응용통계연구 제 **19**권 *3*호, *2006*년, *pp. 579–585*

브라운 운동을 이용한 보험 상품의 파산 모형 연구*

한수희[1)] 이의용[2)]

요 약

본 연구에서는 보험 상품의 잉여금 변화가 브라운 운동을 따르는 파산 모형에 대하여 연구하였다. 만약 잉여금이 재투자를 위한 목표 잉여금을 닿으면 보험회사는 다른 금융 상품에 재투자하는 것으로 가정하였다. 잉여금 과정에 마팅게일 방법을 적용하여 잉여금이 $V>0$ 또는 0에 도달할 때까지의 시간 T를 초기 잉여금 $x(0<x<V)$의 함수로 표시하였으며, 미분방정식을 이용하여 T기간 동안의 총 잉여금과 평균 잉여금을 계산하였다.

주요용어: 브라운 운동, 파산 모형, 마팅게일, 잉여금 과정

1. 서론

최근 보험회사의 자산이 빠르게 증가하고 있다. 앞으로 노령화 사회가 진행되고 핵가족화의 심화, 가치관의 변화에 따라 보험에 대한 의존도가 높아질 것이다. 따라서 보험 가입도 증가할 것이며 이에 따라 보험회사의 자산도 증가하게 된다. 이를 반영하듯 최근 보험회사의 운용 자산이 급격히 증가하고 있다. 따라서 보험회사는 건전한 자산운용이 필수적이며 이를 위해서는 보험 상품의 파산 모형에 대한 연구가 선행되어야 한다. 파산 모형의 모형화 과정과 잉여금 과정의 파산 확률을 구하는 기존의 연구는 Klugman *et al.*(2004)에 잘 요약되어 있다.

Lee and Kinateder(2000)는 유한 댐에서 물이 차 있는 기간의 기대값을 구하기 위해 마팅게일 기법을 이용하였으며, Lee and Lim(2000)은 마팅게일 기법을 이용하여 조급한 손님이 있는 $M/M/1$ 대기모형에서 손님의 가상대기시간이 수준 K를 넘거나 0에 도착하는 데까지 걸리는 시간의 기대값을 구하였다. 본 논문에서는 마팅게일 기법을 보험 상품의 잉여금 과정에 적용하여 잉여금이 V 또는 0에 이르는 기간의 기대값과 이 기간 동안의 총 잉여금 그리고 평균 잉여금을 구한다.

보험 상품의 파산 모형을 연구하기 위해서 다음을 가정하였다. 첫째, 하나의 보험 상품이 고려된다. 둘째, 보험 상품의 잉여금이 V에 닿으면 $S(0<S<V)$만큼의 투자가 이루어진다. 셋째, 보험 상품의 잉여금이 0이 되면 보험 상품은 파산한다. 넷째, 보험 상품의

* 본 연구는 숙명여자대학교 2005년도 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.
1) (140-742) 서울 용산구 청파동 효창원길 52, 숙명여자대학교 통계학과, 대학원
2) (교신저자)(140-742) 서울 용산구 청파동 효창원길 52, 숙명여자대학교 통계학과, 교수
E-mail: eylee@sookmyung.ac.kr

잉여금 과정 $\{U_t, t \geq 0\}$은 보험료율이 무시되면 평균이 0이고 분산이 σ^2인 브라운 운동 $\{B_t, t \geq 0\}$을 따른다. 다섯째, 보험회사의 보험료율은 $c > 0$이다.

다음은 잉여금 과정의 표본 경로이다.

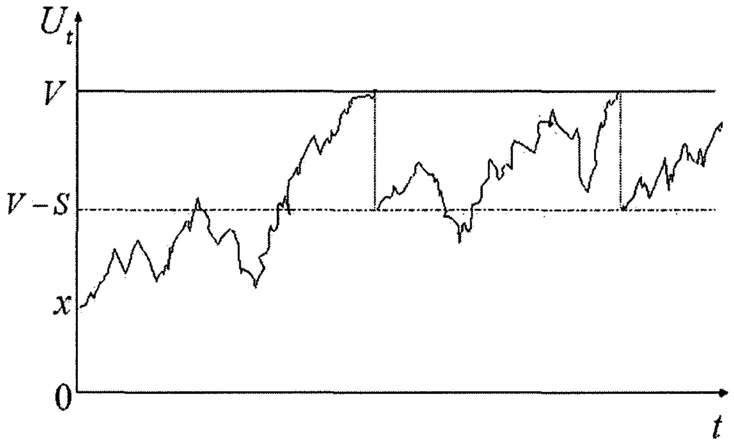

그림 1.1: $\{U_t, t \geq 0\}$의 표본 경로

위 그림은 초기 잉여금 x에서 시작하여 목표 잉여금 V에 닿는 경우 S만큼의 재투자가 이루어지는 것을 보여준다.

본 논문의 2장에서는 잉여금 과정에 Optional Stopping Theorem(이하 O.S.T. 라고 표기, Karlin and Taylor, 1975, p.261)을 적용하여 초기 잉여금 x로 보험 상품을 상용화한 후, 전체 잉여금이 V에 도달하거나 0에 도달할 때까지의 기간 T의 기대값을 구한다. 전체 잉여금이 V에 이르기 전 0에 도달하여 파산하게 될 확률과 목표치 V에 먼저 도달할 확률도 함께 구한다. 3장에서는 기간 T동안의 총 잉여금과 평균 잉여금을 구하며, 예제를 통해 앞서 구한 기간 T의 기대값, T동안의 총 잉여금과 평균 잉여금에 대한 그래프를 그려본다.

2. T의 기대값

이 장에서는 초기 잉여금 x에서 출발한 보험 상품이 V 혹은 0에 닿을 때까지의 기간 T의 기대값 $E[T|x]$을 구하고자 한다. $\{U_t, t \geq 0\}$를 $(0, V)$내의 초기 잉여금 x에서 시작된 잉여금 과정, B_t를 브라운 운동, c를 보험료율이라고 정의하면, U_t가 V에 닿거나 0에 도달하기 이전까지는

$$U_t = x + B_t + ct, \quad 0 \leq x \leq V \tag{2.1}$$

가 된다.

$T = \inf\{t > 0 | U_t \notin (0, V)\}$로 정의하자. T의 기대값을 구하기 위해 U_t로부터 두 종류의 마팅게일을 만든다.

(i) $M_t = \frac{e^{\lambda U_t}}{e^{\lambda ct}E[e^{\lambda B_t}]}, \qquad \lambda > 0,$

(ii) $N_t = U_t - [ct + E(B_t)]$.

M_t는 U_t의 적률생성함수를 이용하여 만들고, N_t는 U_t에서 기대값을 차감함으로써 만든다. 이들이 마팅게일이 되는 것은 Lee and Kinateder (2000)의 증명과 유사한 방법으로 증명할 수 있다. 여기서 $\lambda = -\frac{2c}{\sigma^2}$이면 첫번째 마팅게일은 $M_t = e^{\lambda U_t}$가 된다. 마팅게일 M_t에 O.S.T.을 적용하면,

$$\begin{aligned} e^{\lambda x} &= E[M_0|U_0 = x] = E[M_T|U_0 = x] \\ &= e^0 Pr\{U_T = 0|U_0 = x\} + e^{\lambda V} Pr\{U_T = V|U_0 = x\} \end{aligned}$$

가 된다. 여기에 $Pr\{U_T = 0|U_0 = x\} + Pr\{U_T = V|U_0 = x\} = 1$임을 이용하여 풀면,

$$Pr\{U_T = V|U_0 = x\} = \frac{1 - e^{-\frac{2cx}{\sigma^2}}}{1 - e^{-\frac{2cV}{\sigma^2}}} = 1 - Pr\{U_T = 0|U_0 = x\} \tag{2.2}$$

이 된다. 여기서 $Pr\{U_T = V|U_0 = x\}$는 잉여금이 파산하기 전에 목표치 V에 먼저 도달할 확률이고, $Pr\{U_T = 0|U_0 = x\}$는 잉여금이 목표치에 도달하기 전에 파산할 확률이다.

보험회사의 잉여금이 최초로 0 혹은 V에 닿을 때까지 기간 T의 기대값은 두 번째 마팅게일 N_t를 이용하여 구할 수 있다. 즉, N_t에 O.S.T.을 적용하면

$$\begin{aligned} x = E[N_0|U_0 = x] = E[N_T|U_0 = x] &= E[U_t|U_0 = x] - cE[T|U_0 = x] \\ &= VPr\{U_t = V|U_0 = x\} - cE[T|U_0 = x] \end{aligned}$$

이다. 여기에 식 (2.2)를 대입하면

$$\begin{aligned} E[T|x] &= \frac{VPr\{U_t = V|U_0 = x\} - x}{c} \\ &= \frac{V\left(1 - e^{\frac{-2cx}{\sigma^2}}\right) - x\left(1 - e^{\frac{-2cV}{\sigma^2}}\right)}{c\left(1 - e^{\frac{-2cV}{\sigma^2}}\right)} \end{aligned} \tag{2.3}$$

을 얻을 수 있다.

3. T 동안의 총 잉여금과 평균 잉여금

이 장에서는 T 동안의 총 잉여금과 평균 잉여금을 구한다. 보다 일반적인 경우를 알아보기 위하여 잉여금 과정 U_t 대신에 $g(U_t)$를 고려하고,

$$W(x) = E\left[\int_0^T g(U_t)dt|U_0 = x\right], \qquad 0 \le x \le V \tag{3.1}$$

라 놓자. g는 미분 가능한 함수로 $g(x) = x$이면 $g(U_t) = U_t$가 되고 $W(x)$는 초기 잉여금 x에서 출발하여 최초로 V 혹은 0에 닿을 때까지의 총 잉여금이 된다.

$W(x)$를 구하기 위하여, U_t의 구간 $(0,h)$에서의 움직임에 조건을 걸면

$$\begin{aligned} W(x) &= E\left[\int_0^h g(U_t)dt|U_0 = x\right] + E\left[W(U_h)|U_0 = x\right] \\ &= g(x)h + E\left[W(U_h)|U_0 = x\right] + o(h) \end{aligned} \tag{3.2}$$

이다. 여기서 h는 0에 가까운 작은 수이다. $\Delta U = U_h - x$로 정의하고 테일러 급수를 이용하면

$$\begin{aligned} E[W(U_h)|U_0 = x] &= E[W(x + \Delta U)|U_0 = x] \\ &= W(x) + chW'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 hW''(x) + o(h) \end{aligned}$$

이다. 식 (3.2)를 h로 나누고 h를 0으로 보내면

$$-g(x) = \frac{1}{2}\sigma^2\left[W''(x) + \frac{2c}{\sigma^2}W'(x)\right] \tag{3.3}$$

로 나타낼 수 있다.

식 (3.3)을 풀기 위하여 [Karlin and Taylor, 1981, p.195]에서와 같이 $s(x) = e^{-\int_0^x \frac{2c}{\sigma^2}dt} = e^{-\frac{2c}{\sigma^2}x}$, $m(x) = \frac{1}{\sigma^2 s(x)} = \frac{e^{\frac{2cx}{\sigma^2}}}{\sigma^2}$라 놓고 $\frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{2c}{\sigma^2}$임을 이용하여 식 (3.3)을 정리하면

$$-g(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{m(x)}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{s(x)}\frac{d}{dx}W(x)\right] \tag{3.4}$$

와 같다. 여기서 $S(x) = \int_0^x s(t)dt$, $M(x) = \int_0^x m(t)dt$라 놓으면 식 (3.4)는

$$-g(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dM(x)}\left[\frac{dW(x)}{dS(x)}\right], \quad 0 \le x \le V \tag{3.5}$$

이 된다. (3.5)식의 양변에 $2dM(x)$를 곱하여 적분식으로 나타내면

$$\frac{dW(x)}{dS(x)} = -2\int_0^x g(t)m(t)dt + \beta$$

가 되며, 다시 양변에 $dS(x)$를 곱하여 적분식으로 나타내면

$$W(x) = -2\int_0^x \int_0^t g(s)\frac{e^{\frac{2cs}{\sigma^2}}}{\sigma^2}dsdS(t) + \beta[S(x) - S(0)] + \alpha \tag{3.6}$$

가 된다. 여기에 $W(0) = W(V) = 0$임을 이용하면

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{2}{\frac{\sigma^2}{2c}\left(1 - e^{-\frac{2cV}{\sigma^2}}\right)}\int_0^V \int_0^t g(s)\frac{e^{\frac{2cs}{\sigma^2}}}{\sigma^2}dsdS(t)$$

임을 알 수 있다. 위에서 구한 α 와 β를 식 (3.6)에 넣고 $g(x) = x$로 놓으면 기간 T 동안의 총 잉여금은

$$W(x) = \frac{\left[V\left(V - \frac{\sigma^2}{c}\right)\left(1 - e^{-\frac{2cx}{\sigma^2}}\right) - x\left(x - \frac{\sigma^2}{c}\right)\left(1 - e^{-\frac{2cV}{\sigma^2}}\right)\right]}{2c\left(1 - e^{-\frac{2cV}{\sigma^2}}\right)} \tag{3.7}$$

이 된다.

T 기간 동안의 평균 잉여금은

$$A(x) = \frac{W(x)}{E[T|x]} \tag{3.8}$$

가 되며, (2.3)식과 (3.7)식을 이용하면,

$$A(x) = \frac{V\left(V - \frac{\sigma^2}{c}\right)\left(1 - e^{-\frac{2cx}{\sigma^2}}\right) - x\left(x - \frac{\sigma^2}{c}\right)\left(1 - e^{-\frac{2cV}{\sigma^2}}\right)}{V\left(1 - e^{-\frac{2cx}{\sigma^2}}\right) - x\left(1 - e^{-\frac{2cV}{\sigma^2}}\right)} \tag{3.9}$$

와 같이 구할 수 있다.

예제 3.1: 목표 잉여금이 $V = 50$이고 보험료율이 $c = 1$이며, $\sigma^2 = 9$인 브라운 운동을 따르는 잉여금 과정에서 $E(T|x)$, $W(x)$, $A(x)$를 그려보면 그림 3.1과 같다.

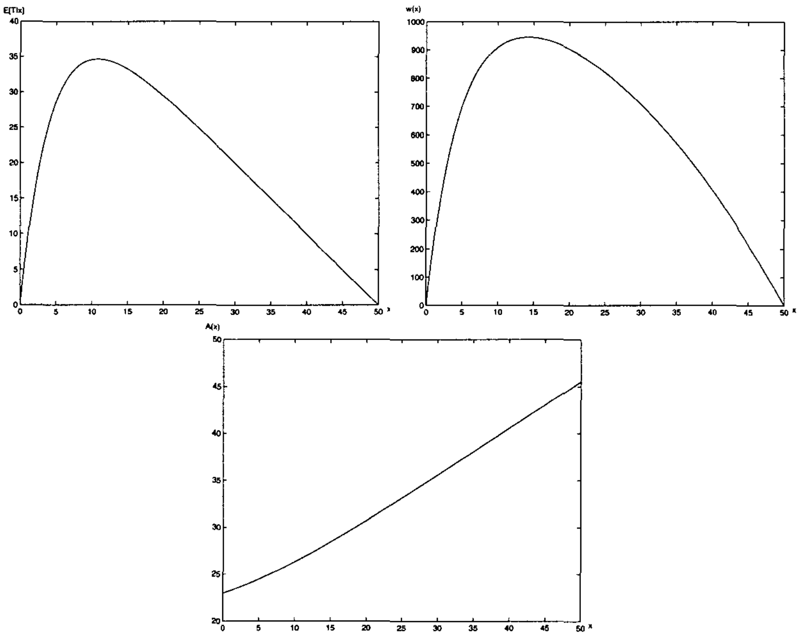

그림 3.1: $V = 50$, $c = 1$ 그리고 $\sigma^2 = 9$인 브라운 운동을 따르는 경우

참고문헌

Karlin, S. and Taylor, H. M. (1975). *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York.

Karlin, S. and Taylor, H. M. (1981). *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York.

Klugman, S. A., Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (2004). *Loss Models From Data to Decisions*, 2nd ed, John Wiley, Hoboken.

Lee, E. Y. and Kinateder, K. K. J. (2000). The expected wet period of finite dam with exponential inputs. *Stochastic Processes and Their Applications*, **90**, 175-180.

Lee, E. Y. and Lim, K. E. (2000). The Analysis of the M/M/1 Queue with Impatient Customers. *The Korean Communications in Statistics*, **7**, 489-497.

[2006년 6월 접수, 2006년 7월 채택]

Analysis of a Ruin Model with Surplus Following a Brownian Motion*

Soo Hee Han[1)] Eui Yong Lee[2)]

ABSTRACT

We consider a ruin model where the surplus process is formed by a Brownian motion. If the level of surplus exceeds V, then we assume that a insurer invests an amount of S to other place. In this paper, we apply martingale methods to the surplus process and obtain the expectation of period T, time from origin to the point where the level of surplus reaches either V or 0. As a consequence, we finally derive the total and average amount of surplus during T.

Keywords: Brownian motion, ruin model, martingale, surplus process

* This paper was supported by Sookmyung Women's University Research Fund 2005.

1) Graduate student, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742, Korea

2) (Corresponding author) Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742, Korea

E-mail: eylee@sookmyung.ac.kr