韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 20집 제 4호, 2006. 11. 603-619

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 20 No 4, Nov. 2006. 603-619

불변성 개념에 관련된 중등학교 수학내용의 분석에 대한 연구

이 상 근 (경상대학교)
김 태 호 (경상사대부설고등학교)
정 기 영 (경남과학고등학교)
이 춘 구 (경남과학고등학교)

1. 서 론

중등학교 수학교육에서 문제해결력 신장은 중요한 목표들 중의 하나이며, 수학교육의 실제에서 문제해결력 신장을 위한 교수·학습 방법이나 문제해결 전략의 지도는 지속적인 교수학적 관심의 대상이 되어왔다. 특히, 7차 수학과 교육과정(교육부, 1998)에는 수학적 사고력과 문제 해결력을 강조하여 문제해결력을 개발시키기 위한 구체적인 방법을 '교수·학습 방법'란에 제시하고 있으며, 수학교육의 실제에서 다양한 문제해결 방법이나 문제해결 전략을 강조하고 있다.

제 7차 수학과 교육과정(교육부, 1998)에서는 문제해결 전략으로 그림그리기, 예상과 확인, 표 만들기, 규칙성 찾기, 단순화하기, 식 세우기, 거꾸로 풀기, 논리적 추론, 반례 들기 등을 제시하고 있다. 그러나, 수학 문제해결의 지도가 이들 전략들로만 귀착되는 것은 아니다. Engel(1991), Zeitz(1999), Shapiro(1985) 등은 문제해결의 중요한 전략으로 불변성 원리를 강조하고 있다. 뿐만 아니라, 김응태·박한식·우정호(2004)에 의하면, 불변성은 수학적 개념을 보다 명확하고 유연하게 구성하는데 중요한 역할을 수행한다.

문제해결에 관련된 국내 연구들을 분석하면, 첫째 문제해결 방법 및 그 지도에 관련된 연구들로 방승진외 2인(2001), 한인기·꼴랴긴(2006), 양은경·황우형(2005) 등이 있으며, 둘째 문제해결 전략의 중요성을 다룬 연구로 김용대(2004), 김영미외 2인(2003), 이대현(1999) 등의 연구가 있고, 셋째 문제해결에 영향을 미치는 요인에 관한 연구로 전평국·정인수(2003) 등의 연구가 있다. 이들 연구에서는 문제해결에 관련된 다양한 주제들이 심도 있게 연구되었지만, 문제해결에서 불변성 원리에 관련된 연구는 드물다.

본 연구에서는 불변성 원리의 개념을 고찰하고, Shapiro가 제시한 불변성 원리의 분류를 바탕으로 불변성에 관련된 중등학교 수학교과 내용을 분석 및 분류하고, 이에 관련된 교수학적 논의를 제시할

* ZDM 분류 : U14
* MSC2000 분류 : 97C99
* 주제어 : 불변성, 문제해결전략

것이다. 본 연구를 통해, 수학 문제해결의 지도에서 불변성 원리의 활용 가능성을 모색하며, 문제해결 전략에 관련된 수학교육학 연구 주제 및 연구 내용의 폭을 넓힐 것으로 기대된다.

2. 불변성 원리

불변성 원리는 불변량(Invariant)의 개념에 기초한다. 수학사전(박을용외 3인, 1977, p.285)에서 불변량을 '일반적으로 불변식으로 나타낼 수 있는 양을 불변량이라고 한다. 예를 들면, 해석기하에서는 좌표변환에 의해서 불변인 양을 연구하는 것'이라고 규정하였다. 결국, 수학에서 불변량은 어떤 변환에 대해 불변인 것을 의미하는 것으로 인식되어져 왔다.

한편, Engel은 문제해결의 한 전략으로 불변성 원리를 강조하였다. Engel(1999)에 의하면, 불변성 원리는 게임, 변환 등의 알고리즘에 관련되며, 반복적으로 실행되어지며, 무엇이 같은가? 무엇이 불변으로 남아있는가에 관련된다고 하였다. 특히, 문제해결에 관련하여 만약 반복적인 것이 존재한다면, 변하지 않는 무언가를 찾는 것은 중요하다고 강조하며, 문제해결에서 불변량의 분석을 강조하였다.

Zeitz(1999)는 문제해결에서 비정형적인 문제들로부터 중요한 정보를 추출하는 과정에서 극단의 원리와 불변량의 분석을 강조하였으며, 이들의 역할은 필수적인 존재물에 주목함으로서 그 복잡한 문제를 단순한 문제로 축소시키는 것이라 하였다.

Shapiro는 The problem seminar at KTH[1](1972-1985)에서 문제해결의 첫 번째 전략으로 불변성 원리를 제시하면서, 수학 문제해결에서 핵심적인 아이디어 중의 하나는 불변성을 활용하는 것이라고 주장하였다. Shapiro는 불변성은 수학 전반에 관련되며, 불변성 원리를 다음과 같이 나누어 제시하였다.

첫째, 논증 기하에서의 어떤 증명들을 좌표를 이용하여 증명하고자 할 때, 중심을 (a, b)로 하는 것 보다는 원점으로 하는 것이 훨씬 편하고 이것은 주어진 상황을 불변하게 한다. 이와 같은 일반성을 잃지 않는 경우(Without loss of generality);

둘째, 논증 기하와 해석기하의 상황적 동질성, 이진법과 십진법이 갖는 수적인 동질성 등과 같은 변환(Transformations);

셋째, Measure theory에서와 같이 넓이나 부피의 개념을 일반적인 집합의 경우로 확장한 것으로의 측도 구성(scaling);

넷째, 작도가능성을 대수적인 방정식의 해를 통하여 대신 증명하는 것과 같은 불가능성 증명들(Impossibility proofs);

다섯째, 수이거나 혹은 어떤 형태로의 양이 보존되거나 불변하는 불변량(Invariants).

살펴본 바와 같이, Shapiro는 불변성을 불변량의 개념에 근거하여 몇 가지로 분류하여 제시하고 있다. 본 연구에서는 Shapiro가 제시한 불변성의 개념을 바탕으로, 중등학교 수학에 관련하여 문제해

1) Shapiro 가 Royal Institute of Technology(KTH)에 재직할 당시의 동료 교수들, 학생들과 함께 운영했던 수학 문제해결 세미나를 의미함.

결 전략의 상황을 ① 일반성을 잃지 않는 경우와 같은 불변성의 원리를 이용하는 경우, ② 변환에서와 같이 상황의 동질성에 따른 불변성의 원리를 이용하는 경우, ③ 측도 구성을 통해 특정 상황을 동질의 집합적 해석을 통한 불변성의 원리를 이용하는 경우, ④ 불가능성 증명에서와 같이 불변성의 원리를 이용하는 경우, ⑤ 불변하는 불변량을 이용한 불변성의 원리를 이용하는 경우 등으로 나누었다. 그리고, 본 연구에서는 각 경우에 대해 '불변성의 원리를 사용한 예는 어떤 것이 있는가?' '어떻게 문제해결에 활용할 수 있는가?' '불변성의 원리를 이용하였을 때 문제해결에서는 어떤 가치가 있는가? 등을 고찰할 것이다.

3. 중등학교 수학에 관련된 불변성 원리의 예들

(1) 일반성을 잃지 않는 경우와 같은 불변성의 원리를 이용하는 경우

일반성을 잃지 않는 경우와 같은 경우의 예로는 Pappus의 정리를 논증 기하로 증명하는 대신에 해석기하로 증명할 때 좌표의 설정에서의 자유로움에 따른 수월성을 활용한 경우, 대칭다항식에서 주어진 임의의 문자들에 대하여 대칭다항식을 구성하는 문자들 사이에 대소 관계를 고정하여도 일반성을 잃지 않는 것과 같은 경우, 인수정리와 항등식의 성질을 이용한 식의 값 계산하기 등에서 다양한 형태의 예들을 만날 수 있다.

가. Pappos의 정리를 통하여 논증 기하로 증명하는 대신에 해석기하로 증명할 때 좌표의 설정에서의 일반성을 잃지 않는 불변성의 자유로움에 따른 수월성을 활용한 예를 살펴보자.

예제 1. Pappus의 정리

삼각형 ABC의 변 BC의 중점을 M이라 할 때, 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

증명 1. 논증 기하적인 방법

△ABC의 변 BC의 중점을 M이라 할 때, <그림 1>이나 <그림 2>에서처럼 점 A에서 선분 BC나 그 연장선에 수선을 내렸을 때, 수선의 발을 D라고 하면

$$\overline{BD} = \overline{BM} + \overline{MD}, \qquad \overline{CD} = |\overline{CM} - \overline{MD}| = |\overline{BM} - \overline{MD}|$$

그리고, $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BM}^2 + 2\overline{BM} \cdot \overline{MD} + \overline{MD}^2$ ---- (1)

$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BM}^2 - 2\overline{BM} \cdot \overline{MD} + \overline{MD}^2$ ---- (2)

(1)과 (2)를 변변 더하면

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BM}^2 + 2\overline{MD}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{MD}^2) + 2\overline{BM}^2 = 2\overline{AM}^2 + 2\overline{BM}^2$$

□

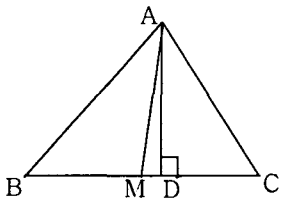
증명 2. 해석기하적인 방법으로의 증명

<그림 3>과 같이 △ABC의 변 BC의 중점을 M이라 할 때, △ABC의 변의 길이나 모양을 보존하고 △ABC의 성질을 일반성을 잃지 않으면서 계산을 편리하도록 잡는 방법은 △ABC에서의 변 BC의 중점을 원점에 두며, 변 BC를 x축 상에 두고, 점 A(a, b), B(-c, 0), C(c, 0), M(0, 0) 와 같이 나타낼 수 있다. 그러면

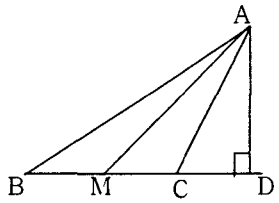
$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}=2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=(a^2+b^2)+c^2=2(a^2+b^2+c^2)$$

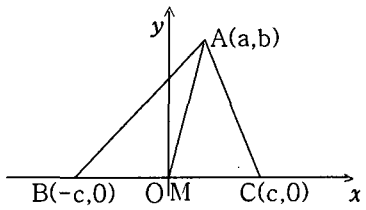
$$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)\quad\square$$



<그림 1>



<그림 2>



<그림 3>

<그림 1>, <그림 2>와 같이 논증 기하에 따른 증명에서는 주어진 삼각형 ABC에서 직각삼각형을 만들고 각 변의 길이 사이의 관계와 피타고라스 정리를 이용하여 찾고자 하는 각 변의 길이를 구하여 정리를 증명한다. 이때 주어진 삼각형의 꼭지각이 예각인지 둔각인지를 고려하여 각 변의 길이를 계산하여야 하는 불편함도 가진다. 하지만 <그림 3>에서와 같이 해석기하에서는 주어진 삼각형을 좌표평면위에 둠으로서 각에 상관없이, 꼭짓점 사이의 거리를 이용하여 삼각형의 각 변의 길이를 구하여 정리를 증명할 수 있다. 특히 좌표평면 상에서의 삼각형의 위치는 문제해결자가 직접 조작을 할 수 있으므로 가능한 편리하게 지정하여도 일반성을 잃지 않는다. 이와 같이 일반성을 잃지 않는 경우의 불변성을 이용하는 것은 문제해결자에게 계산을 더욱 용이하고 수월하게 한다.

나. 대칭다항식은 주어진 다항식의 임의의 두 문자를 서로 바꾸어도 그 식이 변치 않는 식을 말한다. 그러므로 대칭다항식에서는 주어진 식을 구성하는 문자들 사이에 대소 관계를 어떤 하나의 경우로 고정하여도 일반성을 잃지 않는다는 것이다. 예를 들어 대칭다항식형 부등식은 그 부등식의 증명에 있어서 주어진 부등식을 구성하는 문자가 a, b, c, $\cdots$일 때 $a\geq b\geq c\geq\cdots$라 가정하여도 일반성을 잃지 않는다는 점이다. 이러한 사실은 대칭다항식에 관한 문제 풀이에 있어서 매우 중요한 문제해결 전략 중의 하나이다.

예제 2. 임의의 양수 a, b, c에 대해, 부등식 $(a+b+c)^{100}<3^{100}(a^{100}+b^{100}+c^{100})$을 증명하시오.

증명. 주어진 식은 대칭다항식이므로 $a \geqq b \geqq c$ 라 가정하고 증명하여도 준 부등식은 일반성을 잃지 않는다. $a \geqq b \geqq c$ 인 경우 $a+b+c \leqq a+a+a=3a$가 성립한다.

$$\therefore\ (a+b+c)^{100} \leqq (3a)^{100} < 3^{100}(a^{100}+b^{100}+c^{100}) \qquad \square$$

이와 같이 주어진 식이 대칭다항식이면 대칭다항식의 성질에 의해 식의 증명에서 각 변수의 대소 관계를 이용하고자 할 때에는 한 가지의 형태의 대소 관계에 대해서만 생각하면 된다. 만약 이와 같은 일반성을 고려하지 않고 대소 관계를 이용하고자 한다면 변수가 3종류이므로 증명을 6번에 걸쳐서 해야만 할지도 모른다.

다. 인수정리와 항등식의 성질을 이용한 일반성을 잃지 않는 식의 값 계산하기 문제의 경우

예제 3. 방정식 $x^3-2x^2-5x+6=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$의 값을 구하여라.

풀이 1. 구하고자 하는 식을 전개하여 정리한 후 근과 계수와의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) &= \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\alpha+\alpha\gamma\gamma+\alpha\gamma\alpha+\beta\beta\gamma+\beta\beta\alpha+\beta\gamma\gamma+\beta\gamma\alpha \\ &= \alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\gamma+\alpha\gamma\alpha+\beta\beta\gamma\end{aligned}$$

와 같이 하여 식의 값을 계산하는 것은 단순한 식의 계산 자체에서 많은 어려움을 겪는다.

풀이 2. 주어진 방정식에서 세 근의 합이 2라는 불변량과 근과 계수와의 관계를 이용하면,

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) &= (2-\gamma)(2-\alpha)(2-\beta) \\ &= 2^3-(\alpha+\beta+\gamma)2^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)2-\alpha\beta\gamma \\ &= -4\end{aligned}$$

풀이 3. 방정식의 세 근이 α, β, γ이므로 주어진 방정식의 우변을 근을 이용하여 인수분해하면

$$x^3-2x^2-5x+6=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad \text{-------} \ (1)$$

이고, 이때 세 근의 합이 2라는 불변량과 인수정리 및 항등식의 성질을 이용하면

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(2-\gamma)(2-\alpha)(2-\beta) \quad \text{----}(2)$$

이므로 구하는 식의 값은 (1)식의 좌변에 $x=2$를 대입하여 계산한 값이 된다. 즉

$$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=2^3-2(2)^2-5(2)+6=-4 \quad \square$$

이와 같은 방법을 활용할 수 있는 이유는 (1)에서 식의 값을 계산할 때에 주어진 식을 인수분해를 하여 계산하여도 식 자체는 일반성을 잃지 않는 불변성을 갖기 때문에 이를 이용하면 식의 값을 쉽게 계산할 수 있다. 따라서 풀이 1, 2, 3에서 살펴본 것처럼 주어진 문제의 상황 속에 숨어 있는 주어진 정보를 일반성을 잃지 않는 상황에서의 불변성을 이용하면, 문제 해결 전략을 다양하고 수월하게 수립할 수 있게 하며, 계산을 해가는 과정 또한 편리하게 도와주는 경우가 많다.

(2) 변환에서와 같이 상황의 동질성에 따른 불변성의 원리를 이용하는 경우

변환에서와 같이 상황의 동질성에 따른 불변성의 원리를 이용하는 경우의 예로는 도형과 도형의 방정식의 동질성, 어떤 수에 대해여 그 수의 각 진법에 따른 표기방식은 달라도 그 수의 크기는 동일한 경우, 배색문제의 그래프 이론을 이용한 해석, 도형의 이동에 의한 도형의 표준화, 치환을 이용한 문제해결 등의 경우가 있다.

라. 도형과 도형의 방정식의 동질성

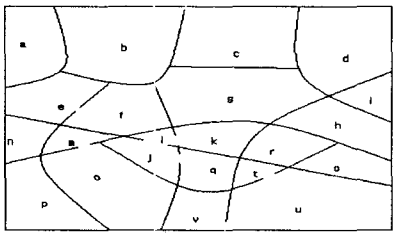
도형의 방정식 단원에서는 도형을 대신하여 도형의 방정식을 이용하도록 하고 있다. 이것은 논증기하와 해석기하에서의 상황적 동질성을 표현방식의 변환에 의해 서로 다르게 나타내고 있다. 논증기하에서의 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원은 해석기하에서는 $x^2+y^2=1$으로 표현한다. 두 표현에서 원을 이루고 있는 점들은 동일한데 점 자체만 보면 도형으로 밖에 나타나지 않지만, 점에다가 좌표를 도입하여 좌표들의 성질을 파악하면 도형을 하나의 방정식으로도 간단하게 표현할 수 있다. 이것은 점 자체에 다가 좌표라는 변환 장치를 둠으로서 두 표현의 내포적 의미는 동일하나 외연적 의미는 다른 경우를 만들어 낼 수 있다.

마. 어떤 수에 대해여 그 수의 각 진법에 따른 표기방식은 달라도 그 수의 크기는 동일한 경우

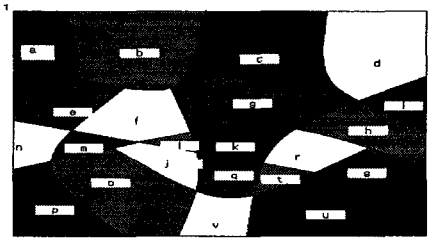
어떤 자연수의 표기방식에서 이진법 표기나 십진법 표기는 서로 다르다. 하지만 본질적으로 이 수들이 갖는 수적인 동질성에 따른 의미는 같다. 다시 말해서 어떤 수의 특정한 진법이라는 변환에 따른 표현은 다를 지라도 그 표현들이 갖는 수의 의미는 불변한다는 것이다. 그러므로 실제 생활에서 컴퓨터는 이진법으로, 시간은 60진법으로 나타내는 것과 마찬가지로 각 문제 상황에 따라 필요에 의해 수의 표기 방식을 달리하여 나타냄으로서 문제 해결에 다양하게 이용할 수 있다.

바. 배색문제의 해법에 변환을 이용한 불변성의 원리에 따른 그래프 이론을 이용한 해석

예제 4. <그림 4>와 같은 여러 개의 영역으로 나눠지는 부분을 채색하여 구별하려고 한다. 가능한 최소의 색은 몇 가지인가?



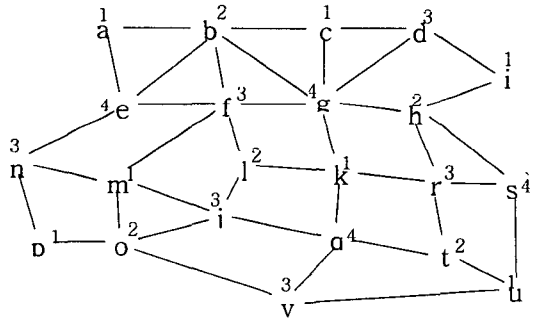
<그림 4>



<그림 5>

풀이. <그림 5>와 같이 하나씩 실제로 채색을 해보면 4가지 색이면 가능하다. □

그러나 이러한 방법을 위치관계의 불변성을 이용하여 <그림 6>과 같이 면을 점으로 경계를 간선으로 변환시켜 다중 그래프를 활용하여 생각하면 색을 실제로 칠하지 않고, 색을 대신하여 수를 대응시킴으로 하여 문제의 혼잡함을 덜 수 있어 쉽게 해결된다.



<그림 6>

사. 도형의 이동에 의한 도형의 표준화

도형의 이동에 의한 도형의 표준화의 예로는 통계 단원의 정규분포곡선에 대하여 살펴보고자 한다. 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$의 확률밀도함수는 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ 이다. 이 정규분포곡선은 평균을 중앙으로 하여 좌우 대칭인 산 모양을 이루며, 이 곡선은 $X=m$에서 최대값을 가지고, m에서 멀어짐에 따라 하강하여 $X=m\pm\sigma$인 데에서 변곡한 후 m에서 멀어짐에 따라 x축에 한없이 접근하는 모양의 그래프이다. 이때 각각의 정규분포곡선은 평균 m과 분산 σ^2에 의해 결정된다. 그러므로 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$를 따르는 확률변수 X에서 확률$P(a\leq X\leq b)=\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$와 같이 매번 복잡한 식을 계산하여야 한다. 그러나 확률변수 X를 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$에 의한 변환을 통하여 표

준화를 시키면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1^2)$를 따르게 된다. 그러므로 일반적인 정규분포에서는 평균과 분산에 따라 확률밀도함수의 그래프가 달라, 확률을 계산할 때 마다 복잡한 정적분을 하여야 한다. 하지만 이들 정규분포곡선들은 확률변수 X가 구간 $[m,\ m+k\sigma]$에서는 m, σ의 값에 관계없이 일정한 확률을 갖는다. 이와 같이 정규분포곡선은 m, σ의 값에 관계없이 불변성을 가지므로 이와 같은 성질을 이용하면 표준정규분포 곡선을 이용하여 모든 정규분포곡선의 확률을 계산할 수 있다. 그러므로 정규분포에서 확률을 계산할 때 확률밀도함수의 정적분으로서 확률을 계산토록 지도하는 것이 아니라 표준정규분포표를 활용하여 확률을 계산토록 지도한다.

아. 치환을 이용한 문제 해결

치환을 이용한 문제 해결의 예로는 인수분해나 전개에서 활용한 경우와 함수의 최대값, 최소값 구하기에 활용한 경우 등의 문제를 통하여 살펴보고자 한다.

예제 5. 함수의 최대값, 최소값 구하기에 활용한 경우

집합$A=\{x|-3\leq x\leq 3\}$에서 정의된 두 함수 $f(x)=x^2+4x+3$, $g(x)=x^2+2x+1$에 대하여,$f\circ g$의 최대값과 최소값을 구하여라.

풀이 1. 합성함수를 구해서 푼다면 아래와 같이

$$\begin{aligned}F(x)=(f\circ g)(x)&=(x^2+2x+1)^2+4(x^2+2x+1)+3\\&=x^4+4x^3+10x^2+12x+8\\&=(x^2+2x+4)(x^2+2x+2)\end{aligned}$$

이므로 사차함수의 최대값과 최소값을 구하기 위하여, 미분을 이용하여 극값을 구하고, 구간의 양 끝점에 대한 함수값을 구하여 최대값과 최소값을 결정한다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(x)&=\frac{d}{dx}(x^2+2x+4)(x^2+2x+2)\\&=2(x+1)(x^2+2x+2)+(x^2+2x+4)2(x+1)\\&=2(x+1)(2x^2+4x+6)=0\end{aligned}$$

$\therefore x=-1$에서 극소값 3을 갖고 최소값은 3이며. $x=3$에서 최대값은 323을 갖는다. □

풀이 2. 주어진 합성함수에서 $X=g(x)$라고 치환을 활용하여 계산하면 주어진 변수 x에 대한 정의역 A는 변수 X에 대한 정의역 $A'=\{X|0\leq X\leq 16\}$으로 바뀐다. 그러므로 주어진 함수 $(f\circ g)(x)$은 함수 $f(X)$으로 치환하여 변역 A'에서 아래와 같이 구하는 것이 훨씬 간단하다.

$$(f\circ g)(x)=g(x)^2+4g(x)+3=f(X)=(X+2)^2-1$$

그러므로 $X=0$일 때, 최소값 3, $X=16$일 때, 최대값 $18^2-1=323$를 갖는다는 것을 너무나도 간편하게 계산할 수 있다. 이와 같은 방법이 가능한 것은 본래의 함수식과 치환한 함수식은 변환을 통하더라도 불변의 값을 가지기 때문이다.

(3) 측도 구성을 통해 특정 상황을 동질의 집합적 해석을 통한 불변성의 원리를 이용하는 경우

어떤 문제 상황을 측도 구성(scaling)을 통해 특정 상황을 동질의 집합적 해석을 통한 불변성의 원리를 이용하는 경우의 예로는 벡터(vector)의 표기 방법을 벡터의 성분 표시라는 측도를 이용한 경우와 육십분법의 각을 호도법으로 바꾸어 각의 표현을 실수화한 측도를 이용한 경우 등에 대해 살펴보고자 한다.

자. 벡터(vector)의 표기 방법을 벡터의 성분 표시라는 측도를 이용한 경우

벡터는 크기와 방향을 함께 갖는 양으로서 자연현상을 물리적으로 해석하는 도구로 아주 요긴하게 사용되어지는 개념이다. 이와 같이 크기와 방향을 갖는 양을 나타내는 방법으로 벡터의 시점과 종점에 의한 유향선분을 이용한다. 이때 선분의 길이가 벡터의 크기를 나타내고, 선분의 방향이 벡터의 방향을 나타낸다. 그러므로 벡터의 표기를 위하여 공간상의 두 점을 필요로 하게 된다. 하지만 벡터는 크기와 방향만을 생각하는 도구이기 때문에 크기와 방향이 같은 모든 유향선분은 같은 벡터를 나타낸다. 따라서 공간상의 벡터의 표기의 방식의 간소화를 위하여 시점을 일치시킨 위치벡터를 사용하게 되면 벡터를 결정하기 위하여 두 점을 고려하는 것이 아니라 한 개의 점, 즉 종점이 벡터 하나를 결정하게 된다. 이 상황은 시점을 일치하게 했을 때나, 그렇지 않았을 때나 벡터의 본질적인 상황은 불변한다. 그러므로 종점의 좌표가 (a_1, a_2, a_3)인 위치벡터는 각 축의 단위벡터라는 측도기준만 정의하면 벡터의 실수배와 합력의 유일성을 이용하여 성분이 종점의 좌표와 같은 (a_1, a_2, a_3)로서 나타낼 수 있다. 이것은 벡터의 표기 방식에서 유향선분을 이용하여 나타내면 평면이나 공간에서만 표기가 가능하지만, 벡터의 성분표시를 이용하여 벡터를 나타내게 되면 벡터의 연산이나 표기가 대수적으로 간단하게 이루어 질 수 있으며, 유한차원으로의 차원확장을 할 수도 있어 수학의 강력한 도구가 된다.

차. 육십분법의 각을 호도법으로 바꾸어 각의 표현을 실수화한 측도를 이용한 경우

초등학교 과정에서는 각을 정의할 때 두 개의 반직선이 한 점에서 만나 이루는 도형을 말한다. 그리고 하나의 반직선이 다른 반직선을 중심으로의 회전량을 말하기도 하며 이것을 각의 크기라고 한다. 이때 각의 크기를 재는 방법으로 각도기를 이용한 육십분법을 사용한다. 이후 중학교 과정에서 삼각함수를 정의할 때에도 육십분법을 사용한다. 하지만 고등학교 과정에서 삼각함수를 정의하고 나서 다른 함수와의 관계를 논하거나 합성을 하고자 하면, 육십분법의 각을 이용하기에는 어색함을 느낀다. 그 이유는 육십분법에 의해 측정한 각은 회전량이므로 실수로 취급하기에 힘이 든다.

그런데 '원에서 호의 길이에 대한 중심각의 비는 항상 일정하다.'는 불변성을 이용하여 각을 길이 개념을 이용하여 측정한 방법이 호도법(radian법)이다. 즉 호도법은 각의 측도 단위로서 1radian을 반

지름의 길이가 r인 원에서 호의 길이가 r인 이 호의 중심각이라고 정의한다. 이때 $1\text{radian} = \frac{180^\circ}{\pi}$ 이라는 육십분법과의 관계가 성립한다. 한편 호도법으로 측정한 각의 측정 방향을 고려하여 시초선을 중심으로 시계 반대 방향으로 잰 각을 양의 각, 시계방향으로 잰 각을 음의 각이라 하여 각에 부호를 부여할 수 있다. 이렇게 길이와 방향을 이용하여 호도법으로 잰 각은 수직선 위의 점들과 일대일 대응을 이루게 할 수 있다. 그 방법은 αradian에 해당하는 반지름의 길이가 r인 호 AB에 대해, 시초선에 대응된 호의 한 점 A를 수직선 위의 원점 O에 대응시키고, 호의 나머지 한 점B를 각의 측정 방향을 고려하여, 양의 방향이면 원점의 오른쪽에, 음의 방향이면 원점의 왼쪽에, 호의 길이 $r\times\alpha$radian 만큼에 해당하는 수직선 위의 한 점 P에 대응을 시키자. 그리고 수직선의 단위수 1의 크기를 원의 반지름 r와 같게 잡으면 수직선 위의 점 P와 점 B는 같은 점이고, 이 점 P에 대응된 각은 αradian이고 실수는 α이다. 그러므로 호도법으로 측정한 각 αradian의 크기와 수직선에 대응된 실수 α는 동일시 할 수 있다. 이와 같이 회전량인 육십분법의 각은 '중심각의 크기와 호의 길이는 비례한다.'는 불변성을 이용하여 호도법의 측도단위를 구성함으로서 각을 실수로 나타낼 수 있게 된다.

(4) 불가능성 증명에서와 같이 불변성의 원리를 이용하는 경우

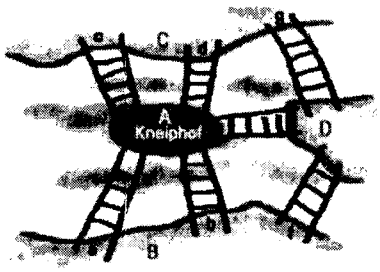
불가능성 증명에서와 같이 불변성의 원리를 이용하는 경우의 예로는 작도불가능성과 Galois의 정리, Konigsberg의 다리 와 Euler회로 등의 경우를 살펴보고자 한다.

카. 작도불가능성과 Galois의 정리에서의 불변성을 불가능성의 증명 방법

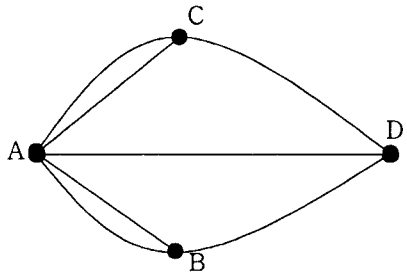
작도라는 문제는 초등 기하에서 사용하는 보통 자와 컴퍼스만을 이용하여 선분, 직선, 원, 그리고 이들 사이의 교점을 찾을 수 있다는 전제를 통하여 주어진 조건에 맞는 도형을 지정된 조건으로 유한 회 사용하여 그리는 일을 말한다. 그러므로 작도불가능이라는 문제는 구하는 도형이 실제로 존재하나, 초등기하에서 작도의 지정된 방법으로는 그릴 수 없을 때를 말한다. 이 작도불가능성문제를 작도를 통하여 실제로 불가능함을 밝히는 것은 대단히 어렵다. 하지만 Galois이론에서 근 사이의 치환군과 수체 사이의 밀접한 관계에 주목하고, 대수방정식이 대수적으로 풀리기 위한 필요충분조건을 구하여 대수방정식의 대수적인 해의 존재에 관한 연구에 결정적인 해답을 주었다. 즉 '실수 u가 작도가능하면 u는 유리수체 Q 위에서 대수적이고 Q 위의 u의 차수는 2의 거듭제곱일 때이다.' 라는 사실은 실제의 작도를 통하지 않고 작도의 불가능성을 대수적으로 계산하여 말할 수 있는 도구를 제시해준 것이다. 이것은 대수적인 수들과 대수방정식이 갖는 불변성을 이용하여 밝혀낸 사실로 우리에게 작도불가능성을 증명할 수 있는 매우 강력한 도구가 된다.

타. Konigsberg의 다리 와 Euler회로의 문제에 대한 불변성을 이용한 불가능성의 증명 방법

예제 6. Konigsberg의 다리에 관한 문제. <그림 7>과 같이 네 개의 섬을 잇는 다리가 일곱 개 놓여있을 때, 모든 다리를 한 번씩 통과하여 처음 지점으로 되돌아 올 수 없음을 증명하여라.



<그림 7>



<그림 8>

증명. Konigsberg의 다리는 <그림 8>과 같은 다중 그래프로 표현된다. 이 그래프의 Euler 회로는 없다. 'Euler회로가 존재하기 위한 필요충분조건은 각 정점의 차수가 짝수 이어야 한다'는 사실에 <그림 8>의 다중그래프는 위배된다. 따라서 Euler 회로는 존재하지 않으며 모든 다리를 한 번씩 경유하여 처음 지점으로 되돌아온다는 것은 불가능하다. □

Konigsbergd의 다리 문제는 모든 다리를 한 번씩 통과하여 처음 지점으로 되돌아 올 수 없다는 것을 다중그래프로 변환하여도 위치관계는 변하지 않으며, 이때의 Euler 회로도에서 각 정점의 차수는 언제나 각 섬에서의 다리의 개수와 일치하며 그 값은 불변한다는 불변량을 이용하여 Euler 회로도의 존재성을 이용하여 증명하였다.

이와 같이 작도불가능성과 Galois의 정리 문제나 Konigsberg의 다리와 Euler 회로 문제는 모두 실제로 행하기에 난해하고 복잡한 상황을 불변하는 성질을 이용하여 이 상황을 대신할 수 있는 수학적 사실을 밝혀 내준 것이다. 그러므로 복잡한 문제 상황을 단순한 상황으로 바꾸어서 주어진 문제 상황을 논할 수 있는 이론적 근거가 존재할 때 활용하면 더없이 효과적인 문제 해결 전략일 것이다.

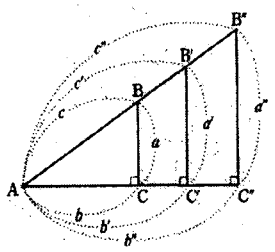
(5) 불변하는 불변량을 이용한 불변성의 원리를 이용하는 경우

수이거나 혹은 어떤 형태로의 양이 보존되거나 불변하는 불변량을 이용한 불변성의 원리를 이용한 예로는 닮음도형의 닮음비, 일반각에서의 삼각비인 삼각함수의 정의, 함수의 주기성, 불변량이 있는 경우의 무리방정식의 해법, Gaussian paring, 패리티(parity) 등 아주 많은 경우의 예들을 살펴볼 수 있다.

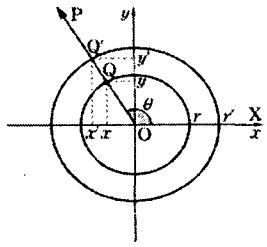
파. 닮음도형의 닮음비

닮음도형의 닮음비는 <그림 9>와 같이 닮음삼각형 ABC, A′B′C′ 및 A″B″C″은 닮음비라는 일

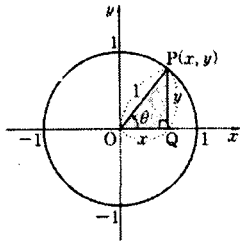
정한 불변량을 가지며, 일정한 닮음비가 대응하는 변의 길이 비이며, 닮음삼각형의 넓이의 비는 삼각형의 닮음비의 제곱비에 의해 계산할 수 있다. 이와 같이 닮음비라는 불변량을 가지는 도형들은 그들 도형 상호간의 공통적인 성질과 불변량에 따른 많은 성질들을 함께 가지고 있다. 이러한 성질들을 이용하는 것은 도형 관련 문제 해결에 아주 유익한 문제해결전략을 활용할 수 있을 것이다.



<그림 9>



<그림 10>



<그림 11>

하. 일반각에서의 삼각비인 삼각함수의 정의

일반각에서의 삼각비인 삼각함수의 정의는 좌표평면상에서 동경상의 한 점 P에 대해 점P의 좌표와 선분OP의 길이를 이용하여 일반각에 대한 삼각함수를 정의한다. 그런데 이 정의는 길이에 대한 좌표의 비에서 좌표 개념에 길이 개념을 적용하면 삼각함수의 정의는 닮음삼각형의 닮음비는 일정하다는 성질을 이용하여 <그림 10>과 같이 중심이 원점이고 반지름이 r인 원위의 점의 좌표와 반지름의 길이를 이용하여 삼각함수를 정의할 수 있고, 여기서 <그림 11>와 같이 반지름이 r인 원 대신에 반지름의 길이가 1인 단위원상의 점의 좌표를 이용하여 삼각함수를 정의하여도 일반각에 대한 삼각함수의 값은 언제나 일정하다. 그러므로 삼각함수를 이용한 많은 문제들에서 삼각함수의 값은 정의를 이용하는 경우 보다 단위원에서 해결하는 경우가 훨씬 수월하고 문제 해결 전략으로도 가치가 높다. 이와 같이 할 수 있는 것이 닮음비라는 불변량이 존재하기 때문이다.

거. 함수의 주기성

함수의 주기성은 함수 $y=f(x)$가 임의의 실수 x 에 대해 $f(x+p)=f(x)$를 만족하는 최소의 양수 p가 존재할 때, 이 함수 $y=f(x)$는 주기가 p인 주기함수라고 한다. 이와 같은 주기성을 갖는 함수의 그래프의 모양이나 성질은 한 주기에 해당하는 모양이 반복해서 나타나는 성질을 가지므로 함수의 그래프나 성질을 파악하는데 정의역 전체에 대해 살펴볼 필요 없이 한 주기 p만큼만 알아보면 함수 $y=f(x)$의 정의역 전체에 대한 성질을 파악할 수 있다. 이것이 주기라는 불변량이 주는 문제해결전략에서의 가치이다.

너. 불변량이 있는 경우의 무리방정식의 해법

예제 7. 다음 무리방정식 $\sqrt{x+5}-\sqrt{2x-4}=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}$ 의 해를 구하시오.

풀이 1. 무리방정식에서 해를 구하는 기본적인 방법으로 양변에 항을 2개씩 놓고 양변을 제곱하여 정리한 후 다시 양변을 제곱하는 방법으로 문제 해결에 접근한다. 이렇게 풀이를 하게 되면 무연근이 발생할 수도 있고, 풀이과정 또한 복잡해진다.

풀이 2. 우선 여기서 주어진 방정식을 변형하면

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-4}$$

이고, 양변의 두 항의 제곱의 차가 각각 5로서 일정하므로 분자를 유리화 하면

$$\frac{5}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}}=\frac{5}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-4}}$$

이고 약분하고 역수를 취한 후, 처음 주어진 식과 변변 더하면,

$$\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+1}, \quad \therefore\ x+5=2x+1, \quad \therefore\ x=4 \qquad \square$$

풀이 2에서의 풀이 방법은 일반적인 방법보다 훨씬 간단하며, 양변을 제곱하지 않으므로 무연근 또한 생기지 않는다. 이와 같이 주어진 문제 상황에서 문제의 각 요소들 사이의 불변량을 찾아서 문제 해결에 적용하는 것은 매우 유익한 것이다.

더. Gaussian paring

Gaussian pairing은 여러 개의 수를 계산하는 과정에 어떤 특정한 규칙으로 두 수의 합이나 곱이 일정한 경우에는 가우스가 1부터 n 까지의 합을 구하는데

$$2(1+2+\cdots+n)=(1+n)+(2+n-1)+\cdots+(n+1)=n\times(n+1)$$

임을 이용하여 계산한 것과 같은 방법으로 일정한 규칙을 갖는 쌍을 묶어서 계산을 용이하게 하는 방법을 Gaussian pairing이라 한다. 이러한 Gaussian pairing을 이용하는 다음의 예제를 생각해 보자.

예제 8. 함수 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$ 에 대하여 무한급수 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{k}{101}\right)$의 값을 구하시오.

풀이 1. $$\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{k}{101}\right)=\frac{4^{\frac{1}{101}}}{4^{\frac{1}{101}}+2}+\frac{4^{\frac{2}{101}}}{4^{\frac{2}{101}}+2}+\frac{4^{\frac{3}{101}}}{4^{\frac{3}{101}}+2}+\cdots+\frac{4^{\frac{100}{101}}}{4^{\frac{100}{101}}+2}+\frac{4^{\frac{101}{101}}}{4^{\frac{101}{101}}+2}$$

이다. 이것을 직접 계산한다는 것은 상당히 힘들 것이다.

풀이 2. 함수 f가 가지는 성질을 찾아보자. 임의의 실수 x에 대해

$$f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4}{4+2\cdot 4^x}=\frac{4^x+2}{4^x+2}=1$$

이다. 이것은 함수 $f(x)$는 정의역의 두 원소의 합이 1인 두 수의 함수값의 합은 언제나 1이라는 사실을 의미한다. 그러므로 주어진 식의 계산에서 앞의 사실을 적용할 수 있는 pairing만 구성하면 된다. 즉

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{k}{101}\right) &= f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{2}{101}\right)+\cdots+f\left(\frac{101}{101}\right)\\ &= \left\{f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{100}{101}\right)\right\}+\left\{f\left(\frac{2}{101}\right)+f\left(\frac{99}{101}\right)\right\}+\cdots+\left\{f\left(\frac{50}{101}\right)+f\left(\frac{51}{101}\right)\right\}\\ &= 1+1+\cdots+1=1\times 50=50 \qquad \square\end{aligned}$$

풀이 2에서는 실제식의 계산이 아니라, $f(x)+f(1-x)=1$라는 함수 f가 가지는 불변량에 대한 성질을 찾아서, 정의역의 원소들 간의 관계와 구하고자 하는 식의 관계를 잘 파악한 후, 구하고자 하는 식에서 pairing을 구성하여 구하고자 하는 식의 값을 계산하였다. 이와 같이 주어진 문제에서 존재하는 불변량을 찾아 문제를 해결토록 하는 불변성의 원리가 우리에게 제공하는 문제해결전략은 다른 어떤 전략보다도 뛰어나다고 할 수 있다. 하지만 풀이 2에서와 같은 불변량에 대한 함수 f의 성질을 초보자들이 쉽게 찾지 못하는 어려움은 가진다.

머. 패리티(parity)

패리티(parity)란 짝수와 홀수가 갖는 성질을 말한다. 즉 기우성을 이야기하는 것으로서 짝수와 홀수가 갖는 특성으로서 일종의 불변량이다. 예로 11개의 톱니바퀴가 원형으로 서로 연결되어 있다. 이들 톱니바퀴가 동시에 돌아갈 수 있겠는가? 하는 질문의 답은 '불가능합니다.' 왜냐하면 맞물린 톱니바퀴는 반드시 도는 방향이 반대 방향이어야 한다는 불변의 상황이 존재해야 합니다. 그러데 첫 번째 톱니바퀴가 시계방향이면 짝수 번째 톱니바퀴는 반시계방향으로 돈다. 그러므로 첫 번째는 11번째와 같은 방향으로 돌고 있으므로 첫 번째와 11번째 톱니바퀴는 서로 맞물려 돌아갈 수가 없다.

이와 같이 어떤 행위가 반복적으로 일어나는 상황에서 불변하는 상황이 존재하는 경우를 이용하는 것은 문제 해결에 대단히 강력한 도구가 된다.

이상으로 수이거나 혹은 어떤 형태로의 양이 보존되거나 불변하는 불변량을 이용한 불변성의 원리를 이용한 경우의 예들에 대해 알아보았다. 분명 주어진 문제에서 불변량을 찾는 것은 문제해결의 수월성을 보장한다. 하지만 학생들이 이 원리를 습득하기는 쉽지 않다. 그러므로 많은 문제들과 부딪히면서 학생들이 직접 체득하여야 한다. 그러면 이 원리의 적용범위는 더없이 넓을 것이다.

4. 결 론

본 연구에서는 불변성 원리의 개념을 고찰하고, Shapiro가 제시한 불변성 원리의 분류를 바탕으로 불변성에 관련된 중등학교 수학교과 내용을 분석 및 분류하고, 이에 관련된 교수학적 논의를 제시였다.

본 연구에서는 Shapiro가 제시한 유형에 준하여 ① 일반성을 잃지 않는 경우와 같은 불변성의 원리를 이용하는 경우, ② 변환에서와 같이 상황의 동질성에 따른 불변성의 원리를 이용하는 경우, ③ 측도 구성을 통해 특정 상황을 동질의 집합적 해석을 통한 불변성의 원리를 이용하는 경우, ④ 불가능성 증명에서와 같이 불변성의 원리를 이용하는 경우, ⑤ 불변하는 불변량을 이용한 불변성의 원리를 이용하는 경우 등으로 분류하였다. 그리고 이들 유형에 대해 중등학교 수학교육에 관련된 내용들을 각 유형에 따라 아래와 같이 사례들을 찾아보았다. 첫째, 일반성을 잃지 않는 경우와 같은 불변성의 원리를 이용하는 경우의 예로는 Pappus의 정리를 논증 기하로 증명하는 대신에 해석기하로 증명할 때 좌표의 설정에서의 자유로움에 따른 수월성의 활용, 대칭다항식에서 주어진 임의의 문자들에 대하여 대칭다항식을 구성하는 문자들 사이에 대소 관계를 고정하여도 일반성을 잃지 않는 것과 같은 경우, 나눗셈 정리를 이용한 식의 계산, 인수정리와 항등식의 성질을 이용한 식의 값 계산하기 등에서 다양한 형태의 예들을 만날 수 있다.

둘째, 변환에서와 같이 상황의 동질성에 따른 불변성의 원리를 이용하는 경우로는 도형과 도형의 방정식의 동질성, 수의 각 진법에 따른 표기방식은 달라도 그 수의 크기관계가 유지 되는 것, 배색문제의 그래프 이론을 이용한 해석, 도형의 이동에 의한 도형의 표준화, 치환을 이용한 문제 해결 등의 경우가 있다.

셋째, 측도 구성을 통해 특정 상황을 동질의 집합적 해석을 통한 불변성의 원리를 이용하는 경우로는 선분의 길이를 측정할 때 단위 길이를 활용하고, 넓이를 측정할 때 단위넓이를 활용하는 경우들뿐만 아니라 벡터(vector)의 화살표를 이용한 표기 방식을 벡터의 성분 표시로 바꿀 수 있는 경우, 삼각함수에서 육십분법으로 측정한 각을 호도법을 이용한 각을 이용하여 각의 실수화를 하는 경우 등이 있다.

넷째, 불가능성 증명에서와 같이 불변성의 원리를 이용하는 경우로는 작도 불가능성과 Galois의 정리, Konigsberg의 다리와 Euler의 회로 등이 있으며, 다섯째, 불변하는 불변량을 이용한 불변성의 원리를 이용하는 경우로는 닮음도형의 닮음비, 일반각에서의 삼각비인 삼각함수의 정의, 함수의 주기성, 비례관계와 그 활용, 불변량이 있는 경우의 무리방정식의 해법, Gaussian paring, 패리티(parity) 등에 관련된 예들을 분석하였다.

본 연구의 결과를 통해 수학 문제해결의 지도에서 불변성 원리의 활용 가능성을 모색하며, 문제해결 전략에 관련된 수학교육학 연구 주제 및 연구 내용의 폭을 넓힐 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서 주식회사.

김부윤 외1 (2006). 수학 동아리, 서울: 보성각.

김영미 외 2 (2003). 알고리즘을 활용한 수학 문제 해결, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육> **17**, pp.196-179, 서울: 한국수학교육학회.

김용대 (2004). 창의적 문제해결과 문제변형을 위한 사고, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **43(4)**, pp.399-404, 서울: 한국수학교육학회.

김응태 · 박한식 · 우정호 (2004). 수학교육학개론, 서울: 서울대출판부.

박을용 외 3인 (1977). 콘사이스 수학사전, 서울: 창원사.

박재균 (2005). New 수학영어사전, 서울: 교우사.

양은경 · 황우형 (2005). 수학 학습유형과 문제해결전략, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **44(4)**, pp.565-582, 서울 : 한국수학교육학회.

이대현 (2005). 창의적인 문제해결과정에서의 직관과 논리의 역할, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **38(2)**, pp.159-164, 서울 : 한국수학교육학회.

이양미 · 전평국 (2003). 수학적 문제해결에서의 표상과 표상의 정교화 과정 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **44(4)**, pp.627-651, 서울 : 한국수학교육학회.

전북과학고 (2005). 수학영재들의 수학적 재능 향상을 위한 '등식의 탐구' 프로그램 개발, pp.82-113.

전평국 · 정인수 (2003). 수학적 문제해결 지도에서 교사의 역할에 대한 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육> **7(1)**, pp.1-14, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 · 꼴랴긴 Yu.M. 공저 (2006). 문제해결의 이론과 실제 서울: 승산.

Engel, A (1991). *Problem-Solving Strategies,* New York: Springer.

Shapiro, H (2005). http://www.math.kth.se/~shapiro/problem_main.html

Zeitz, P (1999). *The art and craft of problem solving*, New York: John Wiley & Sons, INC.

The Study on the analysis of Invariance Concept in Secondary Mathematics Contents

Lee, Sang Keun
Dept. of Mathematics Education, Gyeongsang National University, 660-701, Korea
E-mail : sklee@gsnu.ac.kr

Kim, Tae Ho
Gyeongsang National University high school, 660-701, Korea
yungkth@hanmail.net

Chung, Ki Young
Gyeongnam Science high school, 668-851, Korea
E-Mail : zungkiyoung@hanmail.net

Lee, Chun Goo
Gyeongnam Science high school, 668-851, Korea
E-Mail : chunn92@hanmail.net

One of the most important aims in mathematics education is to enhance students' problem-solving abilities. To achieve this aim, in real school classrooms, many educators have examined and developed effective teaching methods, learning strategies, and practical problem-solving techniques. Among those trials, it is noticeable that Engel, Zeits, Shapiro and other not a few mathematicians emphasized 'Invariance Principle' as a mean of solving problems. This study is to consider the basic concept of 'Invariance Principle', analyze 'Invariance' concept in secondary Mathematics contents on the basis of framework of 'Invariance Principle' shown by Shapiro and discuss some instructional issues to occur in the process of it.

* ZDM Classification : U14
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U99
* Key Words : Invanriance, Problem solving strategy