韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2006. 11. 제 45권, 제 4호, 439-457.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
November. 2006, Vol. 45, No. 4, 439-457.

수학사를 활용한 중학교 방정식에서 학생의 수학화

고 상 숙 (단국대학교)
최 경 화 (단국대학교 대학원)

1. 서 론

수학이란 인간의 필요에 의해서 생겨났으며 수학적 발견의 근원인 직관으로부터 시작하여 끊임없는 시행착오와 반성, 분석, 종합하는 인간 활동을 통해서 발전되어 왔다. Lakatos(1978)는 비형식적인 수학은 의심할 여지없이 확립된 정리의 수가 단조롭게 증가됨으로써가 아니라 비판에 의해서 증명과 반박에 의해서 추측의 부단한 개선을 통한 사고실험과학이며 수학적 지식은 추측에 불과하다고 주장하여 비판적 오류주의를 수용하였다. 또한, Poincare와 Klein과 같은 수학자들은 수학의 역사적 발달의 과정을 따라 소박하고 직관적인 상태에서 점진적인 형식화단계를 거쳐 마지막에 연역적인 형식체계에 이르도록 지도하는 것이 자연스럽고 과학적이 지도방법이라고 주장한다(우정호, 2000).

이와 같이 수학교육 인식론의 변화에 따라 수학을 학습하는 학생들은 수학화를 통해 학습자 스스로 수학을 구성해 나가야 한다고 주장한 Freudenthal의 수학화 이론은 학습자의 능동적인 활동을 강조한 교수-학습이론으로 최근 몇 십년간 주목을 받아왔다.

그에 의하면, 수학은 확실성을 추구하는 정신적 활동이며, 현실을 바탕으로 상식에서 출발해서 반성적 사고를 통해 내용과 형식, 현상과 본질의 교대 작용을 거듭하면서 조직화하는 활동이다. Freudenthal(1973)은 이러한 인간의 정신적 활동으로서의 수학의 가장 본질적인 특성을 현상의 조직화 활동이라 보고 이것을 수학화라고 표현하였고 그러한 현상의 재현하는 방법으로는 수학자 개인의 발명과정의 재현형식을 취하거나 수학사 곧 인류의 대역적인 학습과정을 단축된 형태로 반복하게 함으로써 수학적 사고경험을 시키려는 역사 발생적 원리를 주장하였다. 또한 그는 역사 발생적으로 지도한다는 것은 교재가 발생된 순서대로 구성되어야 한다는 것이 아니라 수학이 훌륭한 교사의 지도아래 어떻게 발생하게 되었는지를 찾아보고 실제의 발명과정보다 개선되고 잘 인도된 과정을 따라 재발명할 것을 제시하였다.

이러한 수학화를 위해 역사적 재발명 원리에 의한 학습자료 구성은 과거 수학사 자료를 조사해보는 것으로부터 출발한다. 수학사를 활용한 학습을 통해 학생은 수학이 천재들만의 전유물이 아니라 인류역사의 오랜 경험의 산물이며 바로 실생활에 필요하여 처음 출현하였고 끊임없이 수정 보완되어 왔다는 사실에 친근감을 느끼어 학습동기와 의욕을 가질 수 있다. 수학적 개념의 발생과정을 밟아가는 학습에서 흥미를 유발시켜서 학습효과를 높여서 수학의 발전과정에 따라 수학적 개념과 원리를 이해함으로써 자연스럽게 자신감을 형성할 수 있을 것이다. 이에 따라 수학사를 활용한 학습의 효과를 알아보면 첫째 수학적 사고발달을 도와 수학을 이해할 수 있게 하며, 둘째, 학습에 대한 동기를 제공하여 수학에 대한 긍정적인 태도변화를 도우며, 셋째, 수학 속의 인간적 사회문화적 측면을 제공한다고 고상숙과 고호경(2006)은 주장하고 있다. 이에 발맞춰 수학사에 대한 수학교사의 관심이 점점 높아지고 있고 수학사 활용 수업의 효과를 분석하는 논문이 많이 나오고 있는 추세이지만 수학사를 수학교육에 활용하는 입장과 관련된 연구들의 많은 부분이 흥미위주의 자료 개발에 한정되어 있다는데 지적이 되고 있다.

따라서 학교수학에 대한 역사 발생적 자료의 개발, 나아가 역사 발생적 교재구성에 대한 폭넓은 연구가 필요하다. 본 연구는 중학교 이차방정식에서 기계적인 계

* 2006년 7월 투고, 2006년 10월 심사 완료.
* ZDM 분류: D43
* MSC 분류: 97D40
* 주제어 : 수학화, 방정식, 수학사, 교수학적 현상학

산이 아닌 방정식의 역사적 재발명 원리에 의해 개발된 교수-학습자료를 통해 학생의 점진적 수학화 과정의 특징과 교수학적 현상학의 특성을 살펴봄으로써 학습변화의 효과를 논의해 보고자 한다.

II. 문헌고찰

1. 방정식의 역사

방정식(方程式) 이라는 말의 유래를 보면 BC 1세기경 중국 「구장산술」 제 8권에 '방정' 이라는 장이 있는데 이것이 방정식의 어원이다. 여기서 '방(方)' 이란 네모 또는 사각을 뜻하는 말이고, '정(程)'은 할당한다, 재어본다는 뜻으로서 '4각으로 할당 한다'는 뜻이라고 한다. 이는 문제를 풀 때, 연립일차방정식의 각 항의 계수를 계산판에 산대로 나열한 다음 가감법으로 푸는 것이 소개되는데 이와 같이 계수를 늘어놓은 것을 '방정'이라고 불렀다(우정호, 1998).

구장산술에서 방정식의 풀이방법은 미지수가 있는 등식을 사용하는 방법이 아닌 '산목(算木)'을 사용해서 미지수의 계수와 상수항을 나타내는 방진(方陣)을 만들어, 그 방진을 조작하는 방법이었다. 따라서, 방정식이라고 하는 것은 연립일차 방정식이 되는 문제의 풀이법에서 붙여진 이름이라고 볼 수 있다.

이집트의 파피루스, 바빌로니아의 점토판에서 취급되기 시작한 방정식은 디오판토스의 다항방정식을 거쳐 비에트, 데카르트에 의하여 현대와 같은 체계를 확립하였다. 역사 속에서의 방정식이 유래한 배경을 바빌로니아, 이집트, 그리스, 아라비아 순으로 살펴보고자 한다.

1) 바빌로니아

1930년대 이후의 바빌로니아의 수학연구로 유명한 노이게바우어(Neugebauer ; 1899-1990)에 의하면 바빌로니아에서는 60진법의 정수와 분수를 알고 있었고 수표 중에서 곱셈표, 역수표, 제곱표, 세제곱표, 지수표 등이 있어서 이들을 사용하여 1,2차의 방정식, 간단한 삼차방정식과 연립이원 이차방정식 등을 풀었다(박세희, 1985).

그들은 방정식을 나타내는데 미지수를 나타내는 문자는 없고, 길이($=x$), 너비($=y$), 그들의 곱을 넓이($=xy$)로 나타내고 또 미지수가 더 필요한 경우에는 깊이($=z$)라는 단어를 사용하여 나타내고 xyz를 부피라고 나타내고 있다.

이때 항상 $y<x$를 가정하고 있다. 방정식을 취급하고 있는 점토판은 문제와 그 풀이로 이루어지고 있는데, 미지수, 즉 길이 너비, 깊이는 주로 수메르 문자를, 문제의 본문은 아카디아 문자를 사용하여 구별하고 있다. 바빌로니아의 수학 자료는 현재 수학적 내용을 담은 400여 개의 점토판이 여러 나라의 박물관에 소장되어있다.

바빌로니아의 이차방정식의 풀이를 예로 들면 이차방정식 $11x^2+7x=6$ 을 푸는데 먼저 주어진 방정식의 양변에 11을 곱하여 다음 방정식을 만들었다. $(11x)^2+7(11)x=66$ 여기서 $y=11x$로 놓으면 그것은 다음과 같은 표준형 $y^2+py=q$ 가 되고 이는 공식 $y=\sqrt{(\frac{p}{2})^2+q}-\frac{p}{2}$ 에 대입함으로써 풀린다. 결국 $x=y/11$이 된다.

2) 이집트

이집트인들의 수학지식은 체계적인 것은 아니며 학문이라 부를 수 있을 정도의 이론적인 것도 아닌 단순한 생활의 지혜였으나 그들이 사용한 과학과 기술 속에서 상당한 수학적 지식을 찾아낼 수 있다. 당시의 수학을 기록한 문헌은 모스크바 파피루스(기원전 1850년경)와 린드 파피루스(기원전 1650년경)가 있는데 110개의 문제를 다루고 있다. 이들을 보면 실용적인 기원을 보여주고 있는데 가장 많은 것이 간단한 일차방정식에 관한 문제다. 린드파피루스에 문제 24는 「아하와 아하의 7분의 1의 합이 19가 되는 수가 되는 '아하'를 구하라」 라는 문장의 방정식인데 이들의 해법은 정확한 값과 다를 가능성이 있는 특정한 값을 '아하'로 가정하고 좌변에 보이는 연산의 결과를 가정한 수에 실행한다. 그리고 비례법을 사용하여 맞는 답을 찾는 것이다.

모스크바 파피루스에는 정사각 피라미드의 절두체의 부피에 대한 정확한 공식의 한 수치예가 나오는데 이는 매우 놀라운 일이다. 「밑변의 한 변이 각각 4, 2이고 높이가 6인 절단된 피라미드의 부피를 생각해 보라.」 그리고 그 풀이법을 적고 있다. 우선 4를 제곱하면 16이고 4를 두 배 하면 8이고 2를 제곱하면 4이다. 다시 16과 8과

4를 모두 더하면 28이 된다. 또 6의 1/3을 취하면 2가 되고 28을 두 배하면 56이 된다. 바로 그의 부피가 56이다.

3) 그리스

기하학의 왕국인 그리스에서는 많은 기하학자가 배출되었으나, 대수학자는 드물었다. 초기의 그리스 수학은 메소포타미아나 이집트의 영향을 받아서 계산위주의 경향이 짙었으나 점점 기하학적인 면에 치우치더니 '수학=기하학' 이라는 기하학 위주의 수학으로 정착하게 된다. '넓이의 적용' 으로 알려진 방법으로 이차방정식의 풀이법을 만들어 냈는데 이 방법은 기하학적 대수의 일부로써 유클리드의 <원론>도 그것을 받아들였다. 그리스 대수학자 디오판토스의 대표작으로 <산학>13권중 6권만이 남아 있는데 이 책에서는 1차와 2차 방정식과 부정방정식을 다루었으며 답은 양수만을 택하고 무리수와 나눗셈과 같은 것은 배제하고 있다.

4) 아라비아

820년 이슬람의 수학자 알·콰리즈미(al-Khwarizmi)의 대수에 관한 고전적 저작인 <"Hisab al-gabr wal-muqabala" -복원과 축소의 과학>이 발간되었다. 이 책의 아라비아 원본은 분실되었으나 12세기의 라틴어 번역본이 남아 있었다. 번역본의 제목이 "Algorithmi de numero Indorum"에서 우리가 수학 용어로 사용하고 있는 알고리즘(저자 이름을 라틴화한 것)이라는 용어가 유래되었다. '알·자부르(al-jabr)' 라는 단어는 어떤 양을 방정식의 한 쪽 변으로부터 다른 변으로 이항하는 것을 뜻하고, 무카발라(muqabala)는 이항의 결과 식을 단순화시키는 것을 가리킨다(김용운, 김용국, 1986, p.139).

유럽에서는 이 책의 표제의 머리부분인 '알·자부르(al-jabr)'라는 이름으로 알려지게 되었다. 또한 '알·자부르(al-jabr)' 라는 단어를 그 결과 축소를 뜻하는 아라비아어인 al-jabr가 algebra(대수)가 되었다. 그 단어가 'algebra(대수)' 전제 학문과 동의어로 만들었다.

<알·자브르>에는 그리스적 요소가 분명히 흔적을 남기고 있지만 처음의 기하학적 증명에는 그리스 수학과의 공통점은 거의 찾아볼 수 없다. 알·콰리즈미의 <대수학> 번역판은 6개의 장으로 근과 제곱과 수라는 세 종류의 수량으로 된 여섯 종류의 방정식들의 풀이법이 있다. 양의 계수만을 허용했으며 각 유형들을 따로 다루었다. 특히 그 중 세 가지의 전형적인 예제 유형들인 $x^2+10x=39$, $x^2+21=10x$, $3x+4=x^2$이 있다. 그 풀이법은 특정한 예제에 적용된 '제곱의 완성'에 대해 순서가 증명 없이 상세하게 씌어졌다(양영오·조윤동, 2000).

5) 중국

중국 수학은 구장산술에 그 근원을 두고 발전하였다. 초기 이차 이상의 방정식은 기하의 문제를 통하여 먼저 제곱근과 세제곱근을 푸는 문제, 즉 $x^2=a, x^3=a$ (a는 양수) 의 양수 해를 구하는 문제에서 시작하였다. 그러나 구장산술의 제9장에서 구고, 즉 피타고라스 정리를 취급하면서 나오는 문제로 처음으로 일차항이 있는 방정식 $x^2+34x=71000$을 취급하고 있는데 이 때 일차항의 계수 34를 종법(從法) 이라는 단어를 사용하여 나타내고 답 250을 얻었지만 그 풀이 과정은 제곱근을 푸는 방법으로 풀었다고 하고 자세한 내용은 들어 있지 않다. 그 후 5세기 중엽에 쓰여 졌을 것으로 추정되는 장구건산경에 두 문제의 이차 방정식이 들어 있다.

2. 수학사를 활용한 수학 교수-학습 이론

1) 점진적 수학화를 통한 안내된 재발명

'점진적인 수학화'와 안내된 '안내된 재발명 원리'는 수학자의 활동을 모든 학습의 중심에 놓는 Freudenthal (1973)의 관점에 기초한다.

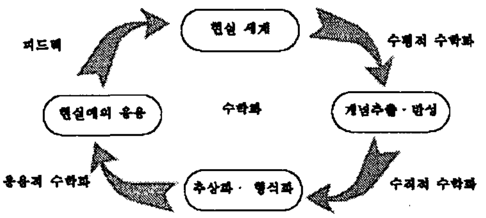
Freudenthal에 따르면, 어린 아동을 위한 수학교육은 무엇보다도 일상적 현실을 수학화 하는 것에 목표를 두어야 한다. 그러나 아동의 수준에 맞는 수학을 수학화 하는 과정도 역시 중요하다. 학생들은 개념학습이나 문제해결 절차에서 이루어지는 일반화하기, 추측하기, 반성하기, 정당화하기, 증명하기, 모델링, 기호화, 정의하기, 도식화하기 등의 수학적 활동을 경험할 기회를 가져야 한다. Freudenthal의 안내된 재발명 원리에 의하면, 학생들은 수학이 발명된 과정에 유사한 과정을 경험할 기회를 가져야 한다. 이를 위해 수학사나 아동들의 비형식적 지식과 전략이 교육과정 설계를 위한 근원이 될 수 있다. 교육과정 개발자는 이러한 것들을 근원으로 한 사고실험을 바탕으로 학생들이 스스로 수학적 사고에 이르는 경로를 상상하는 것이 중요하다. 일반적으로 다양한 범위의 사고

와 전략을 가능하게 하는 문맥 문제들을 찾을 필요가 있으며, 점진적인 수학화의 과정을 통해서 가능한 학습경로를 찾아가도록 하는 것이 필요하다(이충호, 2001).

2) 교수 현상학적 탐구

교수학적 현상학을 기반으로 점진적인 수학화를 추구하는 수업에서 첫 번째 단계의 구체적인 문맥으로 시작되며 이 단계에서는 수학화를 염두에 두면서 여러 가지 개념과 구조가 내포된 현실 상황을 탐구한다. 이러한 탐구에서 중요한 것은 여러 가지 개념과 구조의 본질적인 측면에 관한 풍부한 직관적인 관념 또는 비형식적 지식과 전략을 개발하도록 하는 것이다.

문맥 수업에서 다루어지는 과정은 다음 그림과 Ⅱ-1과 같이 하나의 학습 사이클로 표현될 수 있다.[1)]



<그림 1> 수업에서의 수학화 과정

3) 학습 수준 상승의 촉진

수학적 개념이나 기능을 학습하는 것은 장기간에 걸쳐서 진행되는 과정이고 다양한 추상화 수준에 따라 이행되는 과정이다. 수준 상승이 촉진되도록 하기 위해서는 적절한 수직적 수단들을 제공해야 한다. 수직적 수단이란 처음 수준에서의 직관적, 구체적, 비형식적인 문맥과 결합된 조작과 반성적, 추상적, 형식적, 체계적 조작 사이의 수준 차를 연결하는 데 도움이 되도록 처음부터 여러 가지 자료, 화살표 기화와 같은 시각적 모델, 상황 모델, 도식, 다이어그램, 그리고 기호와 같은 수학적 수단들이 제공되고, 탐구되고, 개발되도록 한다는 것을 의미한다. 이 단계이서는 이런 수학적 수단들이 그대로 부과되기 보다는 학생들이 그 문맥에 맞는 자신의 생각을 표현할 수 있는 수단을 만들어 보는 단계가 포함되어야 한다.

4) 반성적 사고의 촉진

수준 상승은 반성적 사고에 의해 촉진되며, 갈등이나 학생들 자신의 활동은 반성적 사고가 일어나도록 하는 데 도움이 될 수 있다. 학생들은 이미 접한 학습 가닥들을 반성하고 앞으로 무엇이 진행 될 것인지에 대해 예언할 기회를 계속 가져야 한다. 이런 반성적 사고를 가능하게 하고 학생들의 활동을 더욱 활성화하기 위해서는 주어진 문맥을 다루어 가는 것도 중요하지만, 어떤 단계에 이르러서는 좀더 새로운 상황에 직면하도록 할 필요가 있다. 현실과 관련된 문제나 수학적인 문제로서 다양한 해결책과 때로는 다양한 수준에 따른 해결책을 허용하는 열린 문제나 해결되기 전에 자료나 준거들을 스스로 보충 할 것을 요구하는 불완전한 문제를 다루는 것도 필요하다. 스스로 문제를 고안하고 기호나 용어, 도식 또는 모델을 고안하는 등의 활동을 통해서 학생들은 수업에서 수학화 과정을 스스로 경험해 갈 수 있다.

학습-지도 과정에서 중시해야 할 것은 출발 단계에서 학생들의 비형식적 방법을 이용할 기회를 극대화 시키는 것이고 자신들의 활동을 반성케 함으로써 단축화, 간소화를 유도하고 자신에 대한 진단을 할 수 있는 기회를 제공할 수 있도록 해야 하며, 나아가서 표준의 형식적인 절차와의 접목이 이루어지도록 해야 한다(정영옥, 1997).

5) 학습 가닥의 혼합을 통한 구조화

장기 학습 과정으로 볼 때 과거의 학습과 미래의 학습은 서로 통합되어야 한다. 너무 작은 단계로 쪼개어 가르치거나 너무 체계적으로 가르치면 오히려 맥이 끊기는 결과를 초래한다. 체계적이고 형식적으로 다루기 전에 일상 언어로 표현된 상식적인 내용으로 접근할 수 있도록 다양한 비형식적인 기회를 제공함으로써 나중에 체계적인 학습의 발판이 되도록 하는 것을 의미한다. 수학을 배운다는 것은 단편적인 지식과 기능을 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 지식과 기능을 하나의 구조화된 전체로 조직하는 것이다. 새로운 개념과 기능은 기존의 지식체에 동화 되거나 아니면 기존의 지식체 자체가 이 새로운 개념과 기능에 의해 새롭게 조직되어야 한다. 따

1) 이 그림은 De Lange(1987)가 제시한 것을 변형한 것이다(정영옥, 1997, 재인용).

라서, 새로운 관점에서 기존의 지식을 살펴보는 기회를 마련해야 하고 교사는 이런 기회를 충분히 제공해야 한다(정영옥, 1997).

기존의 수학화 이론과 방정식에 대한 선행연구로는 정영옥(1997)은 Freudenthal의 수학화를 통한 수학 학습-지도론에 대한 이론적 분석과 그 체계화를 시도하였다. 고재필(2004)은 수학화 과정을 도입한 대수영역을 위한 학습자료를 개발하였으며, 수학사를 소재로 한 것이 아닌 실생활의 다양한 예를 통한 흥미유발의 학습자료를 개발하였고, 박정혜(2005)는 수학화 활동을 위한 적절한 기하단원학습 자료를 개발하고 학생의 특징을 분석하고자 하였다. 이은정(2005)은 수학화 활동을 위한 방정식·부등식의 원리에 대한 충분한 이해와 문제해결에서의 적용능력을 개발시키기 위한 학습 자료 개발하였다. 그럼에도 불구하고 여전히 수학사를 활용한 Freudenthal의 수학화 활동을 통한 방정식영역에 관한 학습자료 개발이 미흡한 실정이며, 대부분의 연구가 학습자료 개발에 그치고 있어 개발한 자료의 효과를 학생 대상으로 구체적으로 연구한 사례연구는 거의 찾을 수 없다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구대상

수학사를 활용한 수업에서 나타나는 학습과정의 변화를 살펴보기 위해 연구대상은 현 중학교 2학년 남학생 한 명을 선택하는 것을 원칙으로 하였다. 최근 사교육이 일반화되면서 우리나라 학생들은 국어, 영어, 수학에서 1년 정도 앞선 선행학습을 하고 있는 것이 일반적이다. 연구에 활용하고자 하는 과정은 중학교 3학년 9-가 단계 이차방정식이므로 본 내용을 학습하지 않은 학생을 찾던 중 선행학습을 하지 않은 학생을 찾아내기가 그리 쉽지 않았다.

질적 연구방법을 통해 구체적으로 학생의 변화과정을 탐구하는 것이므로 선행학습자나 비선행학습자의 구분에 의한 연구대상 선택은 의미가 없었다. 왜냐하면 학생이 가지고 있는 선행지식을 연구자가 직접 구체적으로 관찰 및 상담을 통해 이끌어낼 수 있기 때문이다. 따라서 본 연구를 위해 선행학습을 한 2학년 학생, 지성이가 연구에 자발적으로 참여하였다. 이 학생은 2남의 장남이며, 활달한 성격에 공부에 대한 욕심과 의욕이 많은 편이다. 중학교 1학년까지는 수학 개인 지도를 받았으며 현재는 방학에만 학원에 다니고 있고, 성적은 중상위권 이다. 수학은 수차례 학습한 결과 계산능력은 뛰어나나 문장제 활용 문제를 싫어하는 단점이 있으며, 반복 학습을 싫어하는 특징을 가졌다.

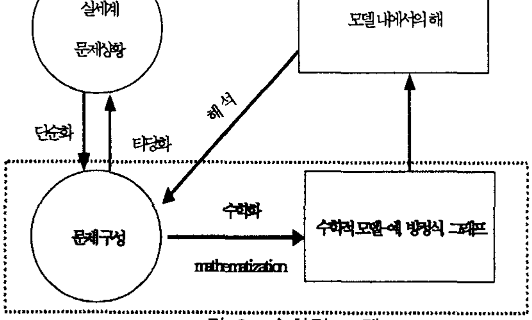
2. 연구도구

본 연구에서는 문헌고찰에서 살펴본 수학사 원리를 바탕으로 점진적 수학화를 위한 이차방정식 영역의 구성 방향을 다음과 같이 설정하였다.

1) 학습 자료를 통해 학생들이 스스로 학습내용을 재발명할 기회를 제공하도록 한다. 따라서 바빌로니아에서 사용했던 다이아그램을 보완한 모델을 사용하여 학생의 학습의 동기를 북돋는다(참고 그림 2).

2) 교사의 안내 하에 학생이 수학적 내용을 학습할 수 있도록 한다. 교사는 적절한 안내 하에서 수학자들이 수학을 발명했던 방법을 학생들이 되밟아 봄으로써 직관이고 창의적인 방법으로 문제를 해결하는 탐구활동의 기회를 제공하도록 한다.

3) 학생이 자신의 활동을 의식하고 반성하여 전 수준의 활동이 다음 수준으로의 상승을 위한 기반을 제공할 수 있도록 한다.



<그림 2> 수학적 모델

본 연구는 중학교 학생들에게 적절한 수학사를 활용한 수업을 하기 위해 중학교 9단계 이차방정식 단원을 중심으로 학습 자료를 개발하였다. 총 5차시로 구성되어 1~3차시에는 바빌로니아인의 접근법(Radford & Guerette, 2000)을 재구성해 근의 공식을 재창조하도록 하여 학생의 학습과정을 살펴보고자 하였다. 4~5차시에서는 방정식의 역사에 따라 그리스 유클리드 방법과 아라비아 알콰리즈미의 기하학적 방법에 의한 이차방정식의 해법을 소개하고, 그에 따른 탐구문제를 제시하여 학생의 학습과정을 살펴보고자 하였다. 또한 지금까지 보여준 기하학적 해법에 대한 학생의 생각을 듣고 정리하는 과정으로 마무리를 하였다. 이렇게 구성된 지도안은 전문가의 심의를 거쳐 <표 1>와 같이 마련되었다.

<표 1> 학습 자료 구성 내용

차시	단계	내 용	수학화
1	문제제시	바빌로니아 점토판문제 소개 및 이차방정식 실생활 탐구문제 제시	
	1단계	이차방정식의 해를 바빌로니아인의 기하학적 접근법을 재구성 하여 학습, 조작적 방법 사용	수평적 수학화 → 수직적 수학화
2	2단계	수치적인 경험과 기하학적인 경험을 결합시킨 탐구적인 문제 풀이 과정	수평적 수학화 → 수직적 수학화
3	3단계	대수학적 기호를 사용한 근의 공식 재창조	응용적 수학화
4 5	통합	그리스 유클리드와 아라비아 알콰리즈미의 기하학적 방법에 의한 이차방정식 해법 소개 및 현재의 풀이방법(인수분해, 완전제곱근, 근의 공식 등)과 비교하기	피드백

IV. 연구 결과

본 연구는 수학사를 활용한 방정식 수업에 나타난 수학화 과정의 특징을 분석하고, 교수학적 현상학의 특성을 분석하고자 하는 목적으로 중학교 2학년 학생을 대상으로 수업을 실시하여 수업과정에서 나타난 특징을 수평적, 수직적, 응용적 수학화 과정과 교수학적 현상학으로 나누어 분석하였다.

1. 수평적, 수직적, 응용적 수학화

1) 문제제시

우선 바빌로니아 점토판 문제를 제시해 다음의 탐구문제에 대한 학생의 흥미와 동기를 유발하였다.

연구자 : 바빌로니아 점토판 문제를 보고 느낀 점을 말해봅시다. 이 문제에서 구하고자 하는 건 무엇일까요?

지성 : 정사각형은 벽돌을 말하는 것 같고, 건축물을 만드는 건설에 관한 문제에요.

연구자 : 왜 그렇게 생각했죠?

지성 : 바빌로니아인처럼 옛날 사람들은 실제 생활에 사용하려고 발전시켰다고 사회시간에 배웠어요.

연구자 : (탐구문제 제시) 그럼 다음 문제를 살펴보세요.

지성 : 아하! 그럼 아까 그 점토판 문제도 가로, 세로 뭐 그런 거 구하는 문제였겠네요.

연구자 : 맞아요. 우리가 익숙하지 않은 말로 표현되어 그렇지 화단 만드는 문제와 비슷한 상황이에요. 이와 같이 수학은 실생활에서 필요해서 발전되었어요.

지성 : (다시 탐구문제를 보며) 그럼 화단의 가로를 x, 세로를 y로 하면 될 거 같아요. 그런데 표를 그려도 상관없죠?

연구자 : 그럼 머릿속으로 그린 표를 종이에 그려 보세요.

지성 : (한참 망설이다가) 모르겠어요.

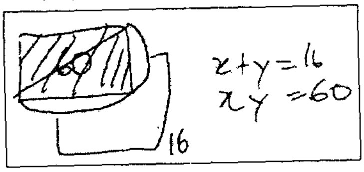
연구자 : 그럼 다음 문제를 보면서 나중에 탐구문제를 다시 한번 생각해 봅시다.

여기서 점토판 문제의 해법을 살펴보면 현재처럼 근의 공식을 이용하거나 정확한 문자의 표현은 없었지만, 현재의 넓이를 이용한 이차방정식의 해법 문제로 1~3단계에서 차례로 다룰 문제의 근원이 된다. 단순한 이차방정식의 해법 문제에만 익숙한 지성은 처음에는 당황하며 생각한 그림조차 표현을 하지 못했지만 1단계에서 3단계로 가면서 차츰 가로와 세로를 문자를 사용해 나타냈으며, 수학화 과정을 통해 기하적인 방법에서 수치적 경험을 결합시킨 대수적 근의 공식을 재창조하게 된다.

2) 1단계 : 기호를 사용하지 않은 순수 기하학의 방법

[문제 1] 둘레의 반이 16cm 이고 면적은 60cm^2인 직사각형의 크기를 구하여라.

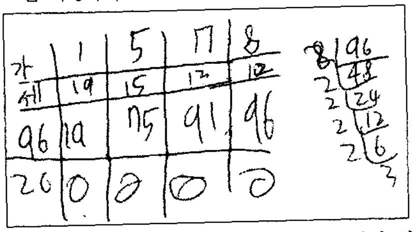
지성 : 그런데 둘레의 반이 무슨 말이에요? 그럼 원둘레… 그럼 원 이라는 말 인가요?
연구자 : 직사각형의 둘레라고 되어 있는걸요.
지성 : 아! 그렇지. 아까처럼 가로를 x, 세로를 y 로 하면 될 거 같아요.
연구자 : 그럼 종이에 한번 나타내 볼까요?
지성 :



연구자 : 구하고자 하는 건 x, y 두개인데, 그럼 지금 세운 두 식으로 구할 수 있을까요?
지성 : (한참 생각하다가) 6,10 이에요.
연구자 : 뭐가 6,10 이라는 걸까요?
지성 : 가로가 10이고 세로가 6이에요.
연구자 : 그 값이 어떻게 나왔는지 설명할 수 있겠어요?
지성 : 그냥 머릿속으로 여러 값을 넣어서 찍은 거에요.
연구자: 그렇구나. 그럼 옛날 바빌로니아인들은 이 문제를 어떻게 해결 했을까?
지성 : 아까 점토판에 썼다고 했잖아요. 그러니깐 거기에다 그림으로 그리지 않았을까요?
연구자 : 자 그럼 고대 사람들은 어떻게 해결했는지 살펴봅시다. (순수 기하학 방법을 보여줌).
지성 : (기하 방법에 관심을 보이며) 아! 그렇구나. 이렇게 풀어도 되네요.
연구자 : 그럼 다음 문제를 한번 생각해 볼까요?

[문제 1-1] 둘레의 반이 20이고 면적은 96인 직사각형의 가로와 세로의 길이를 구해보자

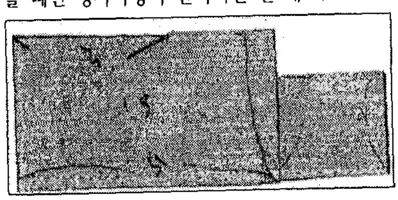
지성 : 그래도 저는 그림 안 그리고 표로 풀래요.
연구자 : 표를 그려서 푸는 게 더 쉬운 방법 같아요?
지성 : (망설이다가) 꼭 그런 건 아닌데 그림 그리는 건 귀찮아서요.



연구자 : 이번에는 표를 작성했네요. 이 표에 대해 설명 해볼까요?
지성 : (잠시 생각하다가) 처음엔 인수분해를 해요.
연구자 : 인수분해를 왜 했을까요?
지성 : 완전제곱이 될까 해서 했는데…안돼요. 그래서 가로 세로를 적어서 표를 그리니깐 답이 나온 거예요.
연구자 : 답이 무엇인지 다시 말해 볼래요?
지성 : 가로가 8이고 세로가 12에요.

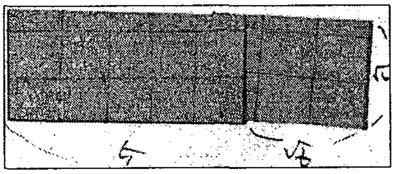
[문제 2] 둘레의 반이 10cm 이고 면적은 19cm^2인 직사각형의 크기를 구하여라.

연구자 : 자 문제 2를 생각해 보세요.
지성 : (한동안 생각하다가) 이건 안 되네요.
연구자 : 뭐가 안 되는 건지 말해 볼까요?
지성 : 소인수 분해도 안 되고…표를 그릴수도 없고… 귀찮지만 선생님이 했던 방법으로 해봐야겠어요. 색도화지 주세요.
지성 : 그런데 아까 방법대로 하면 안 돼요. 2×3 만큼을 빼면 정사각형이 안되니깐 안 돼요.



연구자 : 선생님은 가로 세로 똑같은 크기로 잘라냈었는데 그렇게 할 수 있는 방법은 없을까요?

지성 : 음…아! $\sqrt{6}$을 빼면 되요! 2보다는 크고 3보다는 작으니깐…대충 나타 내면 되죠?



연구자 : 자 그럼 이 문제를 어떻게 풀었는지 선생님한테 설명 좀 해 줄 수 있겠어요?

지성 : 음…직사각형에서 가로랑 세로가 5라면 넓이가 25가 되는데 6만큼을 빼면 19가 되요. 그러니깐 6을 빼려면 가로랑 세로가 $\sqrt{6}$만큼을 빼면 되잖아요. 그래서 도화지를 오려보니깐 딱 맞는 거예요. 그래서 가로에다 $\sqrt{6}$을 더하면 되요.

연구자 : 그래서 가로의 길이와 세로의 길이는 뭐가 되는 거죠?

지성 : 가로는 $5+\sqrt{6}$이구 세로는 $\sqrt{6}$이죠!

연구자 : 잘 했어요.

◇ 조작적 방법에 의한 문제해결에서의 수평적 수학화

바빌로니아의 기록 수단인 점토판 자료 그림을 보여주고, 고대에 수학을 점토판에 계산한 이유 등을 서로 이야기함으로써 지성은 수학이 필요에 의해서 만들어 졌다는 것을 인식하게 되었다. 또한 문제제시에서는 넓이에 관련된 바빌로니아의 문제를 제시하여 넓이를 구하는 탐구문제를 다루기 앞서 근의 공식의 역사적 발전을 따라 문제를 접근하여 지성의 수업 동기를 유발하였다. 다음으로 문제 1을 아무 방법이든 사용해서 지성이 풀도록 하여 문제를 탐구 할 수 있게 하였다. 문제 1에서 기호를 사용한 기하학적인 방법을 선택하였는데 8-가 단계에서 다루었던 일차 연립방정식의 형태를 만들지 못하자 당황스러워했다. 또한 답을 구하긴 했지만 풀이과정을 표현하지 못했다. 또한 찍어서 답을 구했다는 말을 자주 사용하였다. 이 단계에서 결국 지성은 여러 가지 접근으로 시행착오를 거쳐 문제를 해결하게 된다.

다음으로 교사가 기호를 사용하지 않은 역사적 순수 기하학적 접근법을 소개 할 때, 지성은 기하학적인 방법에 관심을 나타내었다. 하지만 방정식의 기계적 풀이방법만을 이미 습득한 탓인지 관심을 가지긴 했지만 문제 1-1에서 표를 사용하여 문제를 해결하였다. 문제1에서 풀이과정을 표현하지 못했는데 문제1-1에서는 표를 그림으로써 풀이과정을 나타내었다. 즉, 지성은 이미 가지고 있는 선 개념의 공식과 지금의 현상을 연결짓지 못하였다. 이 때 수학적 모델의 표의 역할은 매우 중요하다.

기하적 방법과 수치간의 선호도는 특정 학생들 고유의 이성적 판단능력에 의해서 좌우 될 수 있다. 하지만 문제 2에서 지성은 시행착오를 거치면서 교사의 안내에 의한 기하학적 방법의 편리함을 알게 되고 가위와 색지를 이용해 그림을 나타냈다. 또한 직사각형의 변의 길이는 꼭 정수로 나타내야 한다는 생각을 넘어 선 개념인 무리수개념을 이용해 변의 길이를 무리수로 나타내었다. 문제2에서 지성은 대수적인 언어를 사용하지는 않았지만 자신의 생각을 표현하려고 노력하였다.

이 과정에서 지성은 현실세계 문맥을 직관적으로 탐구하고 조작적인 방법을 사용하여 현실상황으로부터 수학적 개념을 추출해 내려고 하는 수평적 수학화가 이루어졌음을 알 수 있다.

3) 2단계 : 새로운 기하학 방법

[문제 3] 직사각형의 가로는 $4cm$ 이다. 그 직사각형의 세로는 모른다. 다음 그림에 나타난 것처럼 직사각형의 한 변 옆에 한 사각형을 붙인다. 두 직사각형의 넓이를 합 하면 $60cm^2$의 면적을 가진다. 이 때 직사각형의 세로는 얼마인가?

연구자 : 지난 시간에 배운 방법으로 문제3을 생각해 봅시다.

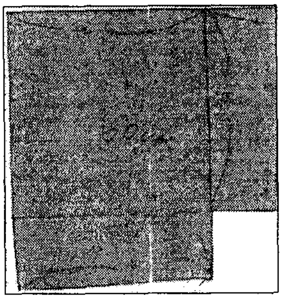
지성 : 이건 다른 문제인데요?

연구자 : 지난번에 정사각형을 잘라 냈었는데 이번엔 어떻게 생각하면 될까요?

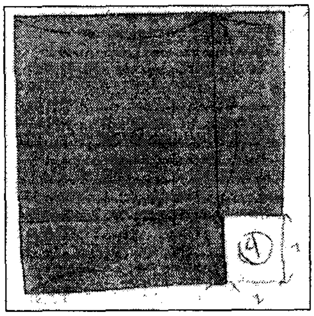
지성 : 음…아! 직사각형을 반으로 잘라서 아래다 붙이면 되요. 그런데 모서리가 없으니깐 안 되겠네요.

연구자 : 그럼 우선 반으로 잘라서 아래다 붙여 보는게 어떨까요?

지성 : 그럼 이렇게 되요. 모서리만 있으면 딱 인데...



연구자 : (모서리 부분을 그려주며) 그림 있다고 생각하면 어떨까요?



지성 : 아! 나중에 빼면 되겠네요! 선생님 그럼 다 구했어요. 6이에요.

연구자 : 어떻게 6이 나왔는지 설명해 볼래요?

지성 : 우선 정사각형을 만들어야 해요. 그러면 쉬워져요. 그래서 처음에 있던 직사각형을 반으로 잘라서 밑변에 붙였어요. 그런데 4만큼이 모자라니깐 우선은 있는 걸로 생각하고요… 60+4=64이니깐 한 변이 8인 정사각형이에요. 그래서 $x+2=8$이니깐 $x=6$이에요.

◈ 수치적인 경험과 기하학적인 경험을 결합시킨 문제해결에서의 수평적 수학화

1단계에서 풀이과정이 직접적으로는 2단계의 문제 3에 적용되지 않는다는 것을 지성은 금방 알게 되었다. 교사는 정사각형의 완성을 통한 완전제곱의 개념을 안내하고 있으며, 지성은 1단계에 경험한 기하학 방법에 의해 문제 3에서도 기하학적 방법으로 문제를 해결하였다. 문제 3에서 지성은 가로의 길이를 x라고 표현하며, 기하학적인 방법에서 대수적 표현으로 가기위한 중간 단계를 거치게 되면서 수평적 수학화가 이루어졌다.

◈ 1단계-> 2단계 : 수직적 수학화

1단계의 단순 기하학방법으로 문제를 해결하는 과정에서 2단계로 가면서 지성은 문자의 사용과 기하적 경험을 결합시켜 문제를 해결하게 된다. 1단계에서는 문제를 풀기는 하였지만 찍어서 답을 구했다는 말을 자주 하며 자신의 생각을 정확히 말로 표현하지 못했지만 2단계로 오면서 수치적 표현법을 사용하면서 풀이과정을 말로 표현하였다.

또한 1단계에서는 기하학 방법을 보여주었지만 귀찮다는 표현을 하며 지성 스스로 만들어 가지 못했는데 2단계에서는 기하학적 방법과 수치적 경험을 결합시켜 문제를 해결해 나가면서 수직적 수학화가 이루어 졌다.

◈ 2단계-> 3단계 : 수직적 수학화

3단계에서 학생은 문제 3에 대한 풀이과정을 2단계에서 정사각형의 완성을 통해 알게 된 완전제곱을 이용하여 대수적으로 표현하였다.

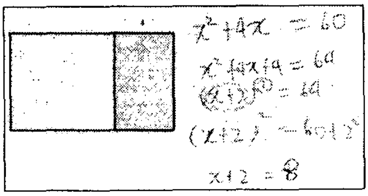
또한 교사의 안내에 의해 지성은 대수기호들을 사용한 근의 공식을 재창조하게 된다. 지성은 그림을 이용하여 공식을 만들어 가는 과정이 흥미로웠고 더 이해가 잘 가긴 하지만, 더 이상 그림을 그려 문제를 해결하는 것이 귀찮다고 말하였다. 지성은 3단계에서 재발명한 근의 공식에 의한 문제풀이의 편리함을 알게 된다.

지성은 수학적 개념에 대한 기술과 좀 더 대수적 기호를 사용한 추상적인 수학의 세계로 나아가는 수직적 수학화가 이루어졌다.

4) 3단계 : 대수 기호를 사용한 공식 만들기

연구자 : 지난 시간에 배운 문제3에 대해 풀이 과정을 말로 설명했는데 이번엔 식으로 표현 할 수 있을까요?

지성:

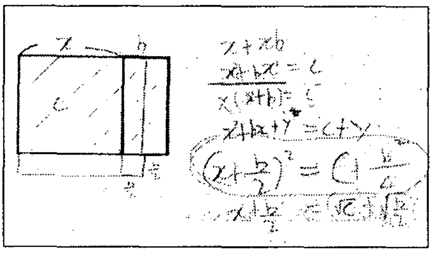


연구자 : 문제 3의 식에서 찾을 수 있는 공식이 있을까요?

지성 : 음…완전제곱 아니면 인수분해 ?

연구자 : 그럼 직사각형의 길이를 그림처럼 b라고 하고 면적을 c라고 해서 문제3처럼 식을 세워볼까요?

지성 :



연구자 : 좌변에서는 $\sqrt{(x+\frac{b}{2})^2}=x+\frac{b}{2}$ 전체에 대한 제곱근인데 왜 우변은 각각 했어요?

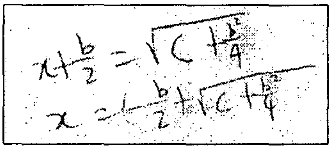
지성 : 아닌데… 아 틀렸네요. $x+\frac{b}{2}=\sqrt{c+\frac{b^2}{4}}$ 이에요. [제곱근 처리를 수정한다.]

연구자 : 그럼 우리가 지금 구하고 싶은 게 무엇일까요?

지성 : 음… x 요.

연구자 : 그럼 x의 값을 한번 구해볼까요?

지성 :



연구자 : 직사각형의 한 변을 x 라고 하면, 정사각형의 면적은 'x^2'이고 직사각형의 면적은 'bx'가 되요. 따라서 두 면적의 합은 c와 같아요. 즉, 아까 세운 식 $x^2+bx=c$가 되는 거에요.

연구자 : 이번에는 $ax^2+bx=c$풀기위한 공식을 찾아봅시다. 여기서 a는 0이 아니에요.

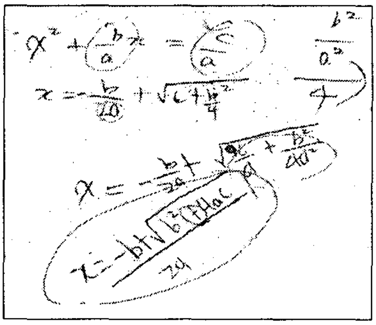
지성 : 그럼 x^2 앞에 a를 놓은 거에요?

연구자 : 그렇죠. 이번엔 x^2의 계수가 1이 아니라 a라는 거에요. $x^2+bx=c$ 에서 생각해보면 어떨까요?

지성 : 그럼 좌변과 우변을 다 a로 나누면 되죠?

연구자 : 나누면 어떻게 될까요?

지성 : $x^2+\frac{b}{a}x=\frac{c}{a}$가 되요



지성 : 어! 학원에서 외우라고 했던 거 같은데… 이게 근의 공식인가 그거죠? 신기하다.

연구자 : 맞아요. 우리가 말하는 근의 공식이에요. 여기서 $ax^2+bx=c$와 $ax^2+bx+c=0$와 비교하면 무엇이 다를까요?

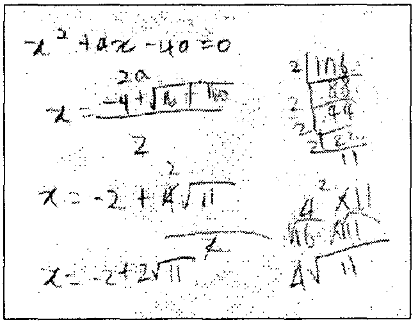
지성 : c의 위치가 달라요. 음……c를 이항하면 되요. c를 $-c$로 바꾸면 될 것 같아요.

연구자 : 그럼 아까 구한 공식처럼 $ax^2+bx+c=0$의 공식을 구하면 어떻게 될까요?

지성: 그럼 $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 에요.

연구자 : 이제 처음 시간에 해결하지 못했던 탐구 문제를 다시 생각해 보세요.

지성: 이게 정답인가요? 근 호안에 있는 수가 너무 커서 좀 복잡하긴 했지만 공식에 넣어 푸니깐 훨씬 쉬워요.



지성: 음…그런데 이렇게 풀어도 답이 같아요.

$$x \times (x+4) = 40$$
$$x^2 + 4x = 40$$
$$x^2 + 4x - 40 = 0$$
$$x^2 + 4x + 4 = 44$$
$$(x+2)^2 = 44$$
$$x+2 = \pm\sqrt{44}$$
$$x = -2 + \sqrt{44}$$

연구자 : 그래요. 이 방법도 근의 공식을 만드는 과정에서 찾아낸 풀이 과정이예요. 근의 공식을 그림을 그려가면서 직접 만들어 보니깐 어때요?

지성 : 공식을 외우지는 못하겠는데 이해가 잘 되요. 그리고 그림으로 푸는 것보다 공식에 넣어서 푸니깐 훨씬 간편해요.

◇ 대수적 기호를 사용한 근의 공식 재창조에 의한 현실문제에의 적용에 의한 응용적 수학화

지성은 문제 3에 대한 풀이과정을 2단계에서 정사각형의 완성을 통해 알게 된 방법에 의해 대수적으로 표현하였다. 또한 이 방법이 완전제곱에 의한 방정식의 해법이라는 것을 알게 되었다.

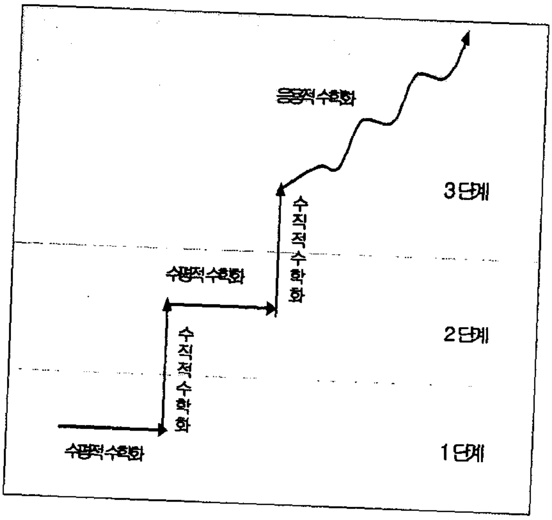
다음으로 교사는 수치들을 상징적인 기호로 대체하도록 안내하였다. 지성은 공식을 만들어 가는 과정에서 수치가 문자 즉 기호로 이행되는데 많은 시행착오를 겪게 된다. 하지만 그동안 습득한 기하학적 방법을 사용해 공식을 재창조하게 되고, 그 공식이 문제를 푸는데 훨씬 수월해 진다는 것을 알게 되었으며, 공식의 의미를 깨닫게 되었다.

수학적 결과 즉 공식 다시 실생활 문제에 해석, 응용하여 지성은 근의 공식에 의한 풀이 방법뿐만 아니라, 완전제곱에 의한 풀이로 문제를 해결하며 더 쉬운 방법을 찾아내었다.

이 과정에서 수평적, 수직적 수학화 과정을 바탕으로 실생활 문장제 문제를 해결하는 응용적 수학화가 이루어졌다.

2. 방정식 영역에서 교수학적 현상학의 특성

본 연구의 수업과정에서는 조직될 필요가 있는 현상으로부터 시작하여, 학습자로 하여금 조직의 수단에 숙달하도록 해 주어야 한다는 관점에서 교수학적 현상학을 도입하였다. 교수학적 현상학의 핵심적인 생각은 상대적 관계에 있는 본질과 현상이다. 본질은 현실 세계의 현상을 조직하는 수단이라고 할 수 있다.



<그림 2> 지성의 수학화

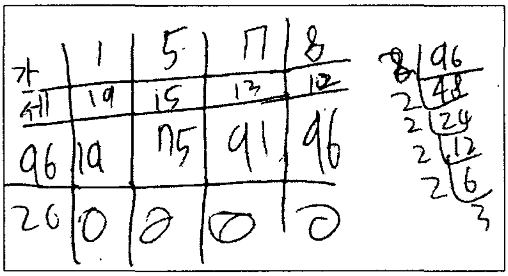
따라서 이차방정식 단원에서 수학화될 수 있는 학습자 주변의 현상을 화단을 만드는 문제를 통해 살펴보고, 바빌로니아인의 기하학적 접근법을 현 지성의 입장에서 재구성해 수학화 과정을 분석함으로써 어떻게 그 현상을 조직하고 기술하고 분석하는지를 제시하였다. 또한 지성이 어떻게 그것을 생각해 낼 수 있는지, 더 잘 이해할 수 있도록 도와주며 그것을 예상할 수 있도록 이끌어 주었다.

문제제시 단계에서 교사는 지성에게 실생활 탐구문제를 아무 방법이든 사용해서 지성이 풀도록 하여 문제를 탐구 할 수 있게 하였다.

식목일 날 아빠와 나무를 심고 화단을 꾸미는 것은 일상생활에서 매우 흔한 일로써 아무 부담 없이 받아들였다. 여기서 넓이 $40m^2$ 의 개념은 본 문제의 선개념으

로써 사용된다. 현상에 들어있는 조건으로는 넓이 $40m^2$의 직사각형은 가로의 길이가 세로의 길이보다 4m 더 길다는 조건을 만족해야 하는 것으로 출발하게 된다.

문제 1에서 화단 즉 직사각형이 주어졌을 때 지성은 가로와 세로의 길이를 문자를 사용해 각각 독립된 변수인 x, y로 놓게 된다. 여기서 선 개념으로써 화단의 넓이는 가로와 세로의 곱, 즉 $x \times y$ 라고 말할 수 있는 준비가 되어 있다는 것이다. 하지만 지성은 말하지 못하였다. 이 수평적 수학화 과정에서 x , y를 찾을 수 없자 문제 1-1에서는 다음과 같이 표를 사용하게 된다.



문제 1과 1-1 를 통한 시행착오를 거쳐 결국엔 문자의 사용이 아닌 계산 반복을 통해 직사각형 모델을 조작하게 되고, 이 모델로부터 가로 세로 길이의 의미를 알게 된다. 여기서 획득된 가로와 세로의 개념이 본질이 되는 것이다. 즉, 지성은 이미 가지고 있는 선 개념의 공식과 지금의 현상을 연결짓지 못하였지만. 이때 수학적 모델의 표의 역할은 본질로의 교량역할을 하게된다.

1단계에서 가로와 세로를 구하기 위한 직사각형의 기하학적 모델이 2단계에서는 정사각형을 완성하기위한 연구 대상 즉 현상이 된다. 직사각형을 정사각형으로 만들어 가는 과정에서 지성은 구하고자 하는 게 x 라는 것을 인지하게 된다.

또한 넓이가 완전제곱수가 될 때 정사각형이 만들어지는 것을 찾아낼 수 있었다. 2단계에서 지성은 1단계의 기하학적 모델에, 선개념인 수치적 경험을 결합시키게 되고 직사각형의 넓이와 x의 관계를 찾아내게 된다. 또한 지성은 수학적 개념에 대한 기술과 좀 더 대수적 기호를 사용한 추상적인 수학의 세계로 나아가는 수직적 수학화가 이루어진다. 또한 이 과정에서 획득된 개념인 넓이와 x의 관계로부터 3단계에서는 관계식을 만들 수 있게 된다. 정사각형을 만들었을 때 완전제곱식을 완성해 넓이를 구할 수 있다는 개념을 형성하게 된다.

지성은 화단의 넓이는 가로와 세로의 곱에 의해 관계식이 형성되는데 여기서 정사각형의 완성 즉 완전 제곱식을 완성하게 된다. 이 완전제곱식에서 교사는 정확한 수치대신 기호로의 이행을 안내한다.

위의 식을 일반화 하여 지성은 근의 공식을 재발명하게 된다. 지성은 수평적, 수직적 수학화 과정을 바탕으로 실생활 문제를 해결하는 응용적 수학화가 이루어진다.

현상과 본질은 절대적인 것이 아닌 상대적인 것이며, 현상이 본질로 조직되고 나면 다시 그 본질이 현상이 되어, 새로운 본질로 조직되게 된다. 이와 같이 방정식에서 근의 공식을 재발명하기까지 추상화가 거듭되면서 수학적인 현상이 새로운 수학적 개념으로 조직되어 나아갔다. 여기에서 주목할 것은 학생은 근의 공식에 대한 선행지식을 가지고 있었지만 그것이 방정식의 풀이에서 어떤 의미를 지니는지 깨닫지 못한 단순한 암기에 불과하였고 본 연구를 통한 수학화 과정에서 그것은 지식으로서 추상화의 내면화를 이루어갔음을 알 수 있다.

V. 결 론

본 연구는 현행 9단계 이차방정식 단원에서 기계적인 계산이 아닌 방정식의 역사적 재발명 원리에 의해 충분한 이해와 그것을 전제로 한 문제해결에서의 적용능력을 개발시키기 위한 교수 학습 자료를 개발하고 적용하여, 수업과정에서 나타나는 수학화 과정의 수평적 수학화, 수직적 수학화, 응용적 수학화의 특징과 교수학적 현상학을 파악하는데 목적이 있다.

이 목적을 위해 이차방정식 단원에서 수학사를 활용한 바빌로니아의 시각적인 기하학적 접근 방법을 통한 교수 학습 자료를 활용한 수업에서 나타나는 학생의 수학화 과정과 교수학적 현상학의 특징을 관찰하였다. 그 결과 학생은 첫째, 현실세계로부터 수학적 개념을 발견하고 개념을 추출하였고, 실생활과도 관련이 깊다는 것을 알게 되었다. 문제제시 단계에서 역사적 바빌로니아

의 넓이에 대한 점토판 문제를 제시하여 흥미와 동기를 유발하였으며, 현실적으로 느끼는 일상적인 경험을 소재로 한 탐구문제의 수학적 모델을 통해 실생활의 현상과 수학 공식간의 분리를 좁혀나갔다.

둘째, 예상되고 결과적으로 발생되는 수학적 개념에 대한 기술이 가능하였고 엄격하고 형식적인 정의가 뒤따르는 형식화와 추상화가 이루어졌다. 1단계 현실 상황으로부터 수학적 개념을 추출하는 수평적 수학화를 통해 학습된 수학을 수직적 수학화를 거치고 다시 2단계로 가면서 수학적으로 다듬은 과정이 뒤따라 높은 수준의 즉 추상적인 수학의 세계로 나아가는 수직적 수학화가 이루어졌다.

셋째, 창조된 개념을 문제에 적용함으로써 개념을 강조하고 일반화가 이루어졌다. 3단계에서 학생은 대수적 기호를 사용한 근의 공식을 재창조하게 되고 공식의 진정한 의미를 깨닫게 되며, 수학적 결과 즉 공식을 다시 실생활 문제에 해석 응용하여 문제를 해결하게 된다. 이 과정에서 1과 2단계에서 경험을 바탕으로 응용적 수학화가 이루어 졌다.

넷째, 역사적 재발명 원리에 따라 교사의 적절한 안내를 통하여 학생의 활발한 탐구활동이 이루어 졌다. 3단계에서 지성이 이차방정식의 근의 공식을 재창조하는 과정에서 현실에 부합된 현상을 주고 학생 스스로 역사적 바빌로니아인의 해법을 밟아 나가길 제시하여 재발명해 나가도록 하였다. 여기서 교사는 학생이 수학적 관계식을 찾아내도록 하는데 적절한 질문을 제공하여 지성의 학습을 도왔다. 근의 공식에 대한 학생의 선행지식은 단순한 암기에 지나지 않았지만 본 연구를 통해 지식으로서 의미있는 수학화를 이루어갔다.

결론적으로 본 연구를 통해 더욱 강조하고자하는 것은 교사의 적절한 안내를 통하여 수학자들이 수학을 발명했던 방법을 학생들이 되밟아 봄으로써 직관적이고 창의적인 방법으로 문제를 해결하는 탐구활동의 기회를 충분히 제공하며 이는 학생들 주변의 실생활과 관련된 다양한 문제 상황과 다양한 활동을 통해 습득되어야함을 제시하였다. 이와 같이 함으로써 수학이 다른 과목 또는 실생활과 밀접한 관계가 있다는 것을 인식하여 수학의 유용성과 수학에 흥미를 자연스럽게 터득할 수 있게 될 것이다. 수학의 여러 영역에서 더욱 다양한 사례연구를 통해 학생의 수학화과정을 심층적으로 분석하고 구체적으로 이해할 수 있는 연구가 앞으로 많이 이루어지길 기대한다.

참 고 문 헌

고상숙 · 고호경 (2006). 청소년을 위한 서양 수학사, 두리미디어.

고재필 (2004). Freudenthal의 수학화 활동을 위한 중학교 대수영역의 학습 자료개발, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

김용운·김용국 (1986), 수학대전, 우성문화사,

박세희 (1985). 수학의 세계, 서울대학교 출판부.

박정혜 (2005). Freudenthal의 수학화 학습 이론에 근거한 기하단원의 학습 자료 개발 및 적용에 관한 사례연구, 한국교원대학교 대학원 석사 학위논문.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부.

이은정 (2005). Freudenthal의 수학화 활동을 위한 방정식 · 부등식 영역의 학습 자료 개발, 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

이충호 (2001). 현실주의 수학교육에 관한 고찰, 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도 연구, 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lakatos, I. (1978). The Logic of Mathematical Discovery, 수학적 발견의 논리 (우정호역, 1991), 민음사.

Radford, L. & Guerette, G. (2000) Second Degree Equations in the Classroom : A Babylonian Approach. In Victor J. Katz(Ed.), Using History to Teach Mathematics(pp. 69-76). Washington, DC: Mathemaical Association of America,

Student's Mathematization of Equations in the Middle School Using the History of Mathematics

Choi-Koh, Sangsook
Department of Mathematics Education, College of Education,
Dankook University, Seoul, Korea
sangch@dankook.ac.kr

Choi, Kyunghwa
The Graduate School of College of Education
Dankook University Seoul, Korea
qonge@dankook.ac.kr

This research was to understand the features of mathematization and didactical phenomenology, in a way that was not a routine calculation of equation, rather a complete comprehension by the reinventing historical principles of the equation. To achieve the purpose of this study, one-male middle school student participated in the study. Interview and observation were used for collecting data during the student's performance. The results of research were: First, the student understood the mathematical concepts from a real life and developed the abstract concepts from it, which were very intimately related with his life. Second, the skill and formula definition were accomplished with the accompanying predicted and consequently derived mathematical concepts. Third, through the approach of using the history of mathematics, he became more interested in what he was doing and took lessons with confidence. Forth, the student performed his learning based on the historical reinventing principle under the proper guidance of a teacher.

* ZDM Classification : D43
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : Mathematization, Equation, Mathematics History, Didactical Phenomenology

<부 록>

활용단원	이차방정식	차시	1~3/5
목적 및 수업과정	학생이 이차방정식을 푸는 공식을 재창조하도록 하는데 목적이 있으며, 수업과정은 바빌로니아의 시각적인 기하학적 접근 방법을 통한 문제 풀이에 중점을 두어 점진적 과정을 거쳐 달성된다.		

(1) 문제제시

① 바빌로니아의 기하학적 접근 방법 소개

대영박물관에 보존되어 있는 한 점토판에 있는 "문제 1"로서 BM13901로 알려져 있는 문제이다.

넓이와 정사각형의 선을 합한 것이 3/4이다.

여기서 한 정사각형의 면적을 언급하고 있는 데, 그 정사각형의 선은 정사각형의 변을 의미한다. 따라서, 이것은 정사각형의 면적과 변의 합이 3/4일 때, 그 정사각형의 변을 구하는 문제인 것이다. 원문에는 단지 답을 얻기 위한 일련의 계산들에 대한 설명만이 보인다. 서판에 적힌 설명은 다음과 같다.

아래로 1을 투영해라. 1을 반으로 나누어, 1/2과 1/2로 정사각형을 만들어라. 3/4에 1/4을 더하면 1이다. 변이 1인 정사각형을 만들라. 정사각형 안에 있는 한 변이 1/2인 정사각형을 잘라내라. (HØyrup, 1986, p.450.)

② 탐구문제

다음 문제를 생각해 보자

재호는 식목일 날 아빠와 집 앞마당에 화단을 만들었다. 다 만들고 보니 화단의 가로의 길이가 세로의 길이보다 $4m$ 더 길고, 넓이가 $40m^2$인 직사각형 모양의 화단이 되었다.

[문제] 그럼 이 화단의 세로의 길이는 얼마일까?

이 문제에 대한 바빌로니아인의 생각을 재구성하여 살펴보기로 하자.

(2) 1단계

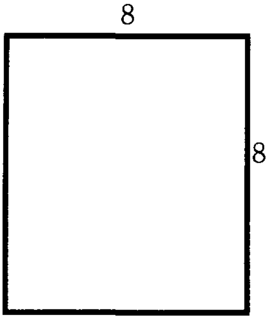
① 기호를 사용하지 않은 순수 기하학의 방법 보여주기

[문제 1] 둘레의 반이 $16cm$이고 면적은 $60cm^2$인 직사각형의 크기를 구하여라.

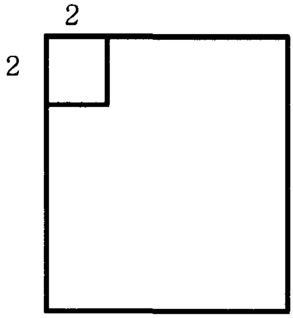
a. 교사는 학생이 문제를 탐구할 수 있게 아무 방법이나 사용해서 문제를 해결할 수 있도록 시간을 주고, 학생이 기하학적 방법으로 문제를 해결할 때 까지 문제해결 과정을 살펴본다.

b. 그 다음으로 교사는 도형을 사용해서, 다음과 같이 순수기하학의 기법을 보여준다.

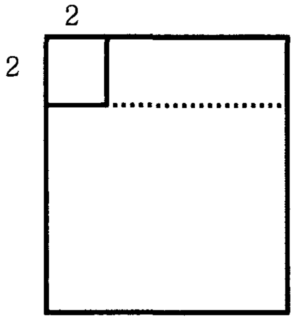
만약 한 변이 $8cm$인 한 정사각형이 있다면, 그 면적은 $64cm^2$이다 <그림 1>. 면적이 $60cm^2$인 한 사각형을 얻기 위해서 각 변이 $8cm$ <그림 1>인 정사각형에서 $4cm^2$인 정사각형을 잘라야만 한다.
이것은 변이 $2cm$인 작은 정사각형을 큰 정사각형에서 잘라냄으로써 만들어질 수 있다<그림 2>. 원하는 직사각형을 얻기 위해서 <그림 3>에서 점선으로 나타난 직사각형을 자르고 그 자른 직사각형을 오른쪽 옆에 수직으로 붙인다 <그림 4>. 그러면 구하고자 하는 변의 길이는 각각 $10cm$와 $6cm$가 된다.



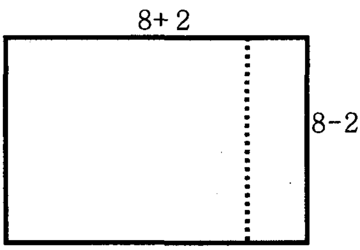
<그림 1>



<그림 2>



<그림 3>



<그림 4>

c. 풀이 방법을 한 번 보여주고 나서 학생에게 유사한 문제1-1을 생각해 보게 한다.

[문제 1-1] 둘레의 반이 $20cm$이고 면적은 $96cm^2$인 직사각형의 크기를 구하여라.

[문제 2] 둘레의 반이 $10cm$ 이고 면적은 $19cm^2$인 직사각형의 크기를 구하여라.

문제 2는 <그림 2>에서 처럼 잘라낸 작은 정사각형의 면적이 완전 제곱수가 안 된다. 이 문제는 순수기하학의 방법에 대하여 깊은 수준까지 학생을 생각하도록 유도한다.

② 주어진 과제에 대한 문제 해결과정 토론하기

a. 교사는 [문제 2]에 대한 풀이 방법을 글로 쓰게 하고 발표하게 함으로써, 학생의 문제 이해를 돕게 될 것이다.

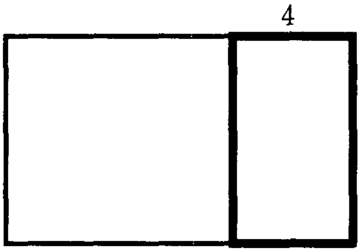
b. 발표가 끝나면 해결방법에서 나타나는 오류를 학생스스로 틀렸다는 사실을 알아 갈 수 있도록 지도한다.

c. [문제 2] 에서는 문제 1에서처럼 요구하는 직사각형을 얻는 것이 불가능하다는 것을 알게 된다.

(3) 2단계

① 1단계에서 다룬 방식과 다른 새로운 기하학 방법 제시

[문제 3] 직사각형의 길이는 $4cm$ 이다. 그 직사각형의 세로는 모른다. 다음 그림에 나타난 것처럼 직사각형의 한 변 옆에 한 정사각형을 붙인다. 두 직사각형의 넓이를 합 하면 $60cm^2$의 면적을 가진다. 이 때 직사각형의 세로는 얼마인가?



<그림 5>

a. 교사는 문제 1을 풀 때 사용했던 것과 비슷한 방식으로 이 문제를 풀도록 말한다.

b. 학생이 주어진 문제를 [문제 1]에서 사용했던 순수기하학 방법으로 풀지 못한다면 교사는 새로운 문제 풀이 방법을 보여준다.

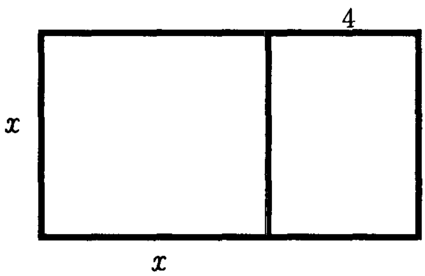
- 처음 직사각형을 수직으로 잘라서 둘로 만든다<그림 7>.
- 잘린 직사각형의 부분 중 하나를 가져다가 정사각형의 밑변에 붙인다<그림 8>.

이때 학생들은 새로운 형태가 거의 정사각형에 가깝다는 것을 깨닫게 된다.

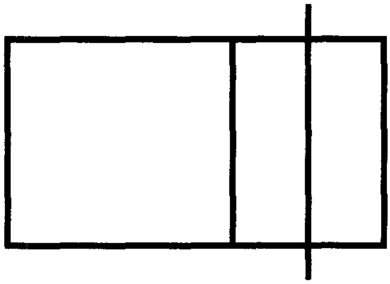
- 정사각형을 만들기 위해, 한 변이 2인 정사각형을 붙인다<그림 9>.

그 정사각형의 면적은 4이며, 따라서 새로운 정사각형의 면적은 60+4=64 가 된다<그림 9>.

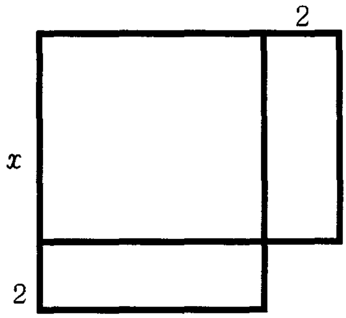
- 그 정사각형의 변은 8이며, <그림 8> 로부터 $x+2=8$ $x=6$이며 이라는 것을 알게 된다.



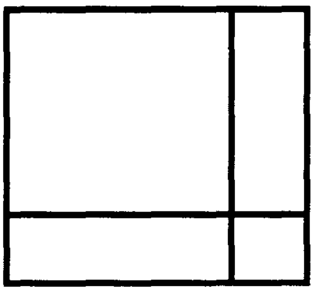
<그림 6>



<그림 7>



<그림 8>



<그림 9>

c. 교사는 풀이 방법을 보여주고 그 와 유사한 문제를 풀도록 제시하고 문제 풀이 방법을 글로 써보라고 한다.

d. 학생들은 문제 1에서 사용된 문제 풀이 과정이 직접적으로 문제3에 적용되지 않는 다는 것을 알게 될 것

이다. 이 문제에서 중요한건 정사각형의 완성이며, 나중에 대수 기호들을 사용하여 공부할 때 매우 중요하다.

② [문제3]에 대한 문제 해결 과정 토론하기

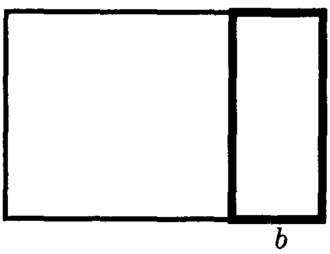
1단계에서처럼, 학생들이 문제풀이 과정을 글로 기술한 내용에 대해 논의 한다.

(4) 3단계

① 대수 기호를 사용한 공식 만들기

이 단계에서는 1, 2 단계와 달리 직사각형의 밑변의 길이나 넓이에 대한 구체적인 숫자들을 주지 않는다. 마지막 3단계에서는 학생이 2차방정식 풀이 공식을 다시 만들 수 있도록 돕는 것이다.

a. 교사는 먼저 학생에게 [문제 3]의 답을 구할 수 있는 공식을 찾아보라고 말한다. 다음으로 4단계에서 학생이 기술했던 내용에서 문장대신 기호를 사용하여 공식을 표현하라고 한다. 또 <그림 10>처럼 직사각형의 밑변을 문자 'b' 로, 두 도형의 면적을 'c' 로 사용하도록 제안한다.



<그림 10>

b. 학생이 마지막으로 얻게 되는 방정식은 다음과 같을 것이다.

$$x=\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}$$

c. 교사는 기하학적 문제를 대수 기호로 바꿔 설명하는 단계로 나아간다. 직사각형의 미지의 한 변을 x 라고 하면, 정사각형의 면적은 'x^2'이고 직사각형의 면적은 'bx'이다. 따라서 두 면적의 합은 c 와 같다. 즉, $x^2+bx=c$ 이다. 그리고 방정식을 공식에 연결시키기 위해서, 교사는 $x^2+2x=8$, $x^2+13x=32$같은 몇 개의 구체적인 방정식을 주고, 학생들에게 공식을 사용하여 풀도록 한다.

d. 학생에게 방정식 $ax^2+bx=c$를 주고 이 방정식을 풀기위한 공식을 찾도록 하게한다. a가 0이 아니라고 가정하고, 이 방정식이 a로 나누어지면, 학생들은 이전의 것과 같은 종류의 방정식을 만들 수 있다는 것을 깨닫게 될 것 이다. 이전의 공식에서 b는 $\frac{b}{a}$로 c는 $\frac{c}{a}$로 바꾸기만 하면 새로운 공식

$$x=\sqrt{\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}-\frac{b}{2a}$$

을 얻을 수 있다.

e. 마지막 과정은 방정식의 일반형인 $ax^2+bx+c=0$을 살펴보고, 그것을 푸는 공식을 찾는 것이다. 앞에서 언급되었던 방정식 $ax^2+bx=c$와 구체적인 연관성을 보인다. 즉, 이 방정식은 $ax^2+bx-c=0$로 다시 쓸 수 있다. 이제 방정식 $ax^2+bx+c=0$을 얻기 위하여 c를 $-c$로 바꾸어서 일반형 공식과 똑같은 형태로 만들어야 한다.

공식에서 'c'를 '$-c$'로 바꾸었을 때, 우리는 일반적인 공식인

$$x=\sqrt{-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}-\frac{b}{2a}$$

를 얻는다. 물론 이 공식은 잘 알려진 근의 공식인

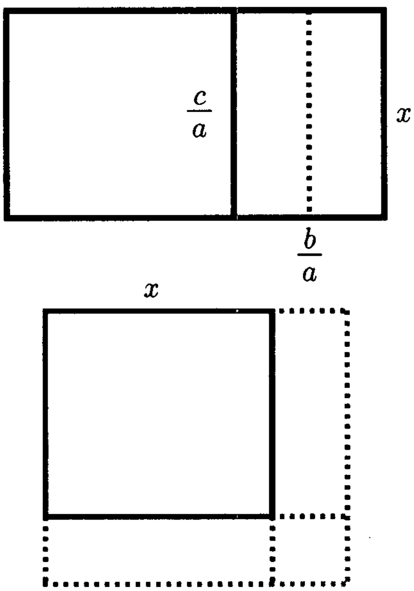
$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

과 동등하다. 모든 수치적인 해들을 얻기 위해서 b^2-4ac의 음의 제곱근에 대해서도 고려하면

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

을 얻게 된다.

f. 학생에게 다음 <그림 11>을 주고 공식을 유도하라고 한다. 학생은 스스로 공식을 만들 수 있고 공식이 문제를 푸는 수고를 많이 덜어 준다는 사실을 이해하게 된다. 또한 이 과정을 통해 공식의 의미를 깨닫게 된다.



<그림 11>

② 탐구문제 분석 및 공식 적용

문제제시 단계에서의 탐구 문제를 풀어보도록 지도한다.

재호는 식목일 날 아빠와 집 앞마당에 화단을 만들었다. 다 만들고 보니 화단의 가로의 길이가 세로의 길이보다 $4m$ 더 길고, 넓이가 $40m^2$인 직사각형 모양이 화단이 되었다.

[문제] 그럼 이 화단의 세로의 길이는 얼마일까?

기하학적 방법을 지도하기 전과 후의 학생의 문제풀이 과정의 변화를 살펴본다.

③ 반성

기하학과 수치간의 선호도는 특정 학생들 고유의 이성적 판단능력에 의해서 좌우 될 수 있다.