한국수학사학회지 제19권 제4호(2006년 11월), 97-106

On Atomic Lattices

충북대학교 수학과 이승온
solee@chungbuk.ac.kr
충북대학교 수학과 연용호
yhyonkr@gmail.com
충북대학교 컴퓨터교육과 황인재
ihwang@chungbuk.ac.kr

격자의 기원은 수학에서 비롯된 것이 아니고 논리학에서 시작되었다([22]). 1880년경 Peirce는 모든 격자는 분배 격자라고 생각하였으나 1890년경 Schröder가 그 오류를 수정하였고, 1933년 Birkhoff가 lattice라는 단어를 처음 사용하였으나 이는 오늘의 격자와는 그 정의가 다르다. 이 논문에서는 Peirce를 소개하고 atomic 격자, atomistic 격자, J-격자, strong 격자 그리고 분배 격자의 상관관계를 연구한다.

주제어 : Peirce, 분배 격자, atomic 격자, atomistic 격자, J-격자, strong 격자.

0. 서론

격자론은 집합과 명제들의 이론에서 시작되었다([21]).

Leibniz(1646-1716)가 처음 두 명제의 conjunction을 연구하였으나 disjunction과의 관계를 밝히지는 못하였고 Boole(1815-1864)이 명제 계산의 수학화와 더불어 Boolean Logic과 Boolean algebra의 관계를 설정하였으나 disjoint union만을 정의하였고([7, 8]), Jevons(1835-1882)가 1864년 disjoint가 아닌 경우의 합집합을 정의하였다([15]). De Morgan(1806-1871)은 1858년, Peirce(1839-1914)는 1867년에 독립적으로 오늘날 잘 알려진 De Morgan 법칙을 증명하였고, 1880년 Peirce([16])는 격자의 분배성이 중요하다는 사실을 처음으로 인지하였으나 '모든 격자는 분배 격자(Every lattice is distributive)'라는 오류를 범하였다. 1890년 Schröder(1841-1902)는 분배 격자의 dual도 분배 격자임을 처음으로 증명하였고 Peirce의 오류를 수정하였다([18]).

1904년 Boolean algebra에 대한 연구가 진행되는 동안 Huntington(1874-1952)은 Boolean algebra는 임의의 원소가 오직 한 개의 complement를 갖는 lattice로 정의될 수 있음을 발견하였다. 곧 이어 독일의 수학자들 Schröder, Vogt, Lüroth(1844-1910), Korselt, Dedekind(1831-1916)는 많은 반례들을 발견함으로써 모든 격자는 분배격자라

고 여겼던 Peirce의 이론을 수정하고 Boolean 격자의 특성 중 분배법칙을 배제하는 것에 관하여 연구하였다. Dedekind와 격자의 관계는 [22]에 자세히 언급되었다([10, 11, 12]).

1930년대 말까지 Huntington의 conjecture에 관하여 증명도 하지 못하였고 반례도 들지 못하였고, modularity, atomicity, De Morgan's Law등의 조건이 첨가되었으나 그 타당성이 매우 의심스러운 발표들이 있었을 뿐이었다. 1945년 Dilworth(1914-1993)가 'Any lattice is embeddable in a uniquely complemented lattice.'라는 의외의 정리를 발표하였는데 그는 'not every uniquely complemented lattice is distributive'임을 보였다([13]). 지난 60여 년간 Dilworth의 증명은 세 차례에 걸쳐 수정되어 마지막 교정은 Adams(1930-1989)와 Sichler에 의하여 이루어졌다. '분배 격자의 임의의 원소는 많아야 오직 한 개의 complement를 갖는다'는 사실은 쉽게 알 수 있으나 'complete nondistributive uniquely complemented lattice가 존재하는가'의 문제는 여전히 풀리지 않은 상태로 남아 있다([17]).

우리는 이 논문에서 Peirce를 소개하고 atomic 격자, atomistic 격자, J-격자, strong 격자, 분배 격자의 상관관계를 연구한다.

1. Charles Sanders Peirce(1839-1914)

수학, 철학, 화학, 천문학, 측지학등 여러 분야에서 탁월한 재능을 보여준 Charles Sanders Peirce는 1839년 Massachusetts주 Cambridge에서 아버지 Benjamin Peirce(1809-1880)와 어머니 Sarah Hunt Mills의 아들로 태어났다. 아버지 Benjamin은 40년 동안 Harvard 대학교 천문학, 수학 교수였으며 선형대수학의 선구자, 탁월한 천문학자 그리고 초기 Darwin(1809-1882)의 진화론을 옹호한 학자로서 미국 과학계의 선도적인 역할을 하였다. 그의 집은 당시 저명한 과학, 정치 그리고 문화계의 인사들과 Emerson(1803-1882), Longfellow(1807-1882), Oliver Wendell Holmes(1809-1894) 등 의 모임 장소로 이용되었으며, 이러한 환경에서 Charles와 그의 형 James는 학자로, 동생들은 외교관과 광산 기술자로 성장하였다. Charles의 어린 시절부터 그의 아버지는 아들의 천재성을 간파하고 직접 수학과 물리학을 가르쳤으며 장래에 자신을 훨씬 능가하는 과학자로서 성장하기를 기대하였다. 그러나 그 기대는 Charles에게 큰 부담이 되어 성장 과정중의 성격 형성에 좋지 않은 영향을 주었다. Charles를 잘 아는 대부분의 사람들에 따르면 그는 까다롭고 다른 사람들과 잘 어울리지 못하며 거만한 비평가로서 상대하기 어려운 사람으로 알려져 있다. 이러한 그의 성격은 훗날 그가 동료와 상급자들 사이에 불화를 일으키는 요인으로 작용하였다. 그는 12살에 대학 수준의 논리학 서적을 읽었으며 다음 해 Kant(1724-1804)의 순수이성비판(Critique of Pure Reason)을 읽기 시작하여 일생 동안 Kant의 영향을 대단히 많이 받았다.

Charles Peirce는 1855년 Harvard 대학에 입학하여 화학, 수학, 물리학과 더불어 철학에 깊은 관심을 보였다. 대학 시절 Kant 철학을 더욱 심도 있게 공부하였으나 무조건적인 Kant의 추종자는 아니었다. 실제로 그는 Kant의 전통적 논리에 심각한 문제가 있음을 깨달았고 Boole과 De Morgan이 Kant와 Aristotle(384-322 B.C.) 이상으로 논리학을 발전시켰음을 깨달았다. Harvard 대학교를 졸업한 후 Peirce는 Louis Agassiz(1807-1873)와 6개월 동안 동물 분류를 공부하였다. Agassiz는 그에게 완족류의 화석을 분류하는 과제를 주었으며, 이 경험이 분류 기법에 관심을 갖게 하는 계기가 되었고 훗날 과학의 상호 의존성을 분류하고자 하는 시도를 반복한다. 이후 Peirce는 Harvard의 Lawrence Scientific School에 입학하여 대학원 과정에서 화학을 공부하고 최우등으로 졸업하였다. 몇 년간 화학자로서 연구한 결과 화학에 중대한 기여가 되는 원소의 쌍에 대한 연구 결과를 발표하였는데, 이 연구에서 그는 훗날 Mendeleev(1834-1907)의 원소 주기표 발견을 부분적으로 예견하였다.

1865년 봄 Harvard에서 The Logic of Science를 강의하였고, 1866년 말 Lowell Institute에서 The Logic of Science; or Induction and Hypothesis를 강의하였다. 1867년 1월 30일 American Academy of Arts and Sciences에 선출된 후 1869년 10월부터 1872년 12월까지 Havard Observatory의 조교로서 천문학을 연구하였다.

Peirce가 대학에 다니고 있을 당시 그의 아버지는 미국 Coast Survey에서 일하고 있었으며 Peirce 자신도 가끔 이 기관을 위하여 연구를 수행하였다. 1870년에는 Coast Survey에 의하여 유럽으로 파견되어 측지학 연구를 지속하였다. Peirce가 수행한 주요 측지학 연구 과제는 미국과 해외의 여러 곳에서 중력을 측정 하는 것이었으며 이 밖에도 이 실험에서 얻어진 자료를 이용하여 지구의 형태를 알아내는 것도 포함된다. 이후 한동안 Peirce는 순조로운 경력을 쌓게 되는데 1877년에는 National Academy of Sciences(U. S.)에 선출되고 측광학 연구 책자(Photometric Researches-1878)에 자신의 초기 천문학 연구 결과를 발표하였다. 비록 그의 업적은 다양한 과학 분야를 망라하였으나 그는 항상 철학과 논리학에도 지속적인 관심을 가졌다. 1879년 Peirce는 Johns Hopkins 대학 수학과에 강사로 임명되었고 그곳에서 'Four Colour Problem', 'Problems of knots and linkages' 등에 관심을 갖게 된다. 또한 그는 아버지의 업적인 associative algebra, mathematical logic, topology, set theory 등을 연구하였다. 그러나 1884년 그의 사생활 문제가 대학 이사회에 알려지게 되었고 스캔들을 두려워한 이사회는 그의 재임용을 거부하였다. 이후 Peirce는 어떤 다른 교육 기관에서도 직책을 얻지 못하였다. Coast and Geodetic Survey의 과제는 Peirce의 유일한 일거리가 되었고 북극으로부터 온 중력 측정 자료를 연구하기 위하여 워싱턴으로 갔다. 그 후에도 Peirce는 지속적으로 Coast Survey 연구를 수행하였으나 상급자들과의 불화로 인하여 고립되고 만다. 1890년 Peirce는 주요 보고서를 Coast Survey에 제출하였으나 출판을 거부당하고 재정 압박을 심하게 받고 있던 Coast Survey는 그를 해임하였다. 그때부터 Peirce는 아무 수입도 없이 경제적으로 어려운 생활을 하게 된다.

Peirce의 업적 중 많은 부분은 화학, 천문학, 측지학뿐 아니라 철학과 논리학에 관련된 것이다. 1867년 발표한 논리학 논문에서 그는 Boole 논리 체계를 단순화 하였고 몇 가지 오류를 수정하였다. 또한 삼단논법의 확장과 논리, 산술, 대수간의 관계에 대하여 탐구하였다. 비슷한 시기에 Peirce는 분석 철학에 관심을 갖기 시작한다. Descartes(1596-1650) 이후 철학자들은 인식론을 철학의 중심적 학문 분야로 여겼고, 현대 과학의 기초는 지적 작용과 개별적 자각 지식을 위한 능력을 조사함으로써 탐구될 수 있다고 가정하였다. Peirce는 개별주의와 Descartes의 심리주의를 거부하였다. 그는 심리학적 탐구를 모두 부정하지는 않으면서 그것이 객관적인 과학적 추론의 원칙, 즉 넓은 의미로 이해되는 논리를 고찰하는 것에 토대를 두어야 한다고 주장하였다. Peirce는 중세 논리학과 형이상학을 철저하게 연구하였는데 특히 John of Salisbury(1115-1180?), Roger Bacon(1214-1294), William of Occam(1285-1349?), Duns Scotus(1265?-1308)와 같은 중세 논리학자들의 업적에 중점을 두었고 그들 중 Scotus는 Kant나 Aristotle만큼 그의 사고에 중대한 영향을 주었다. Peirce는 Descartes 철학으로부터의 탈피를 인식론, 논리학, 과학적 방법론에 관한 일련의 논문에 발표하였다. 이들 논문에서 그는 진리, 현실, 인식, 그리고 정착된 세계관에 점진적으로 집중하는 이론을 가진 과학계 사이의 관계를 탐구하였다. 1870년대 초 Peirce는 William James(1842-1910), Oliver Wendell Homes(1841-1935)와 더불어 Cambridge에서 형이상학 클럽을 만들었다. 이 클럽의 회합에서 Peirce는 논리학, 철학, 과학적 방법론에 대한 그의 견해를 발표하였고 그의 견해에 대하여 실용주의(Pragmatism)라는 새로운 용어를 만들었다. William James는 훗날 실용주의라는 말을 널리 알려지게 하였고 Peirce에게 그 공적을 돌렸다.

Peirce는 훌륭한 저술과 많은 기술적 업적 그리고 John Dewy(1859-1952)와 같은 인물들로부터 받은 찬사에도 불구하고 현대 철학에서 인정받지 못하고 있다. 그 이유로는 그의 사고의 난해함, 이론의 기이함과 부조화 등과 더불어 그의 저술 상태에 있다. Peirce는 방대한 양의 논문, 논리 과학 노트 그리고 책의 초고를 남겼으나 그 대부분이 정리되지 않은 무질서한 상태이다. 1914년 암으로 세상을 떠날 때까지 Peirce는 극도의 빈곤으로 고통 받았고 몇몇 친구들의 도움으로 간신히 생계를 유지하였다. 그는 수 주일씩 사람들과의 접촉을 피하며 은둔 생활을 하였고 더욱 더 내향적이고 기이하게 변해갔으며 이러한 그의 성격은 그의 저술에서 엿볼 수 있다.

2. Atomic Lattices

격자 L 의 두 원소 x 와 y 에 대하여 $x < y$ 이고 $x \le z < y$ 이면 $z = x$ 일 때, y 를 x 의 cover라고 정의하고, 격자 L 이 최대원과 최소원을 가질 때 이들을 각각 1 과 0 으로 나타낸다.

0 을 갖는 격자 L 의 원소 a 가 0 의 cover 일 때 a 를 atom이라 정의한다. 이 때, L 의 모든 atom들의 집합을 $A(L)$ 로 나타내고, 임의의 $x \in L$ 에 대하여 x 보다 작거나 같은 모든 원소들의 집합을 $\downarrow x$ 로 나타내며, x 보다 작거나 같은 모든 atom 들의 집합을 A_x 로 표시한다. 즉, $A_x = \downarrow x \cap A(L)$ 이다.

모든 $x \in L$ 에 대하여 $A_x \neq \varnothing$ 인 격자 L 을 atomic이라 하고, 모든 $x \in L$ 에 대하여 $x = \vee S$ 인 $A(L)$ 의 부분집합 S 가 존재하는 격자 L 을 atomistic 격자라고 부른다. atomistic 격자 L 의 모든 원소 x 에 대하여 $x = \vee A_x$ 이다([20]).

격자 L 의 원소 x 와 y 에 대하여 $u = x \vee y$ 일 때 $u = x$ 또는 $u = y$ 인 L 의 원소 u 를 join-irreducible이라 하고, L 의 0 이 아닌 모든 join-irreducible 원소들의 집합을 $J(L)$ 로 나타낸다.

모든 $x \in L$ 에 대하여 $J(L)$ 의 부분집합 S 가 존재하여 $x = \vee S$ 가 되는 격자 L 을 J-격자라 하고, 임의의 $x, y \in L$ 과 $u \in J(L)$ 에 대하여 $x < u \leq x \vee y$ 일 때 $u \leq y$ 가 되는 격자 L 을 strong 격자라 한다. finite length strong 격자의 정의는 [14, 19]에서 찾을 수 있으며, [19]에서 일반적인 strong 격자를 정의하였다.

[9]에 의하면 descending chain condition을 만족하는 모든 격자는 J-격자이다. 따라서 모든 finite length 격자는 J-격자이다. 그러나 finite length인 격자는 일반적으로 strong 격자가 아니다. 예로써 펜타곤 격자 N_5 를 들 수 있으며 [14]에서 모든 finite length modular 격자는 strong 격자임을 보였다. finite length strong 격자와 J-격자의 연구는 비교적 많이 이루어졌으나 우리는 finite length의 조건을 배제시킨 strong 격자, J-격자 그리고 atomic 격자의 상관관계를 다룬다.

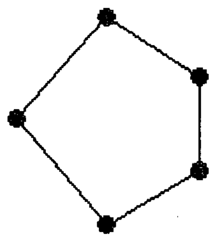

그림 1. 펜타곤 격자(N_5)

격자 L 에 atom이 존재하면 이는 join irreducible 원소이므로 $A(L) \subseteq J(L)$ 이다. 만약에 $A(L) = J(L)$ 이면 다음의 특성을 갖는다.

2.1. 보조정리. $A(L) = J(L)$ 인 격자 L 은 strong 격자이다.

증명. 임의의 $x, y \in L$ 과 $u \in J(L)$ 에 대하여 $x < u \leq x \vee y$ 라 하면, $u \in A(L)$ 이므로 $x = 0$ 이다. 따라서 $u \leq x \vee y = 0 \vee y = y$ 이므로 L 은 strong 격자이다.

atomic 격자, strong 격자 그리고 J-격자의 범주들 사이에는 서로 포함 관계가 존재하지 않는다. atomic strong 격자이지만 J-격자가 아닌 예가 다음과 같이 존재한다.

2.2. 예제. 실수의 집합 R 에 주어진 보통 위상 $\Omega(\mathrm{R})$ 은 완비 격자를 이루고 부분 격자 $L = \{x \in \Omega(\mathrm{R}) \mid 0 \in \mathrm{x}\} \cup \{\varnothing, \{1\}\}$은 $\varnothing$이 아닌 모든 $x \in L$ 에 대하여 $A_x = \{\{1\}\} \neq \varnothing$ 이므로 atomic이고, $J(L) = \{\{1\}\} = A(L)$이다. 따라서 보조정리 2.1에 의해 L은 strong 격자이지만 J-격자가 아니다.

[14]에서 finite length인 modular 격자는 strong 격자임을 보였다. 우리는 이를 일반화시켜 다음의 정리를 얻는다.

2.3. 정리. 모든 modular 격자는 strong 격자이다.

증명. modular 격자 L 의 원소 x, y 와 $u \in J(L)$ 에 대하여 $x < u \leq x \vee y$ 이면
L 이 modular이고 $x < u$ 이므로 $u = (x \vee y) \wedge u = x \vee (y \wedge u)$이다.
$u \in J(L)$ 이고 $x \neq u$ 이므로 $u = y \wedge u \leq y$ 이다.
따라서 L 은 strong 격자이다.

모든 분배격자는 modular 격자이므로 다음의 따름정리를 얻는다.

2.4. 따름정리. 모든 분배격자는 strong 격자이다.

다음의 예로 알 수 있듯이 정리 2.3의 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

2.5. 예. 유리수 집합 Q 의 원소 a, b 에 대하여 $[a, b] = \{q \in \mathrm{Q} \mid a \leq q \leq b\}$ 일 때, 부분 격자 $L = \{\varnothing\} \cup \{\{q\} \mid q \in \mathrm{Q},\ 0 \leq q < 1\} \cup \{[0, q] \mid q \in \mathrm{Q},\ 0 < q \leq 1\}$ 에 대하여 $A(L) = \{\{q\} \mid q \in \mathrm{Q},\ 0 \leq q < 1\}$ 이고, $J(L) = A(L) \cup \{[0, 1]\}$이다. 이 격자 L 의 최대원은 $[0, 1]$ 이고, $[0, 1]$ 아닌 원소 x, y 에 대하여 $x \vee y < [0, 1]$ 이므로 L 은 strong 격자이다. 그러나 이 격자는 modular가 아니다.

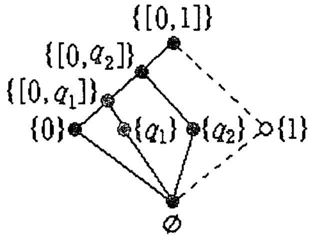

그림 2

3. Atomistic Lattices

[20]에서 Walendziak은 atomistic 격자는 strong 격자라고 서술하였으나 우리는 반례를 들어 그의 논문에 오류가 있음을 밝히고자 한다.

모든 atomistic 격자는 atomic이고, $A(L) \subseteq J(L)$ 이므로 atomistic 격자는 J-격자이다. 그러나 실직선 R 위의 폐구간 $[0,1]$ 은 J-격자이지만 atomistic 격자는 아니다. 또한 atomistic이지만 strong 격자가 아닌 예가 다음과 같이 존재한다.

3.1. 예제. 예 2.5의 격자 L 에서 $A(L)$ 의 원소 $\{1/2\}$ 을 뺀 격자

$M = \{\varnothing\} \cup \{\{q\} \mid q \in Q,\ 0 \le q < 1, q \neq 1/2\} \cup \{[0,q] \mid q \in Q,\ 0 < q \le 1\}$ 일 때, $A(L) = \{\{q\} \mid q \in Q,\ 0 \le q < 1, q \neq 1/2\}$, 모든 $x \in M$ 에 대하여 $x = \vee A_x$ 이므로 M 은 atomistic 격자이다. 그러나 $J(L) = A(L) \cup \{[0,1/2], [0,1]\}$ 이고,

$$[0,1/3] < [0,1/2] \le [0,2/3] = [0,1/3] \vee \{2/3\},$$

$[0,1/2] \not\le \{2/3\}$ 이므로 M 은 strong 격자가 아니다.

3.2. 정리. atomic strong J-격자 L 의 임의의 원소 $u \in J(L)$ 에 대하여 $a \vee z \in \uparrow u$ 인 $a \in A_u$ 와 $z \in L - \uparrow a$ 가 존재하면 $J(L) = A(L)$ 이다. 따라서 L 은 atomistic이다.

증명. $u \in J(L) - A(L)$ 이라 하면, 가정에 의해 $a \in A_u$ 와 $z \in L - \uparrow a$ 가 존재하여 $a \vee z \in \uparrow u$ 이다. 즉, $a < u \le a \vee z$ 이다. L 이 strong 격자이므로 $a < u \le z$ 이고 이는 $z \in L - \uparrow a$ 라는 사실에 모순이다. 따라서 $J(L) = A(L)$ 이다.
또한, L 은 J-격자이므로 모든 $x \in L$ 에 대하여 $x = \vee \{u \in J(L) \mid u \le x\}$ 이고 $\{u \in J(L) \mid u \le x\} \subseteq A(L)$ 이므로 L 은 atomistic이다. •

3.3. 따름정리. atomic strong J-격자에서 임의의 $u \in J(L)$ 에 대하여 $u \leq a \vee a^*$ 인 pseudocomplement a^* 를 갖는 a 가 A_u 에 존재하면 L 은 atomistic이다.

3.4. 따름정리. atomic strong J-격자의 임의의 join irreducible 원소 $u \in J(L)$ 에 대하여 complement를 갖는 a 가 A_u 에 존재하면 L 은 atomistic이다.

4. 결론

지난 70여 년간 격자론은 현대 수학의 한 분야로 자리매김하였으며 분배 격자론은 격자론과 더불어 중요한 역할을 하고 있다. 격자론의 체계적인 발전은 1930년대 George Birkhoff(1884-1944)와 그의 학파에 의하여 이루어졌으나([2,3,4,5,6]) 격자론의 기원은 그보다 훨씬 전으로 거슬러 올라간다. 특히 1850년대 Boole의 고전 논리에 관한 이론은 Boolean algebra로 일컬어지는 대수 구조의 창안을 이끌었다. 분배 격자의 특수한 형태인 Boolean algebra에 관한 체계적 연구는 1930년대 M. H. Stone(1903-1989)이 연구하기 전까지는 별로 주목을 받지 못하다가 현대적 의미의 격자는 Peirce와 Schröder에 의하여 소개되었고 동시대에 Dedekind(1831-1916)는 modular 격자를 소개하였다([12]). 따라서 분배 격자론은 격자론의 오랜 분야로 여겨지며 위상수학, 대수학, 논리학과의 밀접한 관계로 인하여 여러 분야에 걸쳐 다양하게 연구되고 있다([1]).

연속격자(continuous Lattice), 가산근사격자(countably approximating Lattice), 정규격자(regular Lattice)등은 모두 이들 격자의 원소들이 어떤 원소들의 join으로 나타나는가에 의하여 결정되므로 위상공간을 생성하는 기저가 어떤 성질을 갖는가는 매우 흥미로운 일이다. 우리는 atom들의 집합이 기저를 이루는 위상공간에 관심을 두었고 atomic lattice에 관한 연구를 시작하였다. atom에 관한 연구는 수학뿐 아니라 물리학과 공학 분야에 널리 응용되고 있으며, 물론 응용분야에서의 격자는 유한 격자에 관한 연구가 주류일 것으로 생각이 된다. 그러나 수학의 특성상 우리는 무한 격자에 관하여 관심을 갖지 않을 수 없다. 불과 120 여 년 전 모든 격자가 분배격자라고 생각했다는 사실은 우리에게 매우 희망을 주는, 다시 말해서 아직도 수학에는 수정할 수 있는 작은 오류, 또는 여백이 있을 수 있음을 의미하기 때문이다.

감사의 글 이 논문을 꼼꼼하게 읽고 지적하여 주신 세 분의 심사위원들께 깊은 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. R. Balbes and P. Dwinger, *Distributive Lattices*, Columbia: Univ. of Missouri Press, 1974.
2. G. Birkhoff, *On the combination of subalgebras*, in Proc. Camb. Phil. Soc., 1933.
3. G. Birkhoff, *Note on the paper 'On the combination of subalgebras'*, in Proc. Camb. Phil. Soc., 1934.
4. G. Birkhoff, *Applications of lattice algebra*, in Proc. Camb. Phil. Soc., 1934.
5. G. Birkhoff, *Combinatorial relations in projective geometries*, in Annals of Math., 1935.
6. G. Birkhoff and J. von Neumann. *The logic of quantum mechanics*, in Annals of Math., 1936.
7. G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic*, Cambridge: MacMillan, 1847.
8. G. Boole, *An Investigation of the Laws of Thought*, London: Walton and Maberley, 1854.
9. B. A. Davey and H. A. Priestley, *Introduction to lattices and order*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
10. R. Dedekind, *Stetigkeit und Irrational Zahlen*, Braunschweig: F. Vieweg & Sohn, 1872.
11. R. Dedekind, *Uber Zerlegungen von Zahlen durch ihre grossten gemeinsamen Teiler*, in Festschrift Techn. Hoch Braunschweig and Ges. Werke., 1897.
12. R. Dedekind, *Uber die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe*, in Math. Ann., and Ges. Werke., 1900.
13. R. P. Dilworth, *Lattices with unique complements*, Trans. Amer. Math. Soc., 57 (1945), pp. 123-154.
14. U. Faigle, *Geometries on Partially ordered set*, J. Combin. Theory, Ser. B, 28 (1980), pp. 26-51.
15. W. S. Jevons, *Pure Logic*, London: E. Stanford, 1864.
16. C. S. Peirce, *On the algebra of logic*, in Amer. J. Math., 1880.
17. V. N. Saliĭ, *Lattices with Unique Complements*, Amer. Math. Soc., Vol 69, 1984.
18. E. Schröder, *In Vorlesungen iiber die algebra der Logik*, Leipzig: Teubner, 1890.
19. M. Stern, *On Complemented strong lattices*, Portugaliae Mathematica, Vol. 46 Fasc. 2 (1989), pp. 225-227.

20. A. Walendziak, *On Atomistic lattices*, Portugaliae Mathematica, Vol. 51, Fasc. 4 (1994), pp. 583-585.
21. 홍성사, 홍영희, 순서와 위상구조의 관계, 한국수학사학회지, 제10집 제1호, 1997.
22. 홍영희, 격자론의 기원, 한국수학사학회지, 제12권 제2호 (1999), pp. 15-23.

On Atomic Lattices

Dept. of Math., Chungbuk National University **Seung On Lee**
Dept. of Math., Chungbuk National University **Yong Ho Yon**
Dept. of Com. Edu. Chungbuk National University **In Jae Hwang**

The lattice originated from logic, not mathematics. Around 1880, Peirce thought that all the lattices were distributives, however Schröder corrected the error around 1890. In 1993, Birkhoff used the term lattice for the first time that had a different meaning from today's lattice. This paper introduces Peirce, and studies correlation among atomic lattices, atomistic lattices, J-lattices, strong lattices and distributive lattices.

Key words: Distributive Lattices, Atomic Lattices, Atomistic Lattices, J-Lattices, Strong Lattices.

2000 Mathematics Subject Classification: 01A05, 01A50, 01A70, 01A85.

ZDM Subject Classification: A30

논문접수: 2006년 6월 심사완료: 2006년 8월