해도 정리의 옳음은 단지 추정일 뿐이다. 그런데 시일이 얼마간 지나고 나면 아무도 오류를 발견하지 못했다는 이유로 그 증명은 옳은 것이라고 믿기 시작한다. 케플러의 추측 증명도 마찬가지일 것이다.

우리는 위의 예에서와 같이 집안 정리를 할 때 물건을 쌓는다든지, 상인이 상자에 물건을 담는데도 수학이 도처에 있음을 알 수 있다. ST


글쓴이는 미국 시카고대학교에서 박사학위를 취득하였으며, 현재 대한수학회 회장을 겸임하고 있다.