대한수학교육학회지 <학교수학> 제 8 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.8, No.3, 327-339. Sep. 2006

수학화 교수 · 학습을 위한 교수단원 디자인 연구: 브레트슈나이더 공식의 재발명

박 교 식*

이 연구에서는 브레트슈나이더 공식의 재발명을 소재로, 중등예비교사용 수학화 교수단원 <사각형의 넓이>를 디자인하고 있다. 예비교사들이 이 교수단원을 통해 얻을 수 있는 것을 제시하면 다음과 같다. 첫째, 예비교사들은 현상을 조직하는 본질을 발명하는 수학화를 경험할 수 있다. 예비교사들은 그들이 정말로 수학을 발명하는 것처럼, 브라마굽타의 공식과 브레트슈나이더 공식을 발명하는 경험을 할 수 있다. 둘째, 예비교사들은 수학 지식 발명의 한 가지 메커니즘을 이해할 수 있다. 예비교사들은 브라마굽타 공식과 브레트슈나이더 공식을 재발명하면서, 새로운 수학 지식이 이미 잘 알고 있는 수학 지식으로부터 유추를 통해 발명되는 메커니즘을 이해할 수 있다. 셋째, 예비교사들은 학교수학과 학문 수학의 연결을 이해할 수 있다. 예비교사들은 직사각형, 정사각형, 마름모, 평행사변형, 사다리꼴의 구적 공식과 헤론의 공식과 같은 학교수학이 학문 수학이라 할 수 있는 브라마굽타의 공식과 브레트슈나이더 공식 사이의 관계를 통해, 학교수학과 학문 수학이 어떻게 연결될 수 있는지 알 수 있다.

I. 서 론

이 연구의 목적은 브레트슈나이더 공식의 재발명을 소재로 한 수학화 교수 · 학습용 교수단원 <사각형의 넓이>를 디자인하는 것이다. 특히, 이 교수단원은 예비중등수학교사(이하, 간단히 '예비교사')들을 대상으로 한다. 중등학교 수학 교수 · 학습에서 학생들의 수학화를 안내할 수 있기 위해서는 중등수학교사들이 먼저 어느 정도의 수학화 능력을 갖추고 있어야 하고, 이를 위해서는 그들이 교사교육을 받는 동안에 실질적인 수학화 경험을 충분히 쌓을 필요가 있다. 이런 입장에서 이 연구에서는 브레트슈나이더 공식의 재발명을 소재로 예비교사들의 실질적인 수학화 경험을 위한 교수단원을 디자인한다. 일반적으로 사각형 ABCD에서 AB=a, BC=b, CD=c, DA=d, $\angle$B=α, $\angle$D=β일 때, 그 사각형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)},$$

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c+d) \quad \cdots \text{ (I-1)}$$

이 식이 브레트슈나이더의 공식이다. 브레트슈나이더(C. A. Bretschneider)는 이 식을 1842년에 증명하였다. 현재 학교수학에서는 이 공식을 취급하지 않는다. 또, 예비수학교사 교육에서도 이 공식을 거의 취급하지 않는다. 이 공식이 예비교사들에게 생소한 것인 만큼, 이 교

* 경인교육대학교(pkspark@gin.ac.kr)

수단원에서 브레트슈나이더의 공식을 예비교사들이 처음으로 발명하는 것처럼 그들을 안내하는 것이 가능하다.

프로이덴탈(H. Freudenthal)에 의하면, 수학화는 '현실'을 수학 지식으로 '조직'해 간 일련의 과정을 의미한다(Freudenthal, 1973, 1978, 1983, 1985, 1991; 정영옥, 1997). 현실은 수학자들이 상식으로 받아들이는 수학 지식으로, 여러 가지 다른 의미로 조직될 수 있다. 추상, 일반화, 통합 등이 바로 서로 다른 의미의 조직을 의미한다. 수학자들은 자신들이 보기에 어쩐지 새로운 수학 지식으로 조직될 수 있을 것 같은 특정한 현실을 선택한다. 물론 그러한 선택과 조직이 항상 성공하는 것은 아니다. 선택과 조직이 성공하는 경우 새로운 수학 지식이 '발명'되는 것이다. 프로이덴탈에 의하면, 수학자들이 선택한 특정한 현실이 '현상'이고, 그들이 현상을 조직하기 위해 발명한 수학 지식이 '본질'이다. 이러한 수학화를 두 하위 메커니즘으로 구분하는 것이 가능하다. 프로이덴탈은 이 두 하위 메커니즘으로 트레퍼스(A. Treffers, 1987)가 제시한 '수평적 수학화'와 '수직적 수학화'를 인용하고 있다. 수평적 수학화는 현상을 수학적 처리가 가능하도록 바꾸는 것이고, 수직적 수학화는 그렇게 바뀐 것을 수학적으로 처리하는 것이다. 이 수학적 처리를 통해 현상을 조직하는 본질이 비로소 발명된다. 교수단원 <사각형의 넓이>에서 현상은 사각형의 넓이를 구하는 여러 가지 공식들이다. 이 현상을 조직한다는 것은 그 여러 가지 구적 공식들을 통합하는 것이며, 그것들을 통합하기 위해 발명한 본질이 브레트슈나이더의 공식이다. 이 연구에서는 예비교사들이 헤론(Heron)의 공식을 바탕으로 브레트슈나이더의 공식을 추측하는 과정을 수평적 수학화로, 그리고 그 공식을 증명하는 과정을 수직적 수학화로 본다.

수학화 교수·학습은 수학화가 수학 학습의 인식론적 메커니즘으로 작동하게 하는 것을 목표로 한다. 일반적으로 학습자들의 수학화는 수학자들의 수학화를 낮은 차원에서 모방한 것으로, 그것은 적절한 프로그램의 도움이 있어야 가능하다. 교수단원 <사각형의 넓이>는 예비교사들이 수학화를 통해 브레트슈나이더의 공식을 재발명하도록 안내하는 프로그램이다. 그것은 적절한 탐구 문제와 발문으로 이루어진다. 예비교사들은 이 교수단원의 안내에 따라 여러 가지 사각형의 구적 공식들을 통합하는 본질로서 브레트슈나이더의 공식을 재발명하게 된다.

일반적으로 교수단원은 특정한 수학 지식을 획득할 수 있도록 일단의 탐구 과제를 발생적으로 체계화하여 배열한 프로그램을 의미한다(Wittmann, 1984, 1995, 1999, 2001). 이 연구에서는 이런 의미를 다소 확장하여, 학습자들의 수학화가 잘 이루어질 수 있도록 일단의 탐구 과제를 발생적으로 체계화하여 배열한 프로그램을 '수학화 교수·학습을 위한 교수단원'으로 본다. 이미 몇몇 연구에서 이와 유사한 교수단원의 디자인이 시도된 바 있다(박교식, 2003; 김진환, 박교식, 2006a, 2006b, 김진환, 박교식, 이광호, 2006).

브레트슈나이더가 식 (I-1)을 어떻게 그리고 왜 발명하게 되었는지에 대해서는 알려진 것이 없지만, 나름대로 그것을 소박하게 추측해 볼 수는 있다. 적어도 AD 60년경 이래로, 일반적으로 삼각형 ABC에서 AB=a, BC=b, CA=c일 때, 이 삼각형의 넓이 S는 다음과 같다는 것이 알려져 있다.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c) \quad \cdots \text{(I-2)}$$

이 식이 헤론의 공식이다. 또한 7세기 이후로는 원에 내접하는 사각형의 넓이에 대해서도 이와 유사한 식이 이미 알려져 있다. 즉, 일반적으로 원에 내접하는 사각형 ABCD에서 AB=a, BC=b, CD=c, DA=d 일 때, 이 사각형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$
$$p=\frac{1}{2}(a+b+c+d) \quad \cdots \text{ (I-3)}$$

이 식이 브라마굽타(Brahmagupta)의 공식이다. 아마도 이 두 공식이 브레트슈나이더에게 일반적인 사각형의 넓이를 구하는, 이와 유사한 모양의 식을 발명하도록 동기를 부여했을 것이다.

교수단원 <사각형의 넓이>에서는 예비교사들이 헤론의 공식을 잘 알고 있는 것으로 가정한다. 현재 학교수학에서 헤론의 공식을 공식적으로 취급하는 것은 아니지만, 몇몇 교과서에서 그것을 비공식적으로 취급하는 것을 볼 수 있다(우정호 외 3인, 2002; 임재훈 외 7인, 2002). 그런 만큼 이 교수단원에서 헤론의 공식을 예비교사들의 출발 수준으로 간주하는 것은 무리가 아니다. 한편, 이 교수단원에서는 브라마굽타의 공식을 예비교사들의 출발 수준으로 간주하지는 않는다. 대신, 브레트슈나이더의 공식을 재발명하기에 앞서 그들이 먼저 재발명해야 할 하위 목표 수준으로 간주한다. 즉, 이 교수단원에서는 예비교사들로 하여금 헤론의 공식으로부터, 여러 가지 사각형의 구적 공식들을 통합해야 한다는 동기를 부여받아 브라마굽타의 공식과 브레트슈나이더의 공식을 차례로 재발명하도록 안내한다. 브라마굽타의 공식과 브레트슈나이더의 공식의 증명은 이미 잘 알려져 있다. 따라서 이 연구에서는 그 두 공식의 증명에 대해서는 상세하게 취급하지 않는다. 그보다는 그 두 공식의 추측 과정 즉, 수평적 수학화에 초점을 맞춘다.

II. 브라마굽타 공식의 재발명

학교수학에서는 직사각형, 정사각형, 평행사변형, 마름모, 사다리꼴과 같은 특정한 사각형의 넓이를 취급하지만, 일반적인 사각형의 넓이는 취급하지 않는다. 예비교사들에게 직사각형, 정사각형, 평행사변형, 마름모, 사다리꼴의 구적 공식은 상식이라 할 수 있지만, 일반적인 사각형의 구적 공식은 상식이 아니다. 교수단원 <사각형의 넓이>에서는 예비교사들에게 이러한 상식을 현상으로 제시하여, 그것을 통합하는 브레트슈너이더의 공식을 재발명하는 일련의 과정을 안내한다.

[현상의 제시] 직사각형, 정사각형, 평행사변형, 마름모, 사다리꼴의 넓이는 각각 어떻게 구하는가? 이러한 사각형 이외에 일반적인 사각형의 넓이는 어떻게 구할 수 있는가?

예비교사들은 먼저 역사적 과정에 따라, 원에 내접하는 사각형의 경우에 성립하는 브라마굽타의 공식을 재발명하도록 안내받는다. 브라마굽타의 공식은 브레트슈나이더의 공식의 특별한 경우이다. 즉, 식 (I-1)에서 $\alpha+\beta=180°$인 경우이다. 그러면 식 (I-1)은 식 (I-3)과 같게 된다. 브라마굽타의 공식은 비록 원에 내접하는 사각형의 경우에만 성립하는 것이지만, 브라마굽타가 처음부터 원에 내접하는 사각형의 경우에 한정해서 그와 같은 공식을 발명했을 것으로 생각하기는 어렵다. 브라마굽타가 원에 내접하면서, 두 대각선이 서로 직교하는 사각형을 주로 연구하였다는 점에서, 브라마굽타의

공식도 그러한 사각형들을 대상으로 하여 얻은 것이라는 추정이 가능하다(한인기, 2001). 그것이 사실인지도 모른다. 그러나 그가 처음에는 일반적인 사각형에 대해서 성립하는 구적 공식을 찾고자 노력했을지도 모른다. 비록 그가 그러한 공식을 발명하지는 못했지만, 그가 그 당시에 이미 잘 알려진 헤론의 공식과 거의 유사한 모양의 식을 찾고자 노력했다고 보면, 특별히 원에 내접하는 사각형에 한정에서 그 구적 공식을 발명하려고 했던 것은 아닐 수도 있다. 어쩌면 그가 발명한 공식은 실제로는 일반적인 사각형의 구적 공식을 발명하고자 했던 노력에서 얻어진 뜻밖의 결과였는지도 모른다.

이 연구에서는 이러한 가정 아래, 예비교사들이 헤론의 공식으로부터 일반적인 사각형의 구적 공식을 재발명하는 과정에서, 먼저 브라마굽타의 공식을 재발명하도록 안내한다. 즉, 교수단원 <사각형의 넓이>에서는 헤론의 공식으로부터 출발하는 바, 그것이 예비교사들에게 일반적인 사각형의 구적 공식을 재발명하게 하는 동기를 부여한다.

[동기의 부여] 일반적으로 어떤 삼각형의 넓이를 구하기 위해서는 그 삼각형의 밑변의 길이와 높이를 알면 된다. 밑변의 길이와 높이가 주어지는 대신, 그 삼각형의 세 변의 길이가 주어져도 헤론의 공식에 의해 그 넓이를 구할 수 있다. 삼각형에서 헤론의 공식이 성립한다면, 사각형에서도 헤론의 공식과 유사한 것이 성립하지 않을까? 즉, 사각형의 네 변의 길이를 알면, 그 사각형의 넓이를 구할 수 있지 않을까?

헤론의 공식으로부터 네 변의 길이가 주어진 사각형의 구적 공식을 유추하는 것이 가능하다. 이를 위해 먼저 교수단원 <사각형의 넓이>에서 예비교사들이 헤론의 공식 즉, 식 (I-2)에서 삼각형의 반둘레의 길이 p와 $p-a$, $p-b$, $p-c$라는 인수가 있다는 것에 주목하게 할 수 있다.

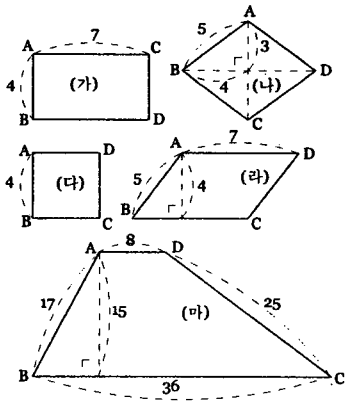
[탐구 1] 헤론의 공식으로부터 네 변의 길이를 아는 사각형의 구적 공식을 유추해 보아라. 그것은 참인가? 사각형의 구적 공식은 어떤 인수를 포함할 것으로 생각하는가? 그 구적 공식은 그 인수들을 어떤 형태로 포함할 것으로 생각하는가?

예비교사들은 먼저 헤론의 공식과 동일한 구조를 가진 사각형의 구적 공식을 쉽게 유추할 수 있다. 즉, 그들은 AB=a, BC=b, CD=c, DA=d인 사각형의 넓이 S는 다음과 같을 것으로 유추할 수 있다.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c+d) \quad \cdots \text{ (II-1)}$$

이제 이러한 유추의 결과를 검증하면 된다. 이러한 검증을 위해 네 변의 길이를 알고, 그리고 넓이를 구할 수 있는 사각형의 예를 사용하는 것이 자연스럽다. 예비교사들이 그러한 예를 스스로 찾아, 식 (II-1)이 성립하는지 검증하게 할 수도 있다. 또, 교수단원에서 몇 개의 예를 제시하는 것도 가능하다. 예를 들어 [그림 II-1]의 각 사각형의 경우에 식 (II-1)이 성립하는지 확인할 수 있다.



[그림 II-1] 사각형의 넓이

[그림 II-1]의 사각형 (가)-(마)의 넓이는 각각 직사각형, 마름모, 정사각형, 평행사변형, 사다리꼴의 구적 공식을 이용하여 쉽게 구할 수 있는 바, 그 넓이는 각각 28, 24, 16, 28, 330이다. 이 값이 식 (II-1)을 이용하여 구한 값과 일치하는지 확인하면 된다. (<표 II-1>)

<표 II-1> 식 (II-1)의 결과

사각형	p	식 (II-1)의 결과	실제 넓이
(가)	11	$28\sqrt{11}$	28
(나)	10	$25\sqrt{10}$	24
(다)	8	$32\sqrt{2}$	16
(라)	12	$70\sqrt{3}$	28
(마)	43	$42\sqrt{2795}$	330

<표 II-1>에서 볼 수 있듯이, 식 (II-1)을 이용하여 얻은 결과와 실제 넓이는 일치하지 않는다. 따라서 헤론의 공식으로부터 유추한 식 (II-1)은 성립하지 않는다는 것을 알 수 있다. 이 결과는 식 (II-1)을 포기해야 한다는 것을 의미한다. 여기까지 진행된 후 예비교사들에게 다음의 질문을 할 수 있다. 식 (II-1)을 완전히 포기해야 하는가? 아니면 그 일부만을 포기해야 하는가?

교수단원 <사각형의 넓이>에서는 예비교사들이 발명해야 하는 사각형의 구적 공식이 헤론의 공식과 상당히 유사할 것이라는 가정을 버리지 않는다. 그래서 비록 식 (II-1)을 포기하더라도, 그것을 완전히 폐기하는 것은 아니다. 그 대신 예비교사들은 사각형의 구적 공식이 적어도 인수 $p-a$, $p-b$, $p-c$, $p-d$를 포함한다고 추측할 수 있다. 더욱이 그 인수들의 곱의 제곱근 즉,

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad \cdots \text{(II-2)}$$

이라는 형태가 포함될 것이라고 추측할 수 있다. 예비교사들은 헤론의 공식으로부터 스스로 이러한 추측을 하거나, 또는 교수단원에서 그들이 그러한 추측을 하도록 적절히 안내할 수 있다.

어떤 예비교사들은 헤론의 공식에서의 인수 p는 $p-d$에서 $d=0$인 경우를 나타내는 것으로 생각할 수도 있다. 그들은 그러한 생각에서 일반적인 사각형의 구적 공식은 식 (II-2)라고 유추할 지도 모른다. 또 삼각형이 항상 원에 내접한다는 사실에서, 식 (II-2)도 원에 내접하는 사각형에 대해서만 성립할지 모른다는 생각을 하는 것이 불가능하지는 않을 것이다. 그러나 사실상 그렇게 뛰어난 통찰이 예비교사들에게 쉽게 일어날 수 있다는 근거는 없다. 따라서 그러한 인지적 비약을 전제로 하는 안내 대신, 자연스런 안내를 하는 것이 바람직하다.

[그림 II-1]의 각 사각형에 대해 식 (II-2)의 값을 구해, 그것을 각 사각형의 실제 넓이와 비교할 수 있다.(<표 II-2>) 이 표에서 어떤 의미있는 것을 찾을 수 있는가? 사각형 (가)와 (다)의 경우 식 (II-2)를 이용하여 얻은 결과와 실제 넓이가 일치한다. 이것은 우연인가 아닌가? 우연이 아니라면, 사각형 (가)와 (다)는 나름대로 어떤 성질을 공유하는 사각형이라 할 수 있다. 그 성질은 무엇인가? 그 성질은 사각형 (가)와 (다)를 한 종류로, 사각형 (나), (라), (마)를 다른 한 종류로 구분하는 것이기도 하다.

<표 II-2> 식 (II-2)의 결과

사각형	식 (II-2)의 결과	실제 넓이
(가)	28	28
(나)	25	24
(다)	16	16
(라)	35	28
(마)	$42\sqrt{65}$	330

예비교사들은 사각형 (가)와 (다)의 경우, 식 (II-2)를 이용하여 얻은 결과와 각 사각형의 실제 넓이가 일치하는 것이 우연이 아니라는 것을 쉽게 확인할 수 있다. 가로와 세로의 길이가 각각 a, b인 임의의 직사각형에서

$$p=\frac{1}{2}(a+b+a+b)=a+b$$

이므로 $p-a=b$, $p-b=a$이다. 따라서 다음을 알 수 있다.

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-a)(p-b)}=\sqrt{baba}=ab$$

이것은 직사각형에서 식 (II-2)를 이용하여 얻은 결과와 그것의 실제 넓이가 항상 일치한다는 것을 말해준다. 같은 방법으로 정사각형에서도 식 (II-2)를 이용하여 얻은 결과와 그것의 실제 넓이가 항상 일치한다는 것을 알 수 있다. 따라서 직사각형과 정사각형의 경우에는 식 (II-2)가 바로 구적 공식이 된다. 여기까지 진행된 후 예비교사들에게 다음과 같은 질문을 할 수 있다.

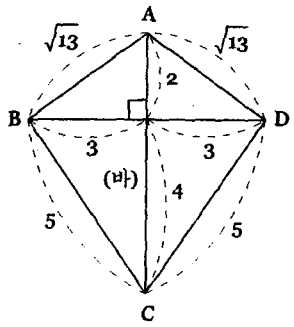
[탐구 2] 직사각형 이외에, 그것들을 포함하는 어떤 사각형들에 대해 식 (II-2)가 구적 공식이 될 수 있을까? 그 사각형들은 직사각형의 성질을 또한 공유할 것이다. 그렇다면 직사각형의 성질은 무엇인가? 그러한 성질을 갖는 사각형은 어떤 사각형인가? 그러한 사각형에 대해 식 (II-2)가 구적 공식이 되는가?

식 (II-2)가 구적 공식이 될 가능성이 있는 사각형이 있다면, 그것은 직사각형의 성질을 갖는 사각형일 것이다. 그래서 그러한 사각형을 찾기 위해 직사각형의 성질을 살펴볼 필요가 있다. 교수단원 <사각형의 넓이>에서는 예비교사들이 직사각형의 성질을 모두 찾도록 요구한다. 찾을 수 있는 직사각형의 성질은 다음의 네 가지일 것이다.

① 각 내각의 크기가 90°이다.
② 두 대각선의 길이가 서로 같다.
③ 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.
④ 원에 내접한다.

첫째 성질을 갖는 사각형은 직사각형뿐이다. 이때는 이미 식 (II-2)가 구적 공식이 된다는 것을 확인하였다.

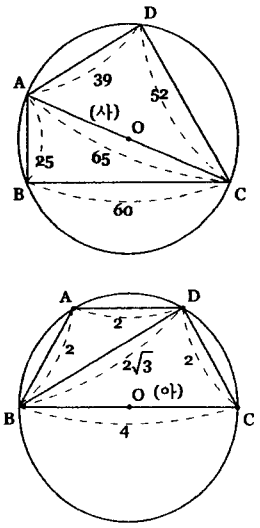
둘째 성질을 갖는 사각형의 경우는 어떤가? 둘째 성질을 갖는 사각형에 직사각형만 포함되는 것은 아니다. 두 대각선의 길이가 서로 같은 사각형의 경우에 식 (II-2)가 구적 공식이 되지 않는다는 것을 확인하기 위해 간단한 반례를 사용할 수 있다. 예비교사들은 이러한 반례를 어렵지 않게 찾을 수 있다. 예를 들면, [그림 II-2]에서 사각형 (바)의 두 대각선의 길이는 같다. 이때 식 (II-2)를 이용하여 얻은 결과는 $5\sqrt{13}$이지만, 사각형 (바)의 실제 넓이는 18이다. 따라서 두 대각선의 길이가 같은 사각형의 경우, 일반적으로 식 (II-2)가 구적 공식이 되지 않는다는 것을 알 수 있다.



[그림 II-2] 두 대각선의 길이가 같은 사각형

셋째 성질을 갖는 사각형의 경우는 어떤가? 셋째 성질을 갖는 사각형에 직사각형만 포함되는 것은 아니다. 이 경우에도 반례를 사용하여 식 (II-2)가 구적 공식이 되지 않는다는 것을 알 수 있다. 예를 들면, 앞의 [그림 II-1]의 사각형 (나)가 반례가 될 수 있다. 즉, 두 대각선이 서로 다른 대각선을 이등분하는 사각형의 경우에 식 (II-2)가 구적 공식이 되지 않는다.

넷째 성질을 갖는 사각형의 경우는 어떤가? 넷째 성질을 갖는 사각형에 직사각형만 포함되는 것은 아니다. 원에 내접하는 사각형의 경우에 식 (II-2)가 구적 공식이 되지 않는다는 것을 확인하기 위한 반례를 사실상 쉽게 찾을 수 없다. 실제로는 [그림 II-3]의 사각형 (사), (아)와 같이 원에 내접하는, 그리고 직사각형이 아닌, 사각형의 경우에도 식 (II-2)가 구적 공식이 된다는 것을 알 수 있다. 예비교사들은 원에 내접하는 다른 사각형에 대해서도 식 (II-2)가 구적 공식이 된다는 것을 스스로 확인할 수 있다.



[그림 II-3] 원에 내접하는 사각형

따라서 원에 내접하는 사각형의 경우에는 식 (II-2)가 구적 공식이 될 지도 모른다는 추측을 할 수 있다. 이러한 추측은 모든 사각형에 대한 것이 아니라, 원에 내접하는 사각형에 대한 것이다. 그것은 이 연구에서 설정했던 원래의 현상을 축소한 것이다. 즉, 여기서는 이 축소된 현상을 조직하기 위해 "원에 내접하는 사각형의 경우에 식 (II-2)가 구적 공식인가?"라는 수학적 문제를 도출하였다. 따라서 여기까지의 과정을 축소된 대상에 대한 수평적 수학화로 볼 수 있다. 예비교사들이 해야 하는 다음 과제는 식 (II-2)가 원에 내접하는 사각형의 구적 공식이라는 것을 증명하는 것이다. 그것이 수직적 수학화이다. 그런데 이 증명은 이미 잘 알려져 있다. (예를 들면 Coxeter & Greitzer, 1967; 한인기, 2003) 따라서 이 연구에서는 그 증명에 대해서는 자세히 논의하지 않기로 한다. 이 증명을 위해 예비교사들은 헤론의 공식을 증명하는 일련의 과정을 참고할 수 있다. 즉, 그들은 헤론의 공식을 증명하는 과정과 유사하게 그것을 증명할 수 있다(한인기, 2003).

III. 브레트슈나이더 공식의 재발명

예비교사들이 브라마굽타의 공식을 성공적으로 재발명한 후에, 그들에게 다음과 같은 질문을 할 수 있다.

> [탐구 3] 원에 내접하는 사각형의 경우에는 브라마굽타의 공식 즉, 식 (I-3)으로 그 넓이를 구할 수 있다. 그렇다면 원에 내접하지 않는 사각형의 경우에는 그 넓이를 구할 수 없는가? 그에 대한 실마리를 어떻게 찾을 수 있을까?

교수단원 <사각형의 넓이>에서는 사각형의 구적 공식이 헤론의 공식과 유사한 형태일 것

으로 가정한다. 따라서 비록, 원에 내접하지 않는 사각형의 경우에도, 그 구적 공식에는 여전히 식 (II-2)가 포함되어 있을 것으로, 실제로는 식 (II-2) 이외에 다른 것을 포함하고 있을 것으로 추측할 수 있다. 원에 내접하지 않는 사각형의 구적 공식을 찾는 것은 바로 그것을 찾는 것이다. 이제 그것을 찾기 위한 실마리를 얻기 위해, 먼저 사각형 (나), (라), (마), (바)의 경우에, 그 실제 넓이와 식 (II-2)를 이용하여 얻은 결과를 비교해 보기로 하자. (<표 III-1>)

<표 III-1> 식 (II-2)의 결과

사각형	식 (II-2)의 결과	실제 넓이
(나)	25	24
(라)	35	28
(마)	$42\sqrt{65}=\sqrt{114660}$	330
(바)	$5\sqrt{13}=\sqrt{325}$	18

사각형 (나), (라), (마), (바)에서 각 사각형의 실제 넓이와 식 (II-2)를 이용하여 얻은 결과와의 차를 다음과 같이 구할 수 있다.

(나): $\sqrt{24^2}=\sqrt{25^2-49}$

(라): $\sqrt{28^2}=\sqrt{35^2-441}$

(마): $\sqrt{330^2}=\sqrt{114660-5760}$

(바): $\sqrt{18^2}=\sqrt{325-1}$

이러한 예는 원에 내접하지 않는 사각형의 구적 공식이 다음과 같은 형태로 주어질지 모른다는 가정을 가능하게 한다. 이때 x는 사각형에 따라 달라지는 변수이지만, 그 값은 항상 0보다 크다. x의 값이 0이면, 그 사각형은 원에 내접한다. 예비교사들은 브라마굽타의 공식으로부터 스스로 이러한 추측을 하거나, 또는 교수단원에서 그들이 그러한 추측을 하도록 적절히 안내할 수 있다.

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-x},$$
$$x\geq 0 \cdots \text{(III-1)}$$

이러한 가정이 성립한다면, 식 (III-1)은 원에 내접하지 않는 사각형뿐만 아니라, 원에 내접하는 사각형에 대해서도 성립한다. 이제 이 변수 x가 어떤 형태로 주어질 수 있는지 추측해 보자.

사각형 (나), (라), (바)는 각각 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같고, 대각선 AC를 공통변으로 하는 두 개의 서로 합동인 삼각형으로 분할된다. 각 사각형에서 $\angle B=\angle D=\alpha$라고 하면, 각각 다음이 성립한다.

(나): $S^2=25^2\sin^2\alpha=25^2-49$

$\therefore 49=25^2-25^2\sin^2\alpha$

(라): $S^2=35^2\sin^2\alpha=35^2-441$

$\therefore 441=35^2-35^2\sin^2\alpha$

(바): $S^2=(5\sqrt{13})^2\sin^2\alpha=(5\sqrt{13})^2-1$

$\therefore 1=(5\sqrt{13})^2-35^2\sin^2\alpha$

이것으로부터 사각형 (나), (라), (바)와 같이 두 쌍의 대각의 크기가 각각 서로 같고, 대각선 AC를 공통변으로 하는 두 개의 서로 합동인 삼각형으로 이루어진 사각형 ABCD의 넓이는 AB=a, BC=b, CD=a, DA=b이므로,

$$S=\sqrt{(ab)^2-(ab)^2\cos^2\alpha} \cdots \text{(III-2)}$$

일 것으로 추측할 수 있다. 이 결과는 식 (III-1)에서 변수 x의 값이 사각형 ABCD의 네 변의 길이와 두 각 $\angle B$, $\angle D$의 크기에 따라 결

정될 수 있다는 추측을 가능하게 해 준다. 이때 식 (III-2)에서 근호 속의 두 $(ab)^2$ 중 앞의 것은 $(p-a)(p-b)(p-a)(p-b)$를 계산하여 얻은 것이다. 그러나 뒤의 것은 그것을 계산하여 얻은 것일 수도 있지만, $abab$를 간단히 한 것일 수도 있다. 이제 이 두 가지 가능성을 염두에 두고, 이러한 추측이 사각형 (마)의 경우에도 성립하는지 알아보자. 사각형 (마)에서 $\angle B=\alpha$, $\angle D=\beta$라고 하면 다음이 성립한다.

$$S=\frac{1}{2}\cdot 17\cdot 36\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot 25\cdot 8\sin\beta=$$
$$306\sin\alpha+100\sin\beta \cdots \text{(III-3)}$$

한편, 제이코사인 법칙에 의해 다음이 성립한다.

$$17^2+36^2-2\cdot 17\cdot 36\cos\alpha$$
$$=25^2+8^2-2\cdot 25\cdot 8\cos\beta$$
$$\text{즉, } 224=306\cos\alpha-100\cos\beta \cdots \text{(III-4)}$$

식 (III-3)과 (III-4)를 각각 변끼리 제곱하면 다음과 같다.

$$S^2=93636\sin^2\alpha+10000\sin^2\beta$$
$$+61200\sin\alpha\sin\beta \cdots \text{(III-5)}$$
$$50176=93636\cos^2\alpha+10000\cos^2\beta$$
$$-61200\cos\alpha\cos\beta \cdots \text{(III-6)}$$

식 (III-5)와 식 (III-6)을 변끼리 더해 정리하면 다음과 같다.

$$S^2=53460+61200(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta)$$

이것을 식 (III-2)와 유사한 형태로 만들기 위해 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$S^2=53460-61200\cos(\alpha+\beta)$$
$$=53460-61200\cos\{2(\frac{\alpha+\beta}{2})\}$$
$$=-53460-61200 2\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})-1$$
$$=114660-122400\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})$$
$$=114660-17\cdot 36\cdot 25\cdot 8\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})$$

한편, 사각형 (마)에서 $\sin\alpha=\frac{15}{17}$, $\cos\alpha=\frac{8}{17}$, $\sin\beta=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{4}{5}$이므로 다음이 성립한다.

$$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{77}{85},\ \cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})=\frac{4}{85}$$

결국 다음이 성립한다.

$$17\cdot 36\cdot 25\cdot 8\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})=5760$$

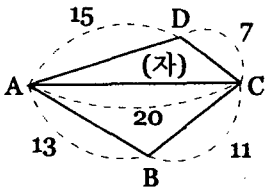
이것으로부터 식 (III-1)의 변수 x는 다음과 같을 것으로 추측할 수 있다.

$$x=abcd\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdots \text{(III-8)}$$

이때 $\alpha=\beta$이면 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\alpha+\alpha}{2}=\alpha$이고, $c=a$, $b=d$이면 식 (III-8)은 식 (III-2)로 환원된다. 따라서 일반적으로 AB=a, BC=b, CD=c, DA=d, $\angle B=\alpha$, $\angle D=\beta$인 사각형 ABCD의 넓이 S는 식 (I-1)과 같을 것으로 추측할 수 있다. 그런데 사각형 (마)는 사다리꼴이라는 특수한 사각형이므로, 일반적인 사각형에 대해서도 그러한 추측이 성립한다는 것을 강화하기 위하여 다른 예를 더 살펴볼 필요가 있다.

[그림 III-1]의 사각형 ABCD는 두 개의 헤론 삼각형 (즉, 세 변의 길이와 넓이가 자연수인

삼각형)을 붙여 만든 사각형이다. 헤론의 공식을 이용하여 삼각형 ABC와 ACD의 넓이를 구하면 각각 42와 66이다. 따라서 사각형 ABCD의 넓이는 108이다.



[그림 III-1] 일반 사각형

이 사각형 ABCD에 대해서 식 (I-1)이 구적 공식이 될 수 있는지 확인해 보자. 먼저 이 사각형에서 다음이 성립한다.

$$p = \frac{1}{2}(13+11+7+15) = 23$$

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) = 15360$$

$$abcd = 15015$$

한편, $\angle B=\alpha$, $\angle D=\beta$라고 하면, 제이코사인 법칙으로부터 다음을 알 수 있다.

$$\sin\alpha = \frac{12}{13},\ \cos\alpha = -\frac{5}{13},$$

$$\sin\beta = \frac{4}{5},\ \cos\beta = -\frac{3}{5}$$

$$\text{즉, } \cos(\alpha+\beta) = -\frac{33}{65},\ \cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{16}{65}$$

이제 식 (I-1)을 이용하여 S를 구하면 다음과 같다.

$$S = \sqrt{15360 - 15015 \cdot \frac{16}{65}}$$

$$= \sqrt{15360-3696}$$

$$= \sqrt{11664} = 108$$

이것은 이미 알고 있는 결과와 일치한다. 따라서 이러한 두 예를 통하여 "사각형 ABCD에서 AB=a, BC=b, CD=c, DA=d, $\angle B=\alpha$, $\angle D=\beta$일 때, 이 사각형의 넓이 S는 식 (I-1)로 구해지는가?"라는 수학적 문제를 도출할 수 있다. 여기까지의 과정이 수평적 수학화이다. 예비교사들이 해야 하는 다음 과제는 식 (I-1)이 일반적인 사각형의 구적 공식이라는 것을 증명하는 것이고, 그것이 수직적 수학화이다. 브레트슈나이더 공식의 증명은 여러 곳에서 소개되고 있는 만큼(예를 들면, 한인기, 2003), 여기서는 그 증명을 다시 소개하지 않기로 한다.

IV. 요약 및 결론

이 연구에서는 브레트슈나이더 공식의 재발명을 소재로, 예비교사용 수학화 교수단원 <사각형의 넓이>를 디자인하고 있다. 이 교수단원에서는 학교수학에서 이미 학습한 직사각형, 정사각형, 마름모, 평행사변형, 사다리꼴의 구적 공식을 현상으로 제시하고, 그것을 통합하는 구적 공식인 브레트슈나이더의 공식을 재발명하도록 안내하고 있다. 이 과정에서 원래의 현상을 축소하여, 원에 내접하는 사각형의 구적 공식을 통합하는 브라마굽타의 공식을 먼저 재발명하고, 이어 그것을 바탕으로 브레트슈나이더의 공식을 재발명하도록 안내하고 있다. 특히 이 교수단원에서는 헤론의 공식을 통해 그러한 재발명의 동기를 제공하고 있다.

예비교사들이 이 교수단원을 통해 얻을 수 있는 것을 결론으로 제시하면 다음과 같다. 첫째, 예비교사들은 현상을 조직하는 본질을 발명하는 수학화를 경험할 수 있다. 예비교사들

은 그들이 정말로 수학을 발명하는 것처럼, 브라마굽타의 공식과 브레트슈나이더 공식을 발명하는 경험을 할 수 있다. 둘째, 예비교사들은 수학 지식 발명의 한 가지 메커니즘을 이해할 수 있다. 예비교사들은 브라마굽타 공식과 브레트슈나이더 공식을 재발명하면서, 새로운 수학 지식이 이미 잘 알고 있는 수학 지식으로부터 유추를 통해 발명되는 메커니즘을 이해할 수 있다. 셋째, 예비교사들은 학교수학과 학문 수학의 연결을 이해할 수 있다. 예비교사들은 직사각형, 정사각형, 마름모, 평행사변형, 사다리꼴의 구적 공식과 헤론의 공식과 같은 학교수학이 학문 수학이라 할 수 있는 브라마굽타의 공식과 브레트슈나이더 공식 사이의 관계를 통해, 학교수학과 학문 수학이 어떻게 연결될 수 있는지 알 수 있다.

이 연구에서 디자인한 교수단원 <사각형의 넓이>는 실제로 적용가능한 것이지만, 이 연구에서는 그것을 예비교사들에게 실제로 적용한 결과를 제시하지는 않았다. 그런 만큼 이 교수단원은 실제 적용을 통해 더 수정되고 보완될 수 있을 것이다. 이 연구에서는 예비교사들을 대상으로 하고 있지만, 브레트슈나이더 공식의 재발명이 예비교사들에게만 적절한 수학화 소재는 아니다. 헤론의 공식을 잘 아는 중고등학교 학생들에게도 충분히 적절한 수학화 소재가 될 수 있다. 물론 그 경우에는 교수단원에서 훨씬 더 친절한 안내를 하는 것이 필요할 것이다. 이 연구에서는 일반적으로 학교수학에서 헤론의 공식을 적극적으로 취급하지는 않는다고 보아, 예비교사를 대상으로 한 것이다.

참고문헌

김진환 · 박교식(2006a). 예비중등교사의 수학화 능력을 신장하기 위한 교수단원의 설계: n-단체(simplex)의 n-부피 탐구. **학교수학, 8**(1), 27-43.

김진환 · 박교식(2006b). 예비중등교사의 수학화 경험을 위한 교수단원의 설계: 수 분할 모델의 탐구. **한국학교수학회논문집, 9**(1), 57-76.

김진환 · 박교식 · 이광호(2006). 일정한 차를 갖는 수 분할 모델의 탐구를 위한 예비중등교사용 수학화 교수단원의 설계. **학교수학, 8**(2), 161-176.

박교식(2003). 수학화 교수 · 학습을 위한 소재 개발 연구: 격자 직사각형의 한 대각선이 지나는 단위 정사각형의 수와 그 일반화. **수학교육학연구, 13**(1), 57-75.

우정호 · 류희찬 · 문광호 · 박경미(2002). **수학 10-나**, 서울: 대한교과서(주).

임재훈 · 기우항 · 김진호 · 윤오영 · 반용호 · 조동석 · 남승진 · 오명성(2002). **수학 10-나.** 서울: (주)두산.

정영옥(1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

한인기(2001). 인도 수학과 브라마굽타의 공식. **수학사랑,** 2 · 3월호 (통권 25호), 122-127.

한인기(2003). 헤론 공식에 대한 교수학적 분석 및 확장. **한국수학사학회지, 16**(2), 43-54.

Coxeter, H. S. M. & Greitzer, S. L. (1967). *Geometry revisited.* Washington, D. C. : The Mathematical Association of America.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing : preface to a science of mathematical education,* D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical pheno-*

menology of mathematical structures. Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1985). Mathematics Starting and Staying in Reality. In I. Wirszup & Streit (Ed.), *Developments in school mathematics education around the world: applications-oriented curricula and technology-supported learning for all students.* Chicago: The University of Chicago. 279-295.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* (China Lectures) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics education.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Wittmann, E. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education, *Educational Studies in Mathematics 15*(1), 25-36.

Wittmann, E. (1995). Mathematics education as a 'design science'. *Educational Studies in Mathematics, 29*(4), 355-374.

Wittmann, E. (1999). Designing teaching: The pythagorean theorem. In T. J. Cooney, et. al., *Mathematics, pedagogy, and secondary teacher education.* 97-165. Portsmouth, NH: Heinemann.

Wittmann, E. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 1-20.

A Study on the Design of Teaching Units for Teaching and Learning of Secondary Preservice Teachers' Mathematising: Reinvention of Bretschneider's Formula

Park, Kyo Sik (Gyeongin National University of Education)

In this study, a teaching units <The area of quadrangle> for teaching and learning of secondary preservice teachers' mathematising is designed, focusing on reinvention of Bretschneider's formula. preservice teachers can obtain the following through this teaching units. First, preservice teachers can experience mathematising which invent a noumenon which organize a phenomenon, They can make an experience to invent Bretscheider's formula as if they invent mathematics really. Second, preservice teachers can understand one of the mechanisms of mathematics knowledge invention. As they reinvent Brahmagupta's formula and Bretschneider's formula, they understand a mechanism that new knowledge is invented fron already known knowledge by analogy. Third, preservice teachers can understand connection between school mathematics and academic mathematics. They can undestand how the school mathematics can connect academic mathematics, through the relation between the school mathematics like formulas for calculating areas of rectangle, square, rhombus, parallelogram, trapezoid and Heron's formula, and academic mathematics like Brahmagupta's formula and Bretschneider's formula.

* key words : mathematising(수학화), reality(현실), horizontal mathematising(수평적 수학화), vertical mathematising(수직적 수학화), phenomenon(현상), noumenon(본질), teaching units(교수단원), Heron's formula(헤론의 공식), Brahmagupta's formula(브라마굽타의 공식), Bretschneider's formula(브레트슈나이더의 공식)

논문접수 : 2006. 8. 10
심사완료 : 2006. 9. 5