

마이크로 크랙을 포함한 재료의 매크로 탄성 정수에 관한 자연요소해석

강 성 수*

(원고접수일 : 2006년 7월 7일, 심사완료일 : 2006년 9월 25일)

Natural Element Analysis on Macro Elastic Moduli for Materials with Micro-cracks

Sung-Soo Kang*

Abstract : A meso-scale analysis method using the natural element method is proposed for the analysis of material damage of brittle microcracking solids. The microcracking is assumed to occur along Voronoi edges in the Voronoi diagram generated using the nodal points as the generators. The mechanical effect of microcracks is considered by controlling the material constants in the neighborhood of the microcracks. The macro elastic moduli of isotropic solids containing a number of randomly distributed microcracks are calculated considering the effect of microcrack closure to demonstrate the validity of the proposed method.

Key words : Computational mechanics(전산역학), Brittle fracture(취성 파괴), Natural element method(자연요소법), Material damage(재료 손상), Microcracks(마이크로 크랙), Macro elastic moduli(매크로 탄성정수)

1. 서 론

외력의 작용을 받는 재료 요소는 거시적 변형과 함께, 미시적 내부 구조 변화를 동반하는 경우가 많다. 이러한 미시적 구조 변화 중에, 재료내의 미시적 분포 균열, 즉 마이크로 크랙과 마이크로 보이드의 생성과 성장은, 단순히 거시적 균열의 발생과 최종 파단을 일으킬 뿐 아니라, 강도와 강성, 인성의 저하, 또는 잔존 수명의 감소 등과 같은 재료 손상의 원인이 된다.

한편, 연속체 손상역학에서의 마이크로 크랙 밀도

와 매크로 탄성정수의 관계식을 수치적으로 평가하기 위해, 계산 불연속체 역학 모델에 의한 메소 해석 수법이 제안되었다^[1]. 즉, 계산 불연속체 역학 모델인 강체·스프링 모델을 이용하여, 다결정체의 결정입자와 결정입계를 각각 강체요소와 결합 스프링으로 치환함으로써, 취성고체를 결정입자 레벨에서 직접적으로 모델링하여, 고체 내부의 미시적 거동을 수치적으로 평가하는 방법이다. 이 수법의 요소분할에는 Voronoi 분할법이 이용되고 있으며, 물리적 의미가 명확하고, 정식화 프로그래밍도 쉽다는 것이 장점이지만, 강체요소·스프링 계라고

* 책임저자(전주대학교 기계자동차공학과), E-mail:sskang@jj.ac.kr, Tel: 063)220-3077

하는 수학적 입장에서 근사도가 낮은 모델링을 하고 있기 때문에, 스프링 정수의 합리적인 결정과 해의 계통적 정도 향상이 어렵다.

무요소법⁽²⁾은 문자 그대로 격자 또는 요소를 필요로 하지 않는 수치해석수법이다. 절점을 분포시키는 것만으로 해석 대상의 모델링이 가능하며, 입력 데이터 작성의 소모가 크게 경감되는 장점이 있다. 그 대표적인 예로서, Belytschko 등의 엘리먼트 프리 갤러킨 법(Element-Free Galerkin Method: EFGM)⁽³⁾과 Sukumar 등의 자연요소법(Natural Element Method: NEM)⁽⁴⁾을 들 수 있다. 특히, 자연요소법의 형상함수는 자연 근방 보간법(Natural Neighbor Interpolants)에 의해 생성되고, 공간적으로 연속이 되기 때문에 고정도의 변형률과 응력을 얻을 수 있다. NEM에 있어서도, 해석 영역에 유한개의 절점을 배치하고, 이를 모점으로 하는 Voronoi 다각형, Delaunay 삼각형 및 그 외접원(파선)을 나타낸다. Voronoi 다각형의 정점인 Voronoi점은 인접한 3개의 모점으로 이루어지는 Delaunay 삼각형의 외접원의 중심이 된다. Voronoi분할도는 다결정체의 형상모델로서 종종 이용된다.

본 연구에서는 이러한 자연요소법(NEM)의 장점을 이용한 새로운 이차원 메소해석 수법을 제안하여, 마이크로 크래킹을 중심으로 한 재료 손상 거동에 적용함으로써, 상술한 계산 불연속체 역학 모델의 문제점을 해소하였다. NEM에서도 형상함수의 정의에 Voronoi 다각형이 이용되고 있어, 계산 불연속체 역학 모델에 의한 메소해석 수법과의 대응을 고려할 때 적합하다.

2. 자연요소법

2.1 요소분할과 모델

Voronoi분할은 계산 기하학의 개념이며, 이차원의 경우, 평면에 배치된 유한개의 모점의 세력권을 나타내는 다각형 영역 분할도이다. 모점은 평면내의 임의의 위치에 설정할 수 있으며, Voronoi 다각형의 각 변, 즉 Voronoi 변은 그 양변의 모점의 수직

이등분선이 된다. Fig. 1은 모점(흑환점), Voronoi다각형(점선), Delaunay삼각형(실선) 및 그 외접원(파선)을 나타낸다. Voronoi다각형의 정점인 Voronoi점은 인접한 3개의 모점으로 이루어지는 Delaunay 삼각형의 외접원의 중심이 된다. Voronoi분할도는 다결정체의 형상모델로서 종종 이용된다.

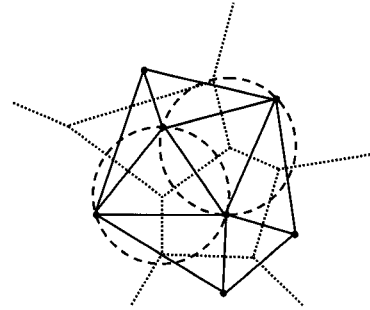


Fig. 1 Geometric structure for 7 nodes



Fig. 2 Construction of neighbor co-ordinates

2.2 형상함수

임의의 점 \mathbf{x} 가 Delaunay 삼각형(n_J, n_K, n_L)의 외접원의 내부에 있을 경우, 절점 n_J, n_K, n_L 는 \mathbf{x} 의 근방절점(Natural Neighbors)이라고 정의한다. 여기서, 이차 Voronoi 다각형 T_{IJ} 를 식(1)과 같이 정의한다. T_{IJ} 는 n_I 에 가장 가깝고, 다음으로 n_J 에 가까운 절점들의 집합이다.

$$T_{IJ} = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_K) \forall K \neq I, J \} \quad (1)$$

여기서, $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)$ 는 유클리드 공간 \mathbf{R}^2 에 있어서의

거리를 의미한다. 또한, T_{X_I} 의 면적을 $A_I(\mathbf{x})$ 라고 하면, 근방절점 I에 대한 형상함수 $\phi_I(\mathbf{x})$ 는 식(2)와 같이 정의된다.

$$\phi_I(\mathbf{x}) = A_I(\mathbf{x}) / A(\mathbf{x}) \quad (2)$$

여기서, I는 $1 \rightarrow n$, $A(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n A_I(\mathbf{x})$ 이고, n은 \mathbf{x} 의 근방절점의 총수가 된다. 예를 들어, Fig. 2에 있어서, 근방절점I에 대한 형상함수는 다음과 같다.

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \frac{A_{abfe}}{A_{abcd}} \quad (3)$$

따라서, 변위함수는 다음의 식과 같이 주어진다.

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (4)$$

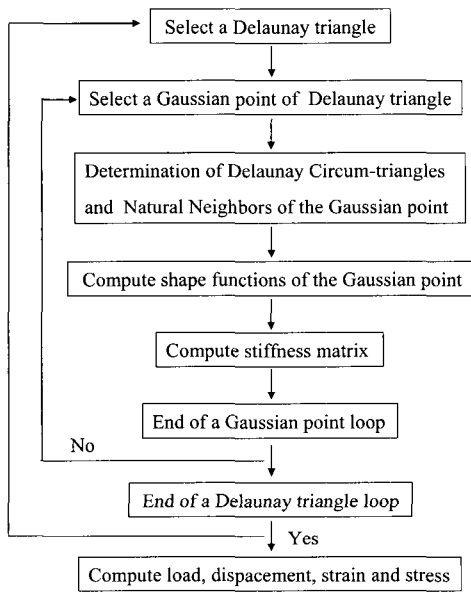


Fig. 3 Flow chart of computational procedure

자연요소법의 강성행렬은 유한요소법과 같이 수치적분에 의해 계산되지만, 그 계산은 Delaunay 삼각형 단위로 이루어진다. Fig. 3은 이러한 자연요소법의 계산 순서를 보여주고 있다. 먼저, 선택된 Delaunay 삼각형과 적분점에 대해, 자연 근방 절점들을 구하여 형상함수를 계산한다. 모든 적분점

에 대한 강성 행렬이 구성되면, 미지수인 힘, 변위, 변형률과 응력 등을 구한다.

2.3 마이크로 크랙의 역학적 효과 모델링

정방형 영역 내부에 미리 랜덤하게 다수의 마이크로 크랙을 분포시켜, 단축인장 또는 단축압축 매크로 응력 상태하의 변형을 해석함에 의해, 매크로 탄성정수(영의 계수와 프와송비)와 마이크로 크랙 밀도와와의 관계를 수치적으로 평가한다. 본 연구에서는 이차원 문제, 즉 모든 마이크로 크랙면이 동일 좌표축(z축)으로 평행한 경우를 다룬다. 이 경우의 마이크로 크랙 밀도를 다음 식으로 정의한다^[1].

$$\xi = \sqrt{N_T} \sum_{I=1}^{N_T} \frac{l_I^3}{8L^3} \quad (5)$$

여기서, L 은 정방형 영역의 변의 길이이고, N_T 는 마이크로 크랙의 총수이며, l_I 는 각 크랙의 길이이다.

마이크로 크랙은 계산 불연속체 역학 모델^[1]에 의한 메소 해석과 같이, Fig. 4의 Voronoi 다각형의 변상에 존재한다고 가정한다. 계산 불연속체 역학 모델에 있어서는, 이 위치에 강체 요소 간을 결합하는 스프링 계를 배치하고 있고, 이러한 스프링 정수를 제어함으로써, 폐쇄와 표면 마찰 등을 포함한 마이크로 크랙의 역학적 효과를 나타내고 있다. NEM을 이용한 본 연구에서는, 다음과 같이 마이크로 크랙의 역학적 영향을 표현한다. 즉, Fig. 5와 같이, 각 마이크로 크랙에 대해, 인접 절점으로부터 만들어지는 2개의 Delaunay삼각형(Δ_{123} , Δ_{134})이 정해진다. 이러한 삼각형 내부의 계 6개의 수치적 분점에서의 응력·변형률 관계를 형성하는 탄성계수 행렬의 값을 제어함으로써, 각 마이크로 크랙의 역학적 효과를 표현하고자 한다. 전체 좌표계에 있어서의 등방성 탄성계수 행렬 $[D_1]$ 은 다음과 같다.

$$[D_1] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

각 마이크로 크랙에 대해 Fig. 6과 같이 정의된 국소 좌표계에 의한 이방성 행렬을 다음과 같이 표시한다.

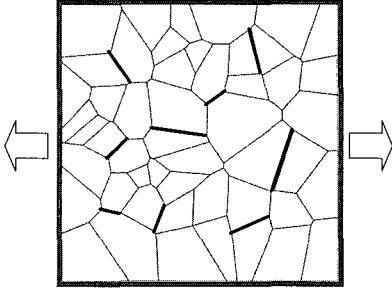


Fig. 4 Representation of microcracks

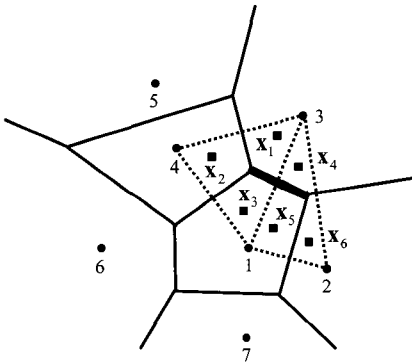


Fig. 5 Numerical consideration of microcracks

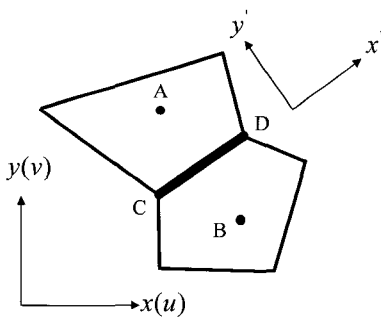


Fig. 6 Global coordinate system and local coordinate system for a microcrack

$$[D_2] = \frac{E_2'}{(1-n\nu_2'^2)} \begin{bmatrix} n' & n'\nu_2' & 0 \\ n'\nu_2' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m'(1-n\nu_2'^2) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$n' = \frac{E_1'}{E_2'}, m' = \frac{G_2'}{E_2'} = \frac{1}{2(1+\nu_2')} \quad (8)$$

여기서, n' 는 국소 좌표계에서의 x', y' 방향의 영의 계수 비, m' 는 y' 방향의 전단 계수와 영의 계수 비이다.

이러한 탄성계수 행렬 중의 탄성 정수를 조정함으로써, 마이크로 크랙의 역학적 효과를 근사한다. 즉, 개개의 마이크로 크랙의 역학적 효과를 그 근방에서 평균적으로 표현하고자 한다. 이 때, Fig. 5에서 마이크로 크랙에 가까운 4개의 적분점 $[x_1, x_3]$ 및 $[x_4, x_5]$ (이를 최근방 적분점이라 한다) 및 그 다음 가까운 적분점 $[x_2, x_6]$ (이를 근방 적분점이라 한다)에서 조정 내용을 변화시킨다.

3. 매크로 탄성 정수

랜덤한 분포를 가지는 다수의 마이크로 크랙을 포함한 정방형 고체에 단축인장 또는 단축압축 매크로 응력을 주어, 그 매크로 탄성정수를 NEM에 의한 메소 해석법에 의해 수치적으로 평가한다. Fig. 7은 각각 계산에 사용된 절점 배치도, Voronoi분할도 및 Delaunay삼각형을 나타낸다. Voronoi변환에서 랜덤하게 선택한 마이크로 크랙 분포도를 Fig. 8에 보인다. 마이크로 크랙의 수는 1500(마이크로 크랙 밀도:0.0749)이다.

3.1 크랙의 폐쇄를 무시한 매크로 탄성정수

Budiansky와 O'Connell의 근사 이론 해석^[5]과 같이, 마이크로 크랙의 폐쇄^[6]를 무시한 계산을 실시하였다. 즉, 마이크로 크랙을 포함하는 등방성 고체가 인장 매크로 응력을 받을 경우의 변형을, 마이크로 크랙의 폐쇄를 무시하여 계산하고, 마이크로 크랙 밀도와 매크로 탄성 정수의 관계를 구하였다.

계산함에 있어, 각 마이크로 크랙의 역학적 효과를 표현하기 위해서, 시계산에 의해 국소적 탄성정수를 다음과 같이 산정하였다.

(a) 최근방 적분점에서: $[D_1] \rightarrow 0$

(b) 근방 적분점에서: $[D_1] \rightarrow 0.2 \times [D_1(\nu = 0)]$

이 가정에 의해 계산된 Fig. 9의 계산결과가, 계산 불연속체 역학 모델에 의한 계산결과⁽¹⁾와 정량적으로 양호하게 대응하고 있음을 근거로 하여 위와 같이 채택하였다. 즉, 근방 적분점에서의 탄성정수 저감율을 0.2로 한 경우, 계산 불연속체 역학 모델에 의한 계산 결과와 총체적으로 양호한 대응을 나타낸다. 단, 0.2~0.5의 범위에서 별로 큰 차이는 보이지 않음을 알 수 있다.

Fig. 9는 마이크로 크랙 밀도와 매크로 탄성정수(영의 계수에 대해선 비손상체의 영의 계수로 표준화된 값)의 관계에 대한 계산 결과로서, 비손상체의 프와송비로서 $\nu = 0.3$ 의 값이 가정되었다. 이차원 모델과 삼차원 모델의 차이가 있기 때문에, 구해진 계산결과를 Budiansky와 O'Connell의 근사이론 해석 결과⁽⁵⁾와 직접 비교할 수 없지만, 영의 계수와 프와송비 모두 정성적 경향은 대응하고 있다. 즉, 양자 모두 마이크로 크랙 밀도의 증가에 따라 거의 같은 비율로 선형적으로 저하되고 있음을 알 수 있다.

3.2 크랙의 폐쇄를 고려한 매크로 탄성정수

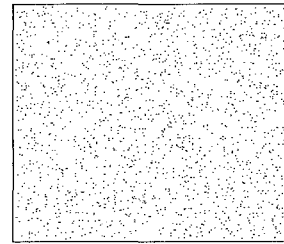
마이크로 크랙을 포함한 등방성 고체의, 인장 및 압축 매크로 응력하의 변형을, 마이크로 크랙의 폐쇄⁽⁶⁾를 고려하여 계산하고, 마이크로 크랙 밀도와 매크로 탄성정수의 관계를 구하였다. 마이크로 크랙의 폐쇄는 마이크로 크랙 양측의 질점변위로부터 다음 식에 의해 계산되는 법선 방향 상대변위 δ_n 의 부호에 의해 판정한다(Fig. 6을 참조)⁽¹⁾.

$$\delta_n = \frac{1}{l_{CD}} \cdot (x_{CD} \cdot (v_B - v_A) - y_{CD} \cdot (u_B - u_A)) \quad (9)$$

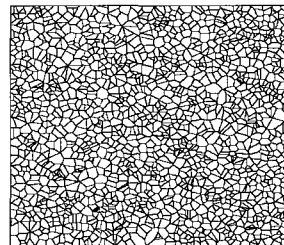
여기서, l_{CD} 는 마이크로 크랙의 길이, $x_{CD} = x_C - x_D$, $y_{CD} = y_C - y_D$ 이다. 즉, 이 값이 (+)일 경우는 마이크로 크랙은 열려 있고, (-)일 경우는 폐쇄되어 있다고 판정한다. 폐쇄되어 있는 마이크로 크랙은 존재하지 않는 것과 같다고 가정한다. 마이크로 크랙의 역학적 효과를 고려한 해석에 있어서, 다음과 같이 [A], [B], [C] 3종류의 가정을 설정하여 적용하였다. 이 때, 마이크로 크랙이 발생하지 않은 부분의 탄성계수 행렬은 $[D_1]$ 이다.

[A] 마이크로 크랙이 등방성이며, 폐쇄를 무시,

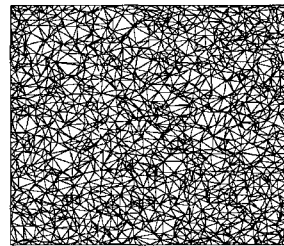
- (a) 최근방 적분점에서: $[D_1] \rightarrow 0$
- (b) 근방 적분점에서: $[D_1] \rightarrow 0.2 \times [D_1(\nu = 0)]$
- [B] 마이크로 크랙이 등방성이며, 폐쇄를 고려
즉, 법선방향 상대변위 $\delta_n \geq 0$ 의 경우,
- (a) 최근방 적분점에서: $[D_1] \rightarrow 0$



(a) Nodal grid



(b) Voronoi diagram



(c) Delaunay triangles

Fig. 7 Analyzed model for 1700 nodes

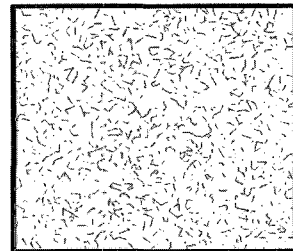
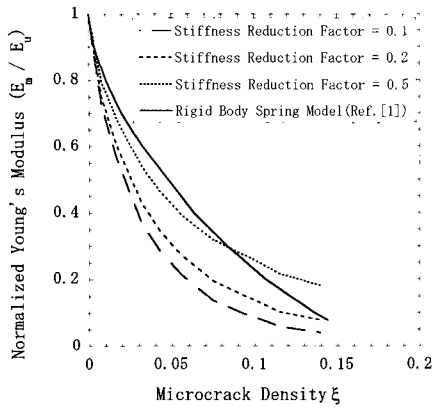
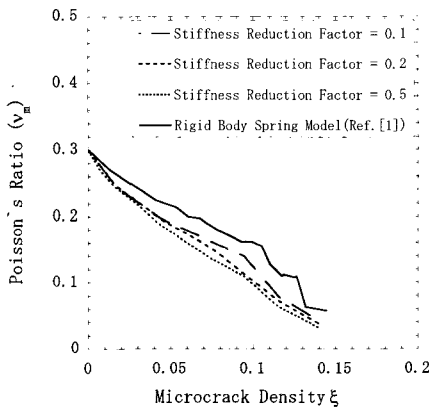


Fig. 8 Distributions of microcracks



(a) Macro Young's modulus



(b) Macro Poisson's ratio

Fig. 9 Determination of stiffness reduction factor

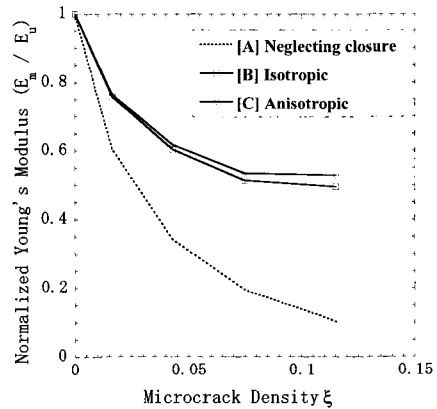
- (b) 근방 적분점에서: $[D_1] \rightarrow 0.2 \times [D_1(\nu = 0)]$
- [C] 마이크로 크랙이 이방성이며, 폐쇄를 고려.
즉, 법선방향 상대변위 $\delta_n \geq 0$ 의 경우.

- (a) 최근방 적분점에서: $E_2' \rightarrow 0$
- (b) 근방 적분점에서: $E_2' \rightarrow 0.2 \times E_2', \nu_2' \rightarrow 0$

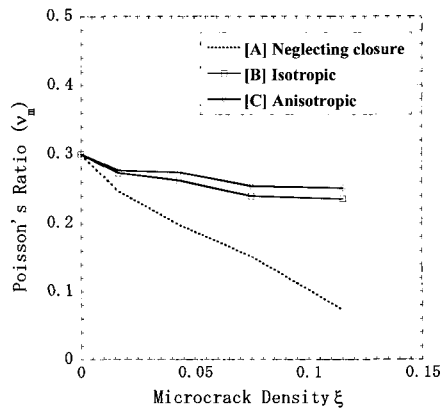
「마이크로 크랙이 등방성」이라 함은 등방성 탄성 계수 행렬에 의해 마이크로 크랙의 역학적 효과를 표현함을 의미하며, 「마이크로 크랙이 이방성」이라 함은 이방성 탄성계수 행렬에 의해 표현함을 의미한다.

Fig. 10은 인장 매크로 응력하의 계산 결과로서, 마이크로 크랙의 폐쇄를 고려함으로써, 영의 계수와 프와송비 모두 비손상체의 값으로부터 변동이

적어진다. 일부의 마이크로 크랙이 폐쇄되어, 실질적으로 마이크로 크랙 밀도가 저하되고 있음을 알 수 있다. 또한, 마이크로 크랙의 역학적 효과를 등방성이라 가정 한 경우와 이방성이라 가정 한 경우의 해는 거의 차이가 없었다. 이는 개개의 마이크로 크랙을 이방성이라 가정하더라도, 랜덤하게 분포하는 다수의 마이크로 크랙의 전체에 미치는 효과는 등방성을 보인다고 볼 수 있기 때문이다.



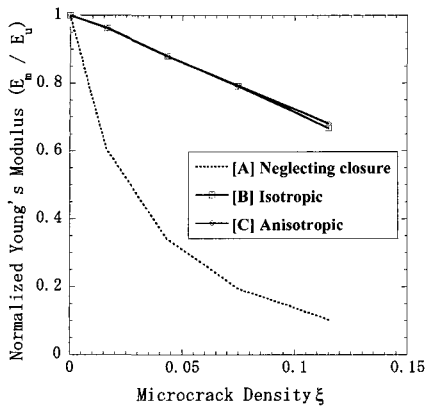
(a) Macro Young's modulus



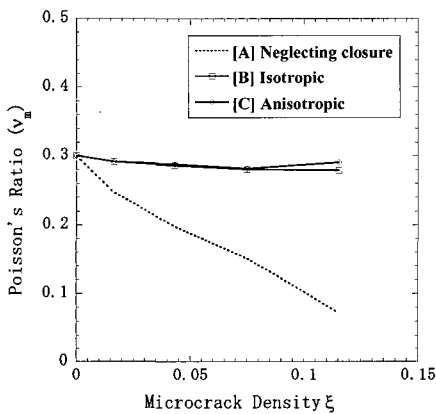
(b) Macro Poisson's ratio

Fig. 10 Macro elastic moduli versus microcrack density under tensile macrostress

Fig. 11은 압축 매크로 응력의 계산 결과로서, 인장 매크로 응력의 경우보다 많은 수의 크랙이 폐쇄됨에 따라 탄성정수의 변화는 약간 크게 됨을 알 수 있다.



(a) Macro Young's modulus



(b) Macro Poisson's ratio

Fig. 11 Macro elastic moduli versus microcrack density under compressive macrostress

4. 결 론

본 연구에서는, 자연요소법에 의한 메소 손상해석의 한 방법을 소개하였다. 즉, NEM에 의한 이산화 해석에 있어서, Voronoi변 근방의 탄성계수 행렬을 제어함으로써, Voronoi변에 존재하는 마이크로 크랙의 역학적 효과를 표현하였다. 이 방법에 의해, 매크로 인장 및 압축 응력이 작용할 때, 랜덤하게 분포한 마이크로 크랙을 포함한 등방성 재료의 매크로 탄성정수를 계산하여, 해석 결과를 계산 불연속체 역학 모델에 의한 해석 결과와 비교함으로써, 개개의 마이크로 크랙의 개구·폐쇄의 영향을 고려한 마이크로 크랙킹 거동 해석에, 본 수법이 유용함

을 보였다. 계산 순서가 복잡하게 되고, 마이크로 크랙을 물리적으로 충실히 표현하고 있지는 않지만, 계산 불연속체 역학 모델에 의한 메소 해석에서 요구되는 스프링 상수의 결정이 불필요한 점이 본 해석 수법의 특징이다.

참고문헌

- [1] Y. Toi and J.-S. Che, "Computational Damage Mechanics models for Brittle Microcracking Solids based on Mesoscopic Simulations", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 48, No. 4, pp. 483-498, 1994.
- [2] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming and P. Krysl, "Meshless Methods: An Overview and Recent Developments", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, No. 1, pp. 3-47, 1996.
- [3] T. Belytschko, Y. Y. Lu and L. Gu, "Element-free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 2, pp. 229-256, 1994.
- [4] N. Sukumar, B. Moran and T. Belytschko, "The Natural Element Method in Solid Mechanics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, No. 5, pp. 839-887, 1998.
- [5] B. Budiansky and R. J. O'Connell, "Elastic Moduli of a Cracked Solid", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 12, No. 2, pp. 81-97, 1976.
- [6] D. Krajcinovic, *Damage Mechanics*, North-Holland, Amsterdam, 1996.

저 자 소 개



강성수 (姜成洙)

1972년생, 1998년 부산대학교 기계설계공학과 졸업. 2000년 일본 동경대학교 대학원 환경해양공학과 졸업(석사). 2003년 일본 동경대학교 대학원 환경해양공학과 졸업(박사). 현재 전주대학교 기계자동차공학과 교수