대한수학교육학회지 <학교수학> 제 8 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.8, No.3, 291-300. Sep. 2006

원의 넓이에 관련된 순환논법과 국소적 조직화

최 영 기*·홍 갑 주**

본 논문에서는 학교수학에서 발견할 수 있는 순환논법의 예로서 고등학교 미분과 적분 교과서에서 정적분을 통해 원의 넓이를 구하는 과정에서 발견되는 순환논법을 수학적으로 분석하고, 학교수학의 수준에서 원의 넓이에 관련된 몇 가지 증명 방법들의 의미를 비교 분석한다. 특히 원의 넓이에 대한 아르키메데스의 증명과정을 고찰하여 학교수학에서 국소적 조직화의 의미와 가치를 재조명한다.

Ⅰ. 서 론

공리적 방법이란 더 이상 증명을 요구하지 않고 받아들이는 명제, 즉 공리들을 바탕으로 연역 추론에 의하여 공리들이 함축하고 있는 명제들을 증명하는 방법이다. 학교수학에서는 명제의 진위를 밝히기 위한 방법으로서의 증명을 다루고 있으나, 명제의 진위 여부를 최종적으로 공리에 의거하여 판단하는 것은 아니다. 공리화되지 않은 수학체계에서는 한 명제를 다른 명제로부터 연역하고, 이 명제를 또 다른 명제로부터 연역하는 방식을 계속하여 결국에는 처음 출발한 명제로부터 연역하게 되는 순환논법적 추론이 발생하게 된다는 점에서, 엄밀한 기준으로 분석할 때 학교수학의 증명에서도 순환논법을 발견할 수 있을 것임을 예측할 수 있다.

물론 이러한 사실이 학교수학에서 수학의 완전한 공리적 전개가 필요함을 함의하는 것은 아니다. 학교수학에서 엄밀성의 추구만이 중요한 교육내용이라 할 수 없으며, 학생들의 수준에 비추어 볼 때도 공리적 방법의 도입에는 현실적인 어려움이 있다. 이에 관련하여, Freudenthal(1973)은 대부분의 학생들은 오직 짧은 연역만을 하고 이해할 수 있으며, 긴 증명을 전체로서 파악하거나 더욱이 다른 명제와의 연계성을 파악하는 데에는 어려움을 겪는다는 점을 지적하고, 수학 학습은 수학 자체의 일부를 부분적으로 조직하는 국소적 조직화 활동이 되어야 한다고 강조한 바 있다.

그러나 학교수학에서 순환논법의 구체적인 실례를 발견하여 분석하고, 여러 가지 증명 방법을 비교하는 것은 그 명제의 내용과 증명과정에 대한 논의구조를 풍부히 함으로써 교과내용에 대한 깊은 이해를 제공한다는 점에서 현장 교사와 연구자들에게 의미가 있을 것이며, 그 논의 결과는 학생들에게 수학의 학문적 특성으로서 순환논법과 공리화의 문제를 소개하는 수업 주제로 활용될 수 있을 것이라 기대된

* 서울대학교(yochoi@snu.ac.kr)
** 서울대학교 대학원(gapdol@empal.com)

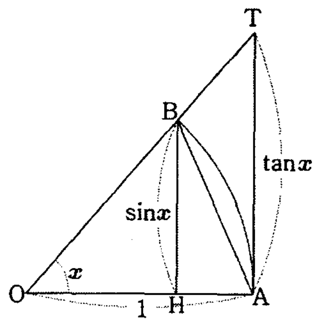
다. 이러한 관점에서, 본 논문에서는 고등학교 미분과 적분 교과서를 검토하여 원의 넓이공식 유도과정 속의 순환논법을 발견하고, 이를 수학적으로 분석한다. 또한 원의 넓이에 대한 고대 그리스 수학자 아르키메데스의 증명을 이 순환논법과 관련하여 살펴보고, 특히 그가 이 증명에서 공리로 삼은 원리를 고찰하여 국소적 조직화 활동의 의미와 가치에 대한 시사점을 찾는다. 이러한 고찰을 바탕으로 학교수학에서 순환논법과 공리화의 문제를 교육내용으로서 다루는 것의 가능성과 의미를 간략히 논의하고자 한다.

II. 원의 넓이와 순환논법

1. 우리나라 고등학교 교과서에 나타난 순환논법

우리나라 고등학교의 미분과 적분 교과서에서는 반지름 1인 원의 넓이를 정적분 $2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ 의 값으로서 구한다. $x=\sin t$ 로 두는 치환적분을 이용하면 그 값이 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1+\cos 2t dt$ 과 같음을 알게 되는데, 미적분학의 기본정리를 사용하여 이 값을 구하기 위해서는 $\cos t$의 부정적분이 무엇인지 알아야 한다. 실제로 교과서에서는 먼저 $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ 임을 보인 다음, $\sin t$의 도함수가 $\cos t$임을 보임으로써, $\cos t$의 부정적분이 $\sin t$임을 증명한다(박규홍 외, 2002; 양승갑 외, 2002; 이강섭 외, 2002; 임재훈 외, 2002).

그러나 원의 넓이에 이르는 이러한 과정은 전체적으로 볼 때 일종의 순환논법을 이루는 것으로 보인다. $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ 의 증명 과정에서는 아래의 [그림 II-1]에서 ($\triangle$OAB의 넓이) < (부채꼴 OAB의 넓이) < ($\triangle$OAT의 넓이) 라는 사실로부터 $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$, 즉 $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ 라는 식을 얻는데, 중심각이 x이고 반지름이 1인 부채꼴의 넓이가 $\frac{1}{2}x$ 라는 것은 반지름 1인 원의 넓이가 π라는 사실로부터 유도되기 때문이다. 즉, 원의 넓이를 구하는 과정에서 원의 넓이를 이용한 것이다.



[그림 II-1] $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ 임의 증명

한편 우리나라의 교육과정상 원의 넓이 공식은 이미 초등학교에서 제시되는데, 여기서는 원을 부채꼴로 쪼갠 후 직사각형에 가까운 모양으로 재배열하는 방법을 사용한다(교육인적자원부, 2003). 이때 부채꼴의 현의 길이에 대한 합의 극한이 호의 길이의 합과 같다는 사실을 직관적으로 받아들이는데, 반지름 1인 원을 n등분한 부채꼴 하나에 대한 현의 길이는 $2\sin(\pi/n)$, 호의 길이는 $2\pi/n$이므로, 이 상황을 식으로 나타내 보면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot 2\sin(\pi/n)}{n\cdot(2\pi/n)}\right)=1$ 이 된다. 즉, 여기서 받아들인 가정 속에는 $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ 이라는 것이 내재되어 있음을 알 수 있다.

2. 현대수학적 해법

학교수학 내에서의 이러한 분석에 이어, 엄밀하게 전개되는 현대수학의 방법을 이용한다면 어떻게 순환논법의 문제를 피하여 원의 넓이를 다룰 수 있는지 고찰하고자 한다.

살펴본 바와 같이, 기하학적 직관 혹은 순환논법의 문제는 기하학적으로 정의된 삼각함수의 미분 과정에서 개입된 것인 바, 삼각함수에 대한 기하학적 정의를 피하는 방법을 그 해법으로서 고려할 수 있다. 실제로, 극한과 실수계에 대한 직관적인 이해에 기초하는 대학의 미적분학에서는 sin과 cos 함수를 기하학적으로 정의하고 그 도함수를 앞에서와 같은 방법으로 구한 후, 그 급수표현 $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 을 정리로서 얻는 반면, 완비순서체로서의 실수계와 극한에 대한 엄밀한 정의를 바탕으로 하는 실해석학에서는 오히려 그 급수표현 자체를 $\sin x$와 $\cos x$의 정의로 삼는 것이 일반적이다(정동명 · 조승제, 1992; Bartle & Sherbert, 1992).[1)]

이렇게 급수로서 정의된 $\sin x$와 $\cos x$가 우리가 기하학적으로 정의한 $\sin x$와 $\cos x$에 대해 요구하는 모든 성질들을 가지고 있음이 증명될 수 있고, 이때 순환논법의 문제는 발생하지 않는다. 이렇게 순환논법의 문제를 피하여 $2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ 값을 구할 수 있게 된 것으로 '원'의 넓이를 구한 것이라 간주한다면 순환논법의 문제는 해결된 것이라 할 수 있다.

그러나, 더 나아가 원의 넓이를 구하는 문제를 완성된 평면 기하학의 관점에서 다루고자 한다면 이보다 더욱 많은 수학적 작업이 필요하다. 실해석학에서 급수로 정의된 $\sin x$, $\cos x$의 x는 각이라는 의미를 가질 필요가 없다(Langer, 1957). 실해석학에서 다루는 주된 대상은 수열과 함수이며 이는 평면이라는 기하학적 공간을 전제로 하는 개념이 아니다. $x^2+y^2=1$을 원으로, $2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$을 원의 넓이로 해석하고, 원과 다른 도형들 사이의 기하학적인 관계들을 완전하게 다루기 위해서는, 거리, 각, 곡선, 곡선의 길이, 폐곡선으로 둘러싸인 영역, 영역의 넓이 등의 개념을 포함하고 있는 평면이 이에 앞서 구성되어 있어야 한다. 결국, 평면기하학을 실해석학을 기반하여 완전하게 다루기 위해서는 실수론으로부터 기하학을 건설하는 보다 정교한 과정이 필요함을 알 수 있다.

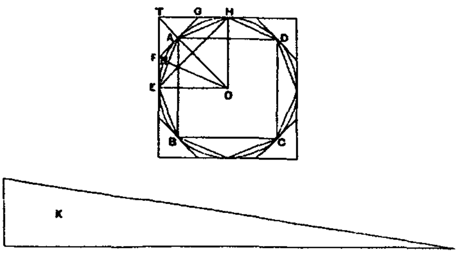
학교수학에서는 평면과 도형에 대한 우리의 경험으로부터 얻은 직관적 이해에 기초하여 이러한 과정을 생략하고 있으며, 따라서 원의 넓이를 구하는 과정에서 발견되는 상기의 순환논법 혹은 직관에 의거한 논증은 학교수학을 공리적 방법의 엄밀한 기준에서 고찰할 때 필연적으로 발견될 수밖에 없는 문제이다. 학교수학은 이와 같이 엄밀한 수학적인 체계를 전제로 할 수 없는 상황에서 많은 수학적 결과물을 얻어야 하는 상황 속에 있다고 할 수 있다.

III. 아르키메데스의 공리화

고대 그리스의 아르키메데스는 자신의 책 《원의 측정》에서 원주율의 값을 구할 수 있는 재귀적인 절차를 제시하고, 실제로 그 값을 정밀하게 계산한 것으로 잘 알려져 있다(Dijksterhuis, 1987). 그런데, 그가 원주율의 값

1) 혹은 미분방정식 $y''=-y$의 급수해로서 $\sin x$와 $\cos x$를 정의할 수도 있다.

을 구체적으로 계산한 것은 이 책의 세 번째 명제에 이르러서이다.[2] 그가 첫 번째로 증명한 명제는 원주율의 수치적인 크기에 관한 것이 아니라 원의 넓이와 둘레 사이의 수학적 관계성에 대한 명제로서, 원의 넓이는 그 원의 둘레와 반지름을 각각 밑변과 높이로 하는 직각삼각형의 넓이와 정확히 같다는 것이다([그림 Ⅲ-1]). 이는 원의 넓이에 대한 비례상수와 원의 둘레에 대한 비례상수가 얼마인지 계산하기 전에 그 두 값이 완전히 일치한다는 것을 먼저 알 수 있다는 말이다.[3] 현대에 비해 절대적으로 부족한 수학적 도구를 가지고 있었던 아르키메데스가 어떻게 순환논법에 빠지지 않고 첫 번째 명제의 증명에 이를 수 있었는가를 고찰하는 것은 의미가 있을 것으로 보인다.



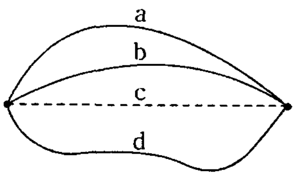
[그림 Ⅲ-1] 《원의 측정》의 명제 1 (Heath, 2002)

첫 번째 명제의 증명을 요약하면 다음과 같다. 우선, 내접다각형과 외접다각형의 변의 개수를 두 배로 계속하여 늘임으로써 원의 넓이를 원하는 만큼 가까이 근사할 수 있음을 소진법을 통해 보일 수 있다. 따라서 원의 넓이가 주어진 직각삼각형의 넓이보다 크다고 가정하면, 내접하는 정다각형으로도 그 직각삼각형의 넓이보다 크도록 할 수 있는데, 그것은 불가능하다. 내접하는 정다각형의 둘레의 길이는 원의 둘레보다 짧고, 내접하는 정다각형의 각 변을 밑변으로 하고 원의 중심을 꼭지점으로 하는 삼각형의 높이는 원의 반지름보다 짧기 때문에 그 삼각형들의 넓이 합은 주어진 직각삼각형의 넓이보다 작아야 하기 때문이다. 따라서 원의 넓이는 주어진 직각삼각형의 넓이보다 작거나 같다. 외접다각형에 대한 비슷한 논법으로, 원의 넓이가 주어진 직각삼각형의 넓이보다 크거나 같음도 보일 수 있다. 그러므로 원의 넓이는 주어진 직각삼각형의 넓이와 같아야 한다.

그런데, 이 증명을 살펴보면 원의 둘레가 내접다각형의 둘레보다는 길고 외접다각형의 둘레보다는 짧다는 사실이 이용되었으며, 따라서 이것은 미리 정리로서 증명되어 있어야 할 사실이다. 그러나 실질적으로 아르키메데스는 이 사실을 증명하지 않았다. 대신, 그는 이 사실을 곧바로 유도하는 다음의 두 원리를 공리로 받아들였다. 즉, 그가 《구와 기둥에 대해》의 1권에서 설정한 다섯 가지 공리 중 첫 번째 것은 양 끝점을 공유하는 곡선들 중 선분이 가장 길이가 짧다는 것이며, 두 번째 것은 그 선분을 기준으로 같은 쪽으로 볼록한 두 곡선 중 안쪽의 곡선이 길이가 더 짧다는 것이다(그림 Ⅲ-2). 이 두 원리는 기하학적 직관에 의해 완전히 자명해 보이는 것이지만, 첫 번째 명제에서의 수학적 관계성은 이 원리들을 이용하여 비로소 증명된다.

2) 이 명제에서, 아르키메데스는 정96각형의 둘레의 길이를 구하여 원주율이 $3\frac{10}{71}$보다 크고 $3\frac{1}{7}$보다 작은 값임을 보였다.

3) 반지름이 r인(=지름이 $2r$인) 원의 넓이를 ar^2, 둘레의 길이를 $b \cdot 2r$이라 했을 때, 원의 넓이와 삼각형의 넓이가 같다면, $ar^2 = \frac{1}{2}(2br)r$. 즉, $a = b$.



[그림 III-2] 아르키메데스의 공리는 이 곡선들 중 c의 길이가 가장 짧고, b는 a보다 짧다는 것을 말한다.

물론, 그가 공리로 가정한 원리 역시 현대적인 관점에서 보면 직관에 의존하는 것이다. 실제로, 일반적인 곡선의 길이를 정의하고 그 길이를 비교하기 위해서는 곡선을 대수식으로 표현할 수 있어야 하며 함수의 미분과 적분에 대한 일반적인 이론이 필요하다. 그러나 당시의 수학적 도구를 통해 증명할 수 없다는 이유로, 수학적 '참'임이 확실한 원리를 포기하는 것이 아니라, 그것을 공리로 받아들임으로써, 아르키메데스는 원의 넓이에 관련된 비례상수와 원의 둘레에 관련된 비례상수가 완전히 일치한다는 정교한 수학적 관계성을 밝힐 수 있었다.

아르키메데스의 이러한 연구 방법은 당시로서 최선의 선택이라 할 수 있다. 그의 공리는 당시로서 더 근본적인 원리로부터 증명할 수는 없는 것이었지만, 기하학적 직관에 의해 완전히 자명한 것이었고, 같은 방향으로 볼록한 곡선들에 대해 한정된 단순한 원리였지만 그가 당면한 문제를 해결하기에는 충분했다. 아르키메데스는 이 증명에서 자신의 수준에서 자명하게 받아들일 수 있는 원리가 무엇인지 모색하고, 그로부터 출발한 엄밀한 논리전개를 통해 원하는 수학적 결과를 얻어내는 '합리적인 융통성'을 보여주었으며, 이는 국소적 조직화의 의미와 가치를 보여주는 하나의 역사적 사례라 할 수 있다.

원의 넓이에 대한 유클리드의 결과와 비교하면 아르키메데스의 방법의 의미가 더욱 분명해진다. 유클리드는 《원론》 12권의 명제 2에서 원의 넓이가 그 반지름의 제곱에 비례한다는 사실을 엄밀한 소진법의 논증을 통해 밝혔다 (Heath, 1956). 그러나 비례상수에 대한 상기의 사실은 밝히지 못했다. 그 이유에 대해서는 논의의 여지가 있겠지만, 유클리드는 상기의 사실을 보장해 주는 원리를 그의 공리 속에 포함하지 않았고, 그 결과로 원의 둘레의 길이와 넓이 사이에 내재된 수학적 관계성에 이를 수 없었다.

IV. 교육적 논의

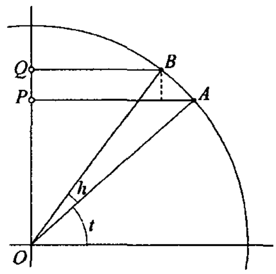
아르키메데스의 증명은 삼각함수 및 그에 대한 정적분을 사용하지 않는 기하학적 증명이라는 점에서, 미적분학의 지식을 전제하지 않고 학생들에게 원의 넓이를 정확하게 설명할 수 있는 방법이다. 더욱이 이 증명과정에 극한의 수학적 정의 및 정적분의 개념이 포함되어 있다는 점에서, 이 증명은 오히려 그 개념들을 도입하기 위한 좋은 예로서 활용될 수 있을 것이다. 그러나 미적분학의 기본정리를 통한 정적분의 일반적인 계산법을 다룬 이후에 그 응용문제로서 원의 넓이를 제시하고 있는 현행 교과서의 맥락에 비추어, 아르키메데스의 증명을 교과서의 증명과 같은 선상에서 비교하는 것은 적당하지 못할 것이다. 이에, 여기서는 원의 넓이와 관련하여 교과서와 같은 맥락에서 제시할 수 있는 다른 증명들을 소개하고 현행 교과서의 증명과 비교함으로써 학교수학에서 순환논법과 공리화의 문제를 어떻게 받아들여야 할 것인가에 대해 간략히 논의하고자 한다.

앞에서 밝힌 바와 같이, 우리나라 미분과 적분 교과서의 증명에서는 [그림 II-1]의 부채꼴과 삼각형 영역의 포함관계에 의해, 필요한 부등식이 의심의 여지없이 유도된다. 한 영역이

다른 영역을 포함하고 있을 때 포함하는 영역이 포함되는 영역보다 넓이가 크다는 사실은 넓이에 대한 일상적인 관념의 일부로서 자명하게 받아들일 수 있기 때문이다. 반면, 어떤 미적분학 교재들은 원의 넓이를 사용하지 않는 다음과 같은 방법을 사용하여 sin의 도함수를 구한다. 이 증명방법들은 순환논법의 문제를 형식상으로 드러내지 않는다.

Stewart(2001)의 미적분학 교재에서는 [그림 II-1]과 같은 그림에서, 세 도형의 넓이가 아닌, 선분 BH, 호 AB, 선분 AT의 길이를 비교하여 $\sin x < x$, $x < \frac{\sin x}{\cos x}$ 라는 부등식을 얻고, 이로부터 $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ 를 구한다. 이 증명에서는 호의 길이와 선분의 길이 비교에 있어서 기하학적 직관을 사용하게 되지만, 이 직관은 [그림 III-1]과 같이 내접 정다각형과 외접 정다각형을 그리고 관찰할 때 확실한 것으로 받아들일 수 있을 것이다. 이 직관은 양 끝점을 공유하고 같은 쪽으로 볼록한 곡선들 중 안쪽의 곡선일수록 길이가 더 짧다는 것으로, 아르키메데스는 공리로 설정했던 바로 그 원리에 대응하는 것이다.

또한, 미국 Exeter 고등학교의 미적분학 교재(Mathematics Department of Phillips Exeter Academy, 2002)에서는 $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ 임의 증명을 거치지 않고 sin의 도함수를 다음과 같이 곧바로 얻는다. [그림 IV-1]의 단위원에서 h가 매우 작은 값일 때 현 AB의 길이는 호 AB의 길이와 거의 일치하며, 각 BAP는 $\frac{\pi}{2}-t$와 거의 일치한다. 따라서 $\sin(t+h)-\sin t$ 즉, 선분 PQ의 길이는 $h\cos t$에 가깝게 되며, 이로부터 $\sin' t = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(t+h)-\sin t}{h} = \cos t$ 임을 안다는 것이다. 이 방법은 $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ 임의 증명을 거치지 않는다는 점에서 간결하며, $\sin t$의 순간적 변화량 즉, 선분 PQ의 길이가 t에 대한 cos값에 비례한다는 사실을 시각적으로 비교적 분명하게 보여준다는 점에서 의미가 있다. 그러나 이 증명 역시 선분과 호의 길이에 대한 직관에 의존하고 있다.



[그림 IV-1] $\sin' t=\cos t$ 임의 증명

이 상황을 요약해 보면, 원의 넓이를 이용한 교과서의 증명은 곡선의 길이 비교에 사용되는 직관을 피하는 대신 순환논법을 내포하며, 이와 반대로 호의 길이를 이용하는 방법들은 순환논법을 피하는 대신 기하학적 직관에 의존한다고 볼 수 있다. 즉, 수학적 엄밀성의 관점에서 어느 한 방법이 다른 것 보다 절대적으로 우월하다고 볼 수는 없다. 결국, 원의 넓이에 대한 이러한 문제는 단지 엄밀성의 문제가 아닌, 학교수학의 상황에서 순환논법과 공리화의 문제를 어떻게 이해해야 하는가에 대한 보다 일반적인 논의를 바탕으로 다루어져야 할 것으로 보인다.

우선, 순환논법은 명제들을 전체적으로 고찰하였을 때 비로소 발견되는 것일 뿐, 체계 전반에 대한 이러한 고찰이 현재의 일반적인 학교수학의 경험 속에서 발생할 기회는 많지 않음이 사실이다. 따라서 이상의 논의가 학생들에 의해 순환논법이 지적될 가능성이 있기 때

문에 곧바로 현행 교과서의 문제점을 지적하거나 지도 방법의 변경이 필요함을 주장하는 것은 아니다.

더욱이, 앞에서 살펴본 바와 같이, 학교수학의 수준에서 원과 같은 특정한 대상을 다루기 위해 필요한 모든 일반적인 수학적 체계를 갖추고 시작할 수는 없는 것 또한 사실이다. 학생들은 제한적이더라도 지금 다루고 있는 대상을 설명해 줄 수 있는 어떤 원리들로부터 출발해야 한다. Freudenthal(1973)은 이에 대해, 국소적으로 조직화하는 것은 수학에서 불완전하거나 부정확한 활동이 아니며, 학생들에게 자명하다고 생각되는 곳이야말로 국소적 조직화에 있어서 엄밀성의 기준이 된다고 한 바 있다. 이러한 입장에서는 고등학교 과정의 학생들에게 이미 자명한 사실인 원의 넓이에 대한 지식으로부터 $\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$ 임을 보이는 것, $\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$ 임을 이용하여 $\sin t$의 도함수가 $\cos t$임을 보이는 것, 치환적분을 통해 원의 넓이 즉, $2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$의 값을 구하는 것 각각은 학교수학에서 정당한 증명일 뿐 아니라, 원과 삼각함수, 원호의 길이와 현의 길이, sin과 cos의 관계성을 드러낸다는 점에서 의미 있는 증명이라 할 수 있다.

요컨대, 순환논법은 학생들로부터 필연적으로 제기되기 때문에 학교수학에서 문제가 되는 것은 아닐 것이며, 학교수학의 증명들을 엄밀한 수학의 기준으로 판단하여 잘못된 것이라 말할 수는 없다. 오히려 순환논법 및 공리화의 문제는 수학의 형식적 구조 역시 학교수학의 지도내용이 될 수 있다는 입장에서 하나의 수업주제로 다룰 가치가 있을 것으로 보인다. 수학적 증명의 의미는 순환논법이 발생하는 맥락과 그에 따른 공리화의 필요성을 이해할 때 더욱 완전해지며, 수학의 학문성을 집약적으로 드러내는 하나의 측면이 바로 공리적 방법이기 때문이다.

더욱이, 공리적 방법이 제기되는 맥락은 학생들의 경험과 완전히 무관한 것이 아니다. 학생들이 기하학적 증명을 할 때 어떤 알려진 다른 명제를 그 증명에 이용해도 되는지 질문하는 것을 통해 알 수 있듯이, 명제간의 선후관계 정립에 대한 필요성 자체는 막연하게나마 학생들이 증명을 수행하는 과정에서 자연스럽게 제기될 수 있는 문제이다. 학교수학의 내용을 완전히 공리적으로 전개할 수는 없다 할지라도, 바로 이러한 질문에 들어있는 막연한 문제의식을 명료하게 드러내는 것으로부터 출발하여 학생들에게 공리화의 의미와 필요성을 이해시키는 것은 가능할 것으로 보인다.

지금 다루고 있는 증명의 의미와 한계를 이해하고 수학적 증명을 하는 것과 그렇지 않은 채 증명을 하는 것을 같은 활동이라 할 수는 없을 것이다. 원의 넓이에 대한 아르키메데스의 증명방법에서 찾아본 국소적 수학화의 일면도 이러한 관점에서 이해할 때 더욱 의미가 있다. 언급한 바와 같이, 곡선의 길이에 대해 아르키메데스가 공리로 받아들인 원리도 현대수학의 관점에서 보면 직관에 해당하는 것이다. 그러나 그는 수학에서 공리화의 의미와 필요성을 명확히 이해하고 그의 연구를 이러한 원리를 상정하여 전개했다. 곡선의 길이에 대한 그의 원리는 수학적 '참'임이 확실했지만, 당시로서는 그것을 증명할 수학적 도구와 근본적인 원리가 아직 갖추어져 있지 않았을 뿐이며, 나중에 그 도구와 원리가 발견되었을 때 증명을 보충할 수 있는 것이었다. 이러한 방법론적 관점에서 그의 증명은 수학적으로 엄밀한 것이라 할 수 있으며, 수학자로서 그의 위상은 더욱 높게 평가될 수 있다. 학생들 역시 수학의 학

문적 특성으로서 공리적 방법에 대한 이해를 가질 때, 국소적 조직화라 불리는 그들 스스로의 활동의 의미를 더 명확히 할 수 있을 것이다.

V. 결론 및 제언

본 논문에서는 학교수학에서 발견되는 순환논법의 예로서, 원의 넓이공식 증명 과정에서의 순환논법을 제시하고 수학적으로 분석하였다. 이 과정은 원의 넓이를 가정하고 원의 넓이를 구한다는 점에서 순환논법을 이루고 있었다. 현행 미분과 적분 교과서와 같은 맥락에서 제시될 수 있는 다른 증명방법들은 원의 넓이를 사용하지 않고 삼각함수의 미분을 구함으로써 순환논법을 형식상 드러나지 않도록 하고 있으나 이 증명들은 다시 기하학적 직관에 의존하고 있었다. 결국, 이 순환논법은 완비순서체와 극한에 대한 엄밀한 정의를 바탕으로 하는 현대수학의 방법 하에서 비로소 해결될 수 있음을 살펴보았다.

그러나, 프로이덴탈의 주장과 같이 학교수학의 주된 활동은 수학 자체의 일부를 부분적으로 조직하는 국소적 수학화가 되어야 할 것임이 사실이다. 이와 관련하여, 현대적 수학의 개념을 쓰지 않은 아르키메데스의 방법은 국소적 조직화의 의미와 가치를 보여주는 좋은 예이다. 그는 곡선의 길이 비교에 대한 기본적인 원리를 공리로서 받아들이고 이로부터 원의 넓이와 원의 둘레 사이의 정교한 수학적 관계성을 밝혀내었다.

수학의 형식적 구조 역시 교육내용이 될 수 있다는 입장에서, 순환논법 및 공리화의 문제는 학교수학의 하나의 수업주제로 다룰 가치가 있을 것으로 보인다. 본 논문에서 살펴본 원의 넓이공식 증명과정에서의 순환논법은 현장 교사와 연구자들에게 학교수학에 관련된 교과지식과 수학의 구조에 대한 이해와 안목을 제공할 수 있을 것으로 기대된다. 본 논문에서 예로 제시한 증명들은 수학적 체계, 수학의 엄밀성, 직관에 의한 증명의 타당성, 건전한 직관의 범위 등에 관련된 다양한 관점을 제시한다. 본 논문을 계기로 하여 이 문제에 대한 보다 심화된 후속연구가 이어지기를 기대한다.

참고문헌

교육인적자원부(2003). **수학 6-나**. (주)대한교과서.

박규홍 · 임성근 · 양지청 · 김수영 · 남기수 · 양경식(2002). **고등학교 미분과 적분**. (주)교학사.

양승갑 · 배종숙 · 이성길 · 박원선 · 박영수 · 홍우철 외(2002). **고등학교 미분과 적분**. (주)금성출판사.

이강섭 · 허민 · 김수환 · 이정례 · 임영훈 · 왕규채 · 송교식(2002). **고등학교 미분과 적분**. (주)지학사.

임재훈 · 이경화 · 김진호 · 윤오영 · 반용호 · 조동석 · 이희종 · 박수연 · 한명주 · 남승진(2002). **고등학교 미분과 적분**. (주)두산.

정동명 · 조승제(1992). **실해석학개론**. 서울: 경문사.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (1992). *Introduction to real analysis*. New York: John Wiley & Sons.

Dijksterhuis, E. J. (1987). *Archimedes*, New Jersey: Princeton University Press.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an* *educational task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Heath, T. L. (2002). *The works of Archimedes,* New York: Dover Publications.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of the Elements*(Vol 3). New York: Dover Publications.

Langer. R. E. (1957). Functions In F. Lynwood Wren, et al. (Eds.), *Insight into modern mathematics* (pp. 241-272). Washington, DC: NCTM.

Mathematics Department of Phillips Exeter Academy (2002). *Mathematics 4C.* New Hampshire: Phillips Exeter Academy.

Stewart, J. (2001). *Calculus-concepts and contexts.* Brooks/Cole.

The Vicious Circle in Calculating Circle Area and the Local Organization

Choi, Young Gi (Seoul National University)
Hong, Gap Ju (Seoul National University Graduate School)

Proofs in school mathematics are regarded as the procedures to examine a proposition's truth or falsehood. However, they are not based on an axiomatic system in general. This implies the possible existence of vicious circles in proofs in school mathematics. The concept of proof can be more completely acquired when accompanied with concept of circular reasoning and necessity of axiomatic system. Therefore, it is necessary to discuss on the axiomatic system in school mathematics curriculum.

The vicious circle can be found in computing an area of a circle by using definite integral in differentiation/ integration part of high school textbooks. This paper will first illustrate this in detail and then offer several comments on the axiomatic methods related to the dissolution of that circular reasoning. To further the discussion, Archimedes' derivation for the area of a circle will be considered next. Finally, several arguments on circular reasoning, local organization, and axiomatic system in school curriculum will be presented at the end of the paper.

* key words : area of a circle(원의 넓이), axiomatic method(공리적 방법), local organization (국소적 조직화), vicious circle(순환논법), Archimedes(아르키메데스)

논문접수 : 2006. 7. 20
심사완료 : 2006. 9. 15