

선전류에 의해 발생하는 자장의 해석을 위한 유한요소법과 해석해의 결합 기법

論 文
55P-3-5

Analysis of Magnetic Fields Induced by Line Currents using Coupling of FEM and Analytical Solution

金榮善[†]·趙大勳*·李基植**
(Young-Sun Kim · Dae-Hoon Cho · Ki-Sik Lee)

Abstract - The line current problem(2-dimensional space : point source) is not easy to analyze the magnetic field using the standard finite element method(FEM), such as overhead trolley line or transmission line. To supplement such a defect, this paper is proposed the coupling scheme of analytical solution and FEM. In analysis of the magnetic field using the standard FEM. If the current region is a relatively small compared to the whole region. Therefore, the current region must be finely divided using a large number of elements. And the large number of elements increase the number of unknown variables and the use of computer memories. In this paper, an analytical solution is suggested to supplement this weak points. When source is line current and the part of interest is far from line current, the analytical solution can be coupling with FEM at the boundary. Analytical solution can be described by the multiplication of two functions. One is power function of radius, the other is a trigonometric function of angle in the cylindrical coordinate system. There are integral constants of two types which can be established by fourier series expansion. Also fourier series is represented as the factor to apply the continuity of the magnetic vector potential and magnetic field intensity with tangential component at the boundary. To verify the proposed algorithm, we chose simplified model existing magnetic material in FE region. The results are compared with standard FE solution. And it is good agreed by increasing harmonic order.

Key Words : Line Current, Analytical Solution, Fourier Series, Coupling Scheme, FEM

1. 서 론

우리의 주위에서 쉽게 접하고 있는 전기철도의 가공 전차선과 주변의 송변전 설비 및 송전선로 등 전력설비에서 발생하는 극저주파(Extremely Low Frequency : ELF) 전자계는 생활과 밀접한 관계를 가지고 있다. 또한 오늘날 송전선로는 송전전압의 초고압화와 송전용량의 대용량화 등으로 전력설비나 장비에 전자기장의 영향을 광범위한 범위까지 미칠 수 있으므로 이에 대한 해석이 불가피하다[1].

유한요소법을 이용하여 전자장을 해석할 경우 해석 대상을 특별한 기하학적 형태의 요소로 분할하는 과정을 거쳐야 한다. 이때 자장의 변화가 심한 곳에는 요소의 크기를 다른 부분 보다 작게 하여야 한다. 또한, 주 관심영역은 유한요소법의 오차를 줄여서 좀 더 정확한 결과를 나타내게 하기 위하여 더욱 많은 미소요소로 분할하게 한다. 그리고 분할된 요소내의 함수분포를 적당한 근사함수로 설정하여 지배방정식을 구하고, 이들을 결합하여 전체 영역에 대한 선형대수방정식을 구한다. 그리하여 구하여진 해석모델의 근사해는 어

는 정도 정해(exact solution)에 근접할 수가 있게 된다[2,3].

전기철도의 가공 전차선이나 지상 전력선의 경우는 해석 대상에 비해 자장분포의 원인이 되는 소스 부분이 매우 작은 영역에 불과하다. 이때 유한요소해석은 소스 부분이 매우 작은 영역이므로 미세하게 요소분할을 하여야 한다. 그러므로 요소의 수가 증가되어 미지수가 증가하고, 이로 인해 전자계산기의 기억용량과 계산시간이 늘어나는 단점을 가지고 있다. 또한 2차원 유한요소 해석시 전류영역이 매우 작으므로 하나의 점으로 간주하는 선전류 문제(point source)로 다룬다면 유한요소 해석이 용이하지 않다[4].

본 논문에서는 이 문제를 해결하기 위해 유한요소법의 활용 기법중의 하나인 해석해와 유한요소법을 결합하여 전자장을 해석하는 방법을 제시하였다. 선전류를 포함하는 영역에서는 해석해를 적용하고, 이외의 영역에서는 유한요소법을 이용하여 결합하였다. 해석적인 해는 원통좌표계에서 반경에 대한 멱함수와 회전각도에 대한 삼각함수의 곱의 형태로 표현된다. 이때 두 종류의 적분 상수가 있는데, 이는 경계상의 포텐셜 값과 유한요소법의 경계 적분항을 푸리에급수로 전개한 계수로 표현된다.

제한한 알고리즘을 검증하기 위하여 자성체가 존재하는 모델을 설정하여 기존의 유한요소법과 제안한 방법의 해를 비교하였다. 해석 영역에서 자성체 주변의 포텐셜을 비교한 결과 제안한 방법에 의한 해와 기존의 유한요소법에 의한 해가 푸리에 급수 전개할 때 고조파 차수의 증가에 따라 근사함을 보였다.

[†] 교신저자, 正會員 : 成均館大 情報通信工學部 研究教授 · 工博
E-mail : youngsun@skku.edu

* 正會員 : 檀國大 工大 電氣工學科 博士課程

** 正會員 : 檀國大 工大 電氣工學科 教授 · 工博

接受日字 : 2006年 3月 17日

最終完了 : 2006年 6月 9日

2. 본 론

2.1 해석모델 및 해석해

그림 1과 같이 선전류원 I 와 재질이 서로 다른 두 영역 I 과 II를 갖는 해석 모델을 설정하고 유한요소법과 해석해의 결합을 통하여 원통좌표계에서 2차원 자장 해석을 실시하였다.

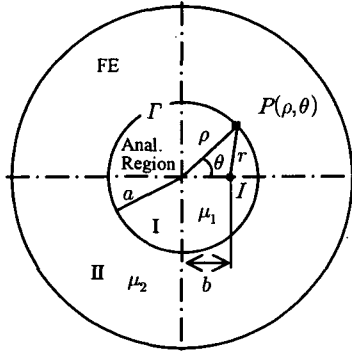


그림 1 해석 모델
Fig. 1 Analysis model

해석 영역에서 반경 ρ 가 영역 I ($\rho < a$)이나 II ($\rho > a$)에 위치하는 것과 무관하게 전류 I 에 의해 발생하는 자장의 포텐셜은 식 (1)처럼 표현 될 수 있다.

$$A = A^1 + A^2 \tag{1}$$

식 (1)에서 A^1 과 A^2 는 각각 푸아송 및 라플라스 방정식의 해이며, A_1 은 전류 I 에 의해서 A_2 는 경계 또는 재질에 의해서 결정되어지는 항으로 본다. 그리고 이들의 해는 발산정리와 변수분리법을 사용하여 각각 식 (2)와 (3)으로 표현된다. 본 논문에서 제시된 해석모델은 상하가 대칭인 우함수이므로 푸리에급수로 표현된 식 (3)에서 sine항은 제거될 수 있다. 하지만 일반적인 문제에도 적용하기 위하여 sine항을 그대로 두었다.

$$A^1 = \frac{\mu I}{2\pi} \ln r \tag{2}$$

$$A^2 = \mu \sum_{n=0}^{\infty} [(C_{1n} \rho^n + S_{1n} \rho^{-n}) \cos n\theta + (C_{2n} \rho^n + S_{2n} \rho^{-n}) \sin n\theta] \tag{3}$$

여기서,

$$r = \sqrt{\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos \theta}$$

$C_{1n}, C_{2n}, S_{1n}, S_{2n}$: 적분계수

영역 I 과 II에서 포텐셜을 구하기 위해서는 식 (1)에 식 (2), (3)을 적용하면 된다. 여기서 주의할 점은 유한한 포텐셜 값이 존재하기 위해서 영역 I에서는 ρ^{-n} 항의 계수가 0이 되고, 영역 II에서는 ρ^n 항의 계수가 0이 되어야 한다. 그러므로 영역 I에서는 식 (4), 영역 II에서는 식 (5)와

같은 해석해가 존재하게 된다.

$$A_I = \frac{\mu_1 I}{2\pi} \ln r + \mu_1 \sum_{n=0}^{\infty} [C_{1n} \rho^n \cos n\theta + C_{2n} \rho^n \sin n\theta] \tag{4}$$

$$A_{II} = \frac{\mu_2 I}{2\pi} \ln r + \mu_2 \sum_{n=0}^{\infty} [S_{1n} \rho^{-n} \cos n\theta + S_{2n} \rho^{-n} \sin n\theta] \tag{5}$$

2.2 수학적 모델링

변위 전류를 무시한 암페어 주회 법칙으로부터 유한요소법을 적용하여, 가중잔차법 중의 하나인 켈리킨법을 사용하면 다음과 같다.

$$\int_s \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \right] ds - \oint_r \frac{1}{\mu} N \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma = \int_s JN ds \tag{6}$$

이산화된 식 (6)을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

여기서,

- S_{nn} : 계행렬의 구성 요소
- A_1 : 경계의 포텐셜을 제외한 포텐셜
- A_2 : 경계 Γ 에서의 포텐셜
- B : 경계 적분항

식 (6)의 좌변의 두 번째 항은 경계적분항으로서 식 (8)과 같다.

$$B_j = - \oint_r N_j H_\theta d\Gamma \tag{8}$$

여기서,

N_j : 절점 j 에 대한 형상함수

식 (8)에서 H_θ 는 경계 Γ 에서 자계의 접선 성분이 연속이므로 식 (9)로 표현된다.

$$H_\theta = - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_I}{\partial \rho} \tag{9}$$

영역 I에서는 해석해를 이용하므로 식 (9)에서는 식 (4)의 A_I 이 선택되고, 적분계수 C_{1n}, C_{2n} 를 정리하여 H_θ 를 구하면 식 (10)과 같다.

$$H_\theta = -\frac{I}{2\pi} \frac{\rho - b \cos \theta}{\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos \theta} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[n \frac{1}{\rho} (C_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta) \right] \quad (10)$$

유한요소법으로 해석하려는 영역과 해석적 해를 구하려는 경계 Γ 에서 푸리에급수 형태를 취한 후 각 계수 C_n, S_n 은 푸리에급수 전개에 대한 일반 공식으로부터 식 (11)과 (12)처럼 표현된다.

$$C_n = \frac{1}{\pi \mu_1} \int_0^{2\pi} \left[A(\theta) - \frac{I}{2\pi} \ln r \right] \cos n\theta d\theta \quad (11)$$

$$S_n = \frac{1}{\pi \mu_1} \int_0^{2\pi} \left[A(\theta) - \frac{I}{2\pi} \ln r \right] \sin n\theta d\theta \quad (12)$$

유한요소법에서 보간함수를 1차함수로 가정하면 그림 2와 같이 경계상의 포텐셜 A 가 θ 에 대해 그려질 것이고 식 (11)과 (12)는 각각 식 (14), (15)와 같이 쓸 수 있다. 식 (13)은 푸리에급수 전개된 포텐셜의 상수항을 나타낸다.

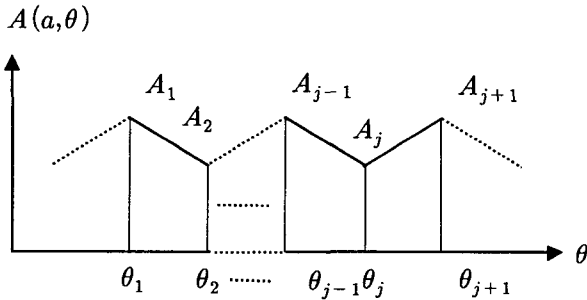


그림 2 경계상의 포텐셜
Fig. 2 Potentials at the boundary

$$C_0 = \frac{1}{2\pi \mu_1} \sum_{j=0}^{N_h-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} A(\theta) d\theta \quad (13)$$

$$C_n = \frac{1}{\pi \mu_1} \sum_{j=0}^{N_h-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} A(\theta) \cos n\theta d\theta - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{N_h-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{I}{2\pi} \ln r \cos n\theta d\theta \quad (14)$$

$$S_n = \frac{1}{\mu_1 \pi} \sum_{j=0}^{N_h-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} A(\theta) \sin n\theta d\theta - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{N_h-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{I}{2\pi} \ln r \sin n\theta d\theta \quad (15)$$

여기서,

N_h : 경계 Γ 에서의 절점수

θ 의 각 구간 $\theta_j \leq \theta \leq \theta_{j+1}$ 에서는 $A(a, \theta)$ 가 보간법에 의해 식 (16)처럼 표현이 가능하다.

$$A(a, \theta) = \frac{\theta_{j+1} - \theta}{\theta_{j+1} - \theta_j} A_j + \frac{\theta - \theta_j}{\theta_{j+1} - \theta_j} A_{j+1} \quad (16)$$

식 (16)을 식 (13)~(15)에 적용하여 삼각함수의 적분공식을 이용하여 구하면 식 (17)~(19)처럼 급수의 형태로 나타낼 수 있다.

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_h} Z_j A_j - (M_c)_0 \quad (17)$$

$$C_n = \frac{1}{\mu_1 \pi} \sum_{j=1}^{N_h} \frac{1}{n} U_{nj} A_j - (M_c)_n \quad (18)$$

$$S_n = \frac{1}{\mu_1 \pi} \sum_{j=1}^{N_h} \frac{1}{n} V_{nj} A_j - (M_s)_n \quad (19)$$

결국 식 (17)~(19)처럼 푸리에급수 전개된 계수 C_n, S_n 은 경계상의 절점의 포텐셜 값과 상수항으로 표현되었다. 푸리에급수 전개된 계수 C_n, S_n 을 $\{A_3\}$ 으로 정의하면 식 (20)처럼 표현할 수 있다.

$$\{A_3\} = \{C_1, S_1, C_2, S_2, \dots, C_{N_h}, S_{N_h}, C_0\}^T \quad (20)$$

여기서,

N_h : 푸리에급수 전개에 대한 고조파 수

이 경우 공간에 대한 고조파의 개수는 무한개가 되어야 하나 N_h 개로 잡았으며, 사례연구에서 고조파 차수에 따른 결과를 검토하였다. 그리고 식 (17)~(19)에 의해 식 (20)은 식 (21)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{A_3\} = [T] \{A_2\} - \{M\} \quad (21)$$

$$\{M\} = \{(M_c)_1, (M_s)_1, \dots, (M_c)_{N_h}, (M_s)_{N_h}, M_c\} \quad (22)$$

여기서,

$$T_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\pi n \mu_1} U_{nj} & : i = \text{홀수} \\ \frac{1}{\pi n \mu_1} V_{nj} & : i = \text{짝수} \end{cases}$$

2.3 경계 적분의 결합

식 (8)의 경계 적분항을 1차함수로 가정한 형상함수를 도입하여 정리하면 식 (23)이 된다.

$$B_j = -\oint_{\Gamma} N_j H_\theta d\Gamma = -\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left(\frac{\theta - \theta_{j-1}}{\theta_j - \theta_{j-1}} \right) H_\theta \rho d\theta - \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \left(\frac{\theta_{j+1} - \theta}{\theta_{j+1} - \theta_j} \right) H_\theta \rho d\theta \quad (23)$$

식 (10)을 식 (23)에 대입하여 정리하면 식 (24)과 같다.

$$B_j = \sum_{n=1}^{N_j} (U_{nj} C_n + V_{nj} S_n) + J_j \quad (24)$$

식 (24)는 다시 식 (21)처럼 계수 C_n, S_n 의 $\{A_3\}$ 로 표현할 수 있다.

$$\{B\} = [K] \{A_3\} + \{J\} \quad (25)$$

여기서,

$$K_{ij} = \begin{cases} U_{nj} & i = \text{홀수}, n = (j+1)/2 \\ V_{nj} & i = \text{짝수}, n = j/2 \end{cases}$$

J : 경계 적분항의 소스 부분

최종적으로 식 (21)과 (25)를 식 (7)에 대입하여 정리하면 식 (26)의 행렬식 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} - KT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M - J \end{bmatrix} \quad (26)$$

2.4 사례 연구

그림 3과 같이 공기 중에 비투자율 $\mu_r = 1000$ 인 자성체가 존재하고, 전류가 있는 모델을 설정하여 기존의 유한요소법과 제안한 방법으로 해를 구하였다. 해석영역의 크기는 가로, 세로가 1 [m]인 영역에 해석해를 적용하고자 하는 영역을 각각 $a_1 = 0.1$ [m] 와 $a_2 = 0.49$ [m]의 두 가지 경우로 하여 결과를 비교하였다.

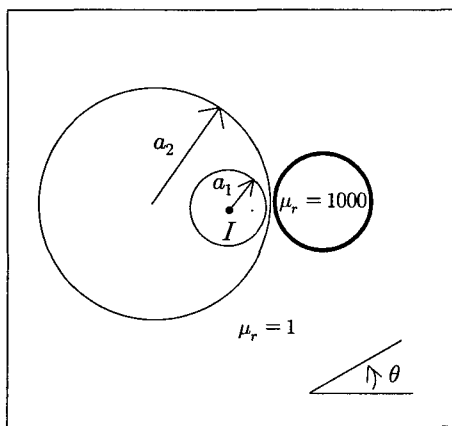
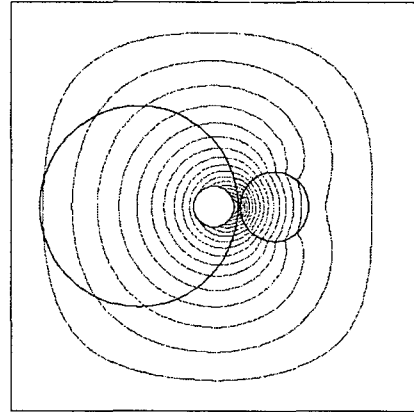


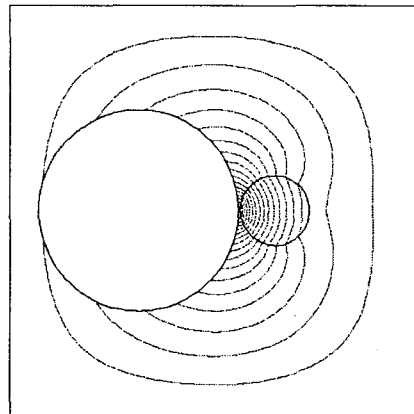
그림 3 예제 모델
Fig. 3 Example

그림 4는 해석적인 영역을 반지름이 a_1 및 a_2 로 설정하여 해석한 결과의 자속분포를 나타내고 있다. 두 모델의 경우

같은 형태의 요소 분할을 통하여 해석하였으며, 표 1은 유한요소법과 제안한 방법의 미지수와 계산시간을 보여주고 있다. 결합경계를 $\rho = a_2$ 로 한 경우 유한요소법과 비교하여 미지수와 계산 시간을 단축시켰다.



a) $\rho = a_1$



b) $\rho = a_2$

그림 4 제안한 방법에 의한 자기력선 분포

Fig. 4 Equipotential line by proposed method

표 1 유한요소법과 제안한 방법의 비교

Table 1 comparison between FEM and proposed method

방법	FEM	제안한 방법	
		$\rho = a_1$	$\rho = a_2$
미지수	2,161	2,103	1,347
시간(초)	51	44	12
Solver : Gauss elimination method CPU : Intel(R) Pentium 4 (3.2 GHz)			

그림 5, 6은 예제 모델의 자성체 영역의 주변을 따라 해석해를 적용할 때 고조파 차수를 20항과 40항으로 하여 포텐셜의 분포를 나타낸 것이다. 소스에서 가까운 영역의 변화가 심하므로 포텐셜 분포 중 $170 \leq \theta \leq 190$ 인 곳을 확대 도시하였다. 고조파 차수가 20항인 경우 $\rho = a_2$ 인 영역을 경계로 설정하였을 경우 유한요소법과 다소의 차이가 있으나, 고조파 차수를 40으로 한 경우 결합 경계를 넓게 설정하여도 기존의 방법과 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

참 고 문 헌

[1] 민석원, "송전선 인근의 생체 및 물체 표면 전계 분포 해석", 순천향산업기술연구소논문집, 제 2권 1 호, pp.39-48, 1996.
 [2] 任達鎬, 電氣系의 有限要素法, 東明社, 1987.
 [3] Young-Sun Kim, Ki-Sik Lee, Moon-Nam Lee, "Application of Infinite Boundary Condition to Finite Element Analysis", Proceeding of ICEE, VOL. 3, pp.1768-1772, July 2001.
 [4] Sheppard J. Salon, Finite Element Analysis of Electrical machine, Kluwer Academic Publishers, pp.197-207, 1995.

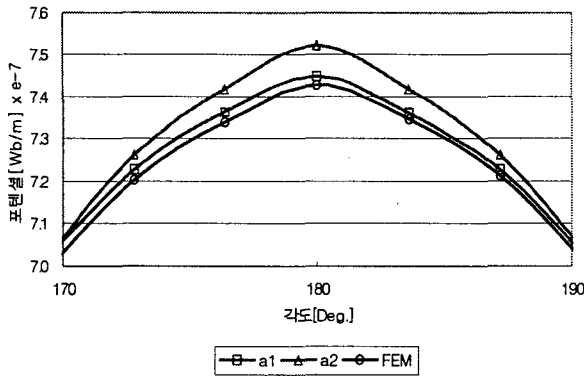


그림 5 자성체 주변의 포텐셜(고조파 차수 = 20)
 Fig. 5 Potentials around magnetic material($N_h = 20$)

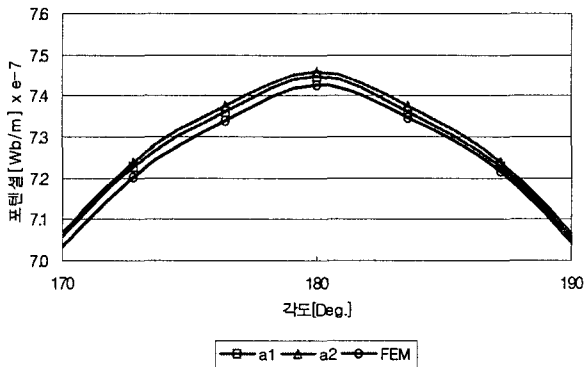


그림 6 자성체 주변의 포텐셜(고조파 차수 = 40)
 Fig. 6 Potentials around magnetic material($N_h = 40$)

3. 결 론

본 논문에서는 전기철도의 가공 전차선이나 송배전선로와 같이 소스가 선전류이고 관심 영역이 선전류원으로부터 멀리 떨어져 있는 경우, 선전류를 하나의 점으로 보아 일정한 영역까지는 해석해를 적용하고, 그 외는 유한요소법을 적용하여 이를 경계에서 결합하는 방법을 제시하였다.

본 방법은 소스가 존재하는 내부 영역의 요소분할을 수행하지 않고, 경계에서 자기벡터포텐셜과 자계강도의 접선성분의 연속성을 이용하여 1차 함수로 근사된 자기벡터포텐셜을 푸리에 급수로 대치하여 해석해와 결합하였다. 그러므로 기존의 유한요소법에 비해 내부 영역의 요소수에 해당하는 만큼의 계산 시간 및 기억 용량을 감축시켰다. 또한, 기존의 유한요소법은 소스 부분이 관심영역에 비해 작으면 선전류를 하나의 점으로 처리하기 힘든 반면 제안한 방법은 소스 부분을 요소분할 하지 않고 관심 부분의 더 세분화 할 수 있어 해석의 효율을 높일 수 있다.

제안한 방법의 검증을 위하여 자성체가 존재하는 모델을 채택하여 해석 영역에서 임의의 경로에 대하여 해석해 영역의 범위를 확장하였다. 자기벡터포텐셜 값을 비교한 결과 고조파 차수를 증가시키에 따라 이 둘의 해가 근사함을 검토하였다. 향후 선전류가 여러 개이거나, 소스가 교류인 경우의 문제에 적용하여 연구하는 것이 필요하다고 사료된다.

저 자 소 개



김 영 선 (金榮善)

1970년 10월 15일생. 1995년 단국대 과학교육과 학사. 1997년 동 대학원 전기공학과 석사. 2006년 동대학원 전기공학과 박사. 2002년-2005년 한국교육과정평가원 연구원. 2006년-현재 성균관대 정보통신공학부 연구교수. 관심분야 : 전자

장 수치해석, 전기기기, 다중물리현상 해석

Tel : 031-290-7177

E-mail : youngsun@skku.edu



조 대 훈 (趙大勳)

1963년 7월 19일생. 1986년 동국대 전자공학과 학사. 1988년 동국대 전자공학과 석사. 2004년-현재 단국대 전기공학과 박사과정. 1992년-2000년 (주)맥암 연구소 연구원. 2000년-현재 한국XIT(주) 연구소장. 관심분야: 접지시스템, 통신 시

스템의 노이즈 분석

Tel : 02-3471-1051

E-mail : dhcho@xitkorea.com



이 기 식 (李基植)

1952년 3월 30일생. 1973년 서울대 전기공학과 학사. 1977년 동 대학원 전기공학과 석사. 1985년 동 대학원 전기공학과 박사. 1978-현재 단국대 공대 교수. 관심분야 : 전자장 해석, 전기설비, 전기기기, 접지 시스템

Tel : 02-709-2576

E-mail : kisiklee@dankook.ac.kr