

# 개선된 일차전단변형이론을 이용한 복합재료 적층평판의 고정밀 해석

## An Accurate and Efficient Analysis of Composite Plates Based on Enhanced First-order Shear Deformation Theory

김 준 식\*      조 맹 효†

Kim, Jun-Sik      Cho, Maenghyo

(논문접수일 : 2006년 4월 7일 ; 심사종료일 : 2006년 10월 15일)

### 요 지

본 논문에서는 일차전단변형이론(FSDT)을 이용한 복합재료 적층평판의 고정밀 해석기법을 소개한다. 전단수정계수가 자동적으로 포함되도록 횡방향 전단 변형에너지를 혼합변분이론(mixed variational theorem)을 이용하여 개선하였다. 혼합변분 이론에서는 변분을 횡방향 응력들에 대해서만 취하였다. 가정된 횡방향 전단응력은 효율적인 고차이론(Cho and Parmerter, 1993)으로부터 구하였다. 횡방향 수직응력은 3차 다항식으로 가정하였고, 무전단 응력조건과 평판의 윗면과 아랫면에서의 응력을 만족하는 조건을 부과함으로써 얻었다. 한편, 변위들에 대해서는 일차전단변형이론의 변위장을 사용하였다. 이렇게 해서 얻어진 변형 에너지를 본 논문에서는 EFSDTM3D이라고 명명 하였다. 본 논문에서 개발된 EFSDTM3D는 변위와 응력의 계산에서 고전적인 FSDT와 같은 정도의 계산 효율을 가지면서, 동시에 변위와 응력의 두께방향의 정확도를 면내 방향 응력들에 대한 최소오차자승법에 기초하여 응력 회복 과정을 적용함으로써 개선하였다. 계산된 결과는 고전적인 FSDT, 3차원 탄성해, 그리고 참고문헌 중에서 이용 가능한 결과들과 비교하여 검증하였다.

핵심용어 : 평판이론, 복합재료 평판, 샌드위치 평판, 횡방향 응력

### Abstract

In this paper, an efficient yet accurate stress analysis based on the first-order shear deformation theory (FSDT) is presented. The transverse shear strain energy is modified via the mixed variational theorem, so that the shear correction factors are automatically involved in the formulation. In the mixed variational formulation, the transverse stresses are taken to be functions subject to variations. The transverse shear stresses based on an efficient higher order plate theory (EHOPT, Cho and Parmerter, 1993) are utilized and modified, while the transverse normal stress is assumed to be the third-order polynomial of thickness coordinates, which satisfies both zero transverse shear stresses and prescribed surface tractions in top and bottom surfaces. On the other hand, the displacements are assumed to be those of the FSDT. Resulting strain energy expressions are referred to as an EFSDTM3D that stands for an enhanced first-order shear deformation theory based on the mixed formulation for three dimensional elasticity. The developed EFSDTM3D preserves the computational advantage of the classical FSDT while allowing for important local through-the-thickness variations of displacements and stresses through the recovery procedure that is based on the least square minimization of in-plane stresses. Comparisons of displacements and stresses of both laminated and sandwich plates using the present theory are made with the classical FSDT, three-dimensional exact solutions, and available data in the literature.

*Keywords : plate theory, composite plates, sandwich plates, transverse stresses*

### 1. 서 론

항공기를 비롯한 자동차 및 우주구조물 등에 쓰이는 고강도

경량 구조물들은 복합재료를 통해서 구현될 수 있기 때문에, 복합재료 평판의 정적, 동적 거동을 정확하고 효율적으로 예측하는 것이 중요한 문제가 되었다. 복합재료 평판과 샌드위치

\* 책임저자. 정회원 · 서울대학교 기계항공공학부 교수

Tel: 02-880-1645 ; Fax: 02-886-1693

E-mail: mhcho@snu.ac.kr

\* 펜실베이니아 주립대학교 박사후 연구원

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

평판의 거동은 일반 금속재 평판 구조물의 거동과는 다른 양상을 보인다. 특히, 샌드위치 평판의 경우 심재(foam core)에서 발생하는 큰 전단변형 때문에 그 거동이 일반적인 등방성 평판의 거동과 현격하게 다르다. 이러한 이유로 인하여 그 동안 많은 평판 이론들이 개발되어 왔다. 그 동안 개발된 평판 이론들은 크게 다항식 전개 고차 이론(smearred theories: Lo 등, 1977; Kant, 1982; Reddy, 1984; Pandya, 1988), 지그-재그 이론(zig-zag theories: DiSciuva, 1986, Cho 등, 1992, 1993), 그리고 층간세분화 이론(layerwise theories: Reddy, 1987; Carrera, 1998) 등으로 구분할 수 있다. 이러한 연구는 Noor 등(1989), Reddy 등(1994), 조광효(1994, 2002), 그리고 Carrera(2003) 등에 의해서 review가 행하여졌고 비교적 현재까지의 연구동향을 잘 묘사하고 있다. 본 논문에서는 여러 가지 평판 이론들 중에서도 고전적인 일차전단변형이론에 기초한 이론들에 대해서만 고찰하고 소개한다.

구조물 설계 단계에서의 응력해석은 다양한 변수에 대한 반복해석이 필수적이다. 따라서 전산 구조역학적 측면에서 최소한의 자유도를 가지면서도 정확하게 응력을 예측하는 것이 바람직하다. 가장 간단한 전단변형이론은 등방성 평판에 대하여 Reissner(1945) 그리고 Mindlin(1951)이 개발한 일차전단변형이론(FSDT)이다. 이 이론은 적절한 두께의 복합재료 평판의 전체적인 거동을 예측하는 데에는 적합하지만, 자세한 두께방향의 변위와 응력 분포를 예측하기에는 적합하지 않다. 그럼에도 불구하고, 일차전단변형이론은 이론의 간단함과 계산의 효율 때문에 현재 가장 널리 이용되고 있는 이론이다. 따라서 이 일차전단변형이론을 개선하려는 연구에 많은 노력들이 기울어져 왔다.

그중 한 방법으로는 적절한 전단 수정계수를 찾는 것이다(Whitney, 1972, 1973). Noor 등(1990)은 예측-보정법(Predictor-Corrector method)을 개발하였다. 이 방법은 일차전단변형이론을 시발점으로 미지수들을 구한 후 전단 변형 에너지를 보정함으로써 그리고 전단 응력을 평형 방정식의 면내 응력을 적분함으로써 얻어 정확한 응력 상태를 예측하는 방법이다. 또 다른 방법으로는, Cho 등(1996a)에 의해 개발된 후처리기 방법(Postprocess method)이 있다. 이는 일차전단 변형이론으로부터 구해진 회전각을 전단 변형 에너지 증가 식으로부터 효율적 고차이론(Cho 등, 1992, 1993)의 회전각과 관계를 구하고 고차이론의 면내변위로부터 수정된 응력들을 계산하는 방법이다. 이 방법은 후에 일반적인 적층배열을 가지는 복합재료 평판(Cho 등, 2001) 과 여러 가지 고차이론을 후처리기로 이용하는 방법(Kim 등, 1998), 그리고 유한요소법을 이용하는 방법(Cho 등, 1996b, 1997) 등으로 확장 적

용되었다.

전단 변형률을 개선함으로써 여러 종류의 일차전단변형이론 형태의 평판이론들이 개발되었다. KnightJr 등(1997)은 개선된 일차전단변형이론(refined FSDT)을 개발하였다. 그들은 효과적인 전단 응력과 변형률(effective stress and strain)을 도입함으로써 고전적인 일차전단변형이론의 전단 변형률을 개선하였다. Sutyrin(1997)은 점근적으로 정확한 전단변형이론을 제시하였다. 이 방법은 제안된 이론이 수학적으로 타당하다는 장점을 가지는 반면 너무 복잡하다는 단점을 가지고 있다. Yu 등(2002)은 변분적-점근해석(variational-asymptotic) 기법에 기초해서 비선형 "Reissner-Like" 평판 이론을 개발하였다. 그들은 VAPAS(variational asymptotic plate and shell analysis)라 명명되는 프로그램을 개발하였다. 이는 변분적인-점근해석 방법의 복잡함을 일차원 두께 방향 유한요소 해석을 통해서 극복한 것이다. 최근 Yu(2005)는 이 기법으로 최대한의 자유도를 가지는 점근적으로 정확한 변형에너지를 유도하였다. Kim 등(2005)은 고전적인 일차전단변형이론의 정의에 기초해서 강화된 일차전단변형이론(EFSDT, enhanced first-order shear deformation theory)을 개발하였다. 최소소차자승법을 이용하여 고전적인 일차전단변형이론의 변위들과 3차원 탄성론에 기초한 변위들 사이의 관계식을 구하였다. 이 이론은 변형에너지를 최소화하는 방법으로 확장 적용되었다(Kim, 2004; Kim 등, 2006).

본 연구에서는 3차원 탄성론에 기반을 둔 혼합변분이론에 기초한 강화된 일차전단변형이론(EFSDTM3D: enhanced first-order shear deformation theory based on the mixed formulation for three dimensional elasticity)을 개발하였다. 계산되어진 변위들과 응력들은 체계적인 과정을 거쳐 3차원 상태의 변위들과 응력들로 복원된다. 이 복원과정은 저차들에 의하여 개발되었으며, 이에 따라 계산된 횡방향 응력들은 평판의 윗면과 아랫면에서의 응력상태와 3차원 평형 방정식들을 모두 만족한다. 또한 변형에너지에 3차원 효과를 고려하였다. 면내 응력들의 계산에 있어 특정 경우에 횡방향 수직응력을 무시할 수 없음을 예를 통하여 고찰하였다. 본 연구의 효율성과 정확성의 검증을 위하여 3차원 원통형 복합재료 평판 및 샌드위치 평판 문제를 고려하였다. 계산된 결과는 고전적인 FSDT, 3차원 탄성해, 그리고 참고문헌 중에서 비교 가능한 결과들과 비교, 검증하였다.

## 2. 혼합변분이론

단사정 물성치(monoclinic material property)를 가지는 두께  $h$ 의 복합재료 적층 평판을 고려하였다(그림 1). 특

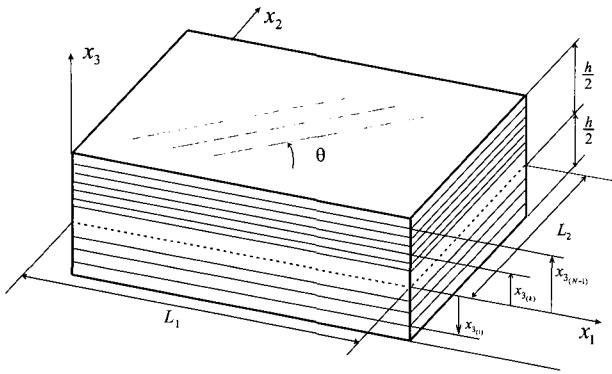


그림 1 복합재료 평판의 형상 및 좌표계

별히 지정되지 않는다면, 식의 전개 과정에서 Greek indices는 1,2를 가리키며, Latin indices는 1,2,3을 나타낸다. 평판의 기준면은 좌표축  $x_1, x_2$ 로 표현되며, 두께방향 위치는  $x_3$ 으로 나타내어진다. 3차원 구성 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad \epsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (1)$$

여기서,  $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ , 그리고  $u_i$ 는 각각 응력 텐서, 변형률 텐서, 그리고 변위들을 나타낸다.  $C_{ijkl}$ 는 단사정 물성치를 가지는 탄성 텐서이다. 하첨자( ),  $i$ 는  $x_i$  좌표에 관한 미분을 표시한다.

Hellinger-Reissner 범함수(functional)는 주어진 정적 문제에 대해 다음과 같이 표현된다(Reissner, 1986).

$$\Pi_R = \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{+h/2} [\sigma_{ij} \epsilon_{ij} - W_c(\sigma_{ij})] dx_3 d\Omega - \int_{\Omega} q^{\pm} u_3 d\Omega, \quad (2)$$

여기서,  $\Omega$ 는 평판의 기준면을,  $\Omega^{\pm}$ 는 평판의 윗면과 아랫면을, 그리고  $W_c(\sigma_{ij})$ 는 보족에너지밀도함수(complementary energy density function)이다. 상첨자( ) $^{\pm}$ 는 평판의 윗면과 아랫면을 가리킨다.

변형률과 면내 응력들은 변위들과 횡방향 응력들로만 표현되어질 수 있다(Tarn 등, 1997). 이렇게 해서 변위들( $u_i$ )과 횡방향 응력들( $\sigma_{\beta 3}$ )만 변분을 취하게 된다. 식 (1)을 식 (2)에 대입하고 변분을 취하면 다음의 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \delta \Pi_R = & \int_{\Omega} \langle \sigma_{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha 3} \delta \gamma_{\alpha 3} + \sigma_{33} \delta \epsilon_{33} \rangle d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \langle (\gamma_{\alpha 3} - \gamma_{\alpha 3}^*) \delta \sigma_{\alpha 3} + (\epsilon_{33} - \epsilon_{33}^*) \delta \sigma_{33} \rangle d\Omega \\ & - \int_{\Omega} q^{\pm} \delta u_3 d\Omega, \end{aligned} \quad (3)$$

여기서,

$$\langle \cdot \rangle \equiv \int_{-h/2}^{+h/2} \cdot dx_3, \quad (4)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{2D} + \overline{C}_{\alpha\beta 33} \sigma_{33}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{2D} = Q_{\alpha\beta\gamma\omega} \epsilon_{\gamma\omega}, \quad (5)$$

$$Q_{\alpha\beta\gamma\omega} = C_{\alpha\beta\gamma\omega} - \frac{C_{\alpha\beta 33} C_{\gamma\omega 33}}{C_{3333}}, \quad \overline{C}_{\alpha\beta 33} = \frac{C_{\alpha\beta 33}}{C_{3333}}, \quad (6)$$

그리고 보족에너지밀도함수,  $W_c(\sigma_{ij})$ ,로부터 유래된 횡방향 변형률들은 다음과 같이 주어진다.

$$\gamma_{\alpha 3}^* = S_{\alpha 3\beta 3} \sigma_{\beta 3}, \quad S_{\alpha 3\beta 3} = C_{\alpha 3\beta 3}^{-1}, \quad (7)$$

$$\epsilon_{33}^* = \frac{1}{C_{3333}} (\sigma_{33} - C_{33\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta}). \quad (8)$$

또한 식 (3)은 다음의 경계조건을 내포하고 있다.

$$[\sigma_{\alpha 3}, \sigma_{33}] = [0, q^{\pm}] \text{ on } \Omega^{\pm}, \quad (9)$$

즉, 평판의 윗면과 아랫면에서 횡방향 전단응력과 수직응력이 기술된(prescribed) 응력상태를 만족해야 한다는 것이다.

### 3. 가정된 횡방향 전단응력 및 수직응력

이 장에서는 혼합변분이론에 사용되어질 횡방향 전단응력( $\sigma_{\alpha 3}$ ) 및 수직응력( $\sigma_{33}$ )을 효율적인 고차이론과 3차 다항식으로부터 각각 유도되어진다.

#### 3.1. 횡방향 전단응력

횡방향 전단응력은 효율적인 고차이론(Cho 등, 1992, 1993)으로부터 유도 되어 진다. 이 이론에서 유래된 변위장은 횡방향 전단응력이 평판의 윗면과 아랫면에서 기술된 응력을 만족한다는 조건과 복합재료의 각 층(layer)에서 연속으로 변한다는 조건을 모두 만족한다. 이러한 변위장은 두께 방향으로의 3차 다항식과 선형 지그-재그(zig-zag)함수를 함께 고려함으로써 구할 수 있다.

위에 기술한 변위장은 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$u_{\alpha}(x_i) = u_{\alpha}^0 + x_3 \psi_{\alpha} + x_3^2 \xi_{\alpha} + x_3^3 \phi_{\alpha} + \sum_{k=1}^{N-1} S_{\alpha}^{(k)}(x_3 - x_{3(k)}) H(x_3 - x_{3(k)}), \quad (10a)$$

$$u_3(x_i) = u_3^0, \quad (10b)$$

여기서, 상첨자( ) $^0$ 는 기준면에서의 변수를 나타내고,  $N$

은 복합재료의 적층수, 그리고  $H$ 는 단위 계단(Heaviside unit step) 함수이다.

평판의 아랫면과 윗면에서의 무전단 응력조건을 적용하면 다음과 같은 식들을 얻을 수 있다.

$$\gamma_{\alpha 3}^+ = \phi_\alpha + u_{3,\alpha}^o + h\xi_\alpha + \frac{3h^2}{4}\phi_\alpha + \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^{(k)} = 0, \quad (11a)$$

$$\gamma_{\alpha 3}^- = \phi_\alpha + u_{3,\alpha}^o - h\xi_\alpha + \frac{3h^2}{4}\phi_\alpha = 0. \quad (11b)$$

위 식을 풀면 다음의 관계식을 얻는다.

$$\phi_\alpha + u_{3,\alpha}^o = -\frac{3h^2}{4}\phi_\alpha - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^{(k)}, \quad (12a)$$

$$\xi_\alpha = -\frac{1}{2h}\sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^{(k)}. \quad (12b)$$

이제 식 (12)을 이용하여 횡방향 전단 변형률을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha 3} &= 3\left(x_3^2 - \frac{h^2}{4}\right)\phi_\alpha \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^{(k)} \left[ -\frac{1}{2} - \frac{x_3}{h} + H(x_3 - x_{3(k)}) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,  $S_\alpha^{(k)}$ 는 각 층에서의 기울기의 변화를 나타내며, 횡방향 전단 강성계수의 함수이다. 그 값은 횡방향 전단응력의 연속조건으로부터 구할 수 있다.

$$\sigma_{\alpha 3}^{(k)} \Big|_{x_3=x_{3(k)}} = \sigma_{\alpha 3}^{(k+1)} \Big|_{x_3=x_{3(k)}}, \quad (k=1, 2, \dots, N-1). \quad (14)$$

위의 식으로부터,  $2(N-1)$ 개의 선형 연립방정식을 얻을 수 있고, 이 연립방정식으로부터  $S_\alpha^{(k)}$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$S_\alpha^{(k)} = a_{\alpha\beta}^{(k)} \phi_\beta, \quad (15)$$

여기서,  $a_{\alpha\beta}^{(k)}$ 는 복합재료 물성치와 두께만의 함수이다.

식 (15)을 식 (13)에 대입하면, 횡방향 전단 변형률은 다음과 같이 표현된다.

$$\gamma_{\alpha 3} = \Phi_{\alpha\beta}^s \phi_\beta, \quad (16)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta}^s(x_3) &= 3\left(x_3^2 - \frac{h^2}{4}\right)\delta_{\alpha\beta} \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} a_{\alpha\beta}^{(k)} \left[ -\frac{1}{2} - \frac{x_3}{h} + H(x_3 - x_{3(k)}) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

이 식에서,  $\delta_{\alpha\beta}$ 는 크로네커 델타(Kronecker delta) 함수이다.

혼합변분이론에 사용되어질 횡방향 전단응력( $\sigma_{\alpha\beta}$ )과 보족에너지 밀도함수로부터 유도된 전단변형률( $\gamma_{\alpha\beta}^*$ )은 최종적으로 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\beta\beta} \Phi_{\beta\lambda}^s \phi_\lambda, \quad (18a)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}^* = S_{\alpha\beta\beta\beta} \sigma_{\beta\beta} = \Phi_{\alpha\beta}^s \phi_\beta. \quad (18b)$$

### 3.2 횡방향 수직응력

횡방향 수직응력은 경계면에서의 연속조건과 평판의 윗면과 아랫면에서의 기술된 응력상태를 만족하여야 한다. 또한 횡방향 3차원 평형방정식을 만족하여야 한다. 이 조건들은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma_{33}^\pm = q^\pm, \quad \sigma_{33,3}^\pm = 0. \quad (19)$$

식 (19)에서 두 번째 항은 평판의 윗면과 아랫면에서의 무(zero) 전단응력상태로부터 유래한다. 횡방향 응력들은 다음의 3차원 평형방정식을 만족해야하기 때문이다.

$$\sigma_{33,3} = -\sigma_{\alpha 3,\alpha}. \quad (20)$$

식 (19)에서 주어진 4개의 조건식을 모두 만족하기 위하여 횡방향 수직응력을 3차 다항식으로 다음과 같이 가정하였다.

$$\sigma_{33} = t_0 + t_1 x_3 + t_2 x_3^2 + t_3 x_3^3. \quad (21)$$

식 (21)에 식 (19)을 적용하면, 다음과 같은 수직응력 분포를 얻을 수 있다.

$$\sigma_{33} = \left( \frac{1}{2} + \frac{3x_3}{2h} - \frac{2x_3^3}{h^3} \right) q^+ + \left( \frac{1}{2} - \frac{3x_3}{2h} + \frac{2x_3^3}{h^3} \right) q^-. \quad (22)$$

여기에서 주의할 점은 식 (22)의 횡방향 수직응력은 주요 종속 변수를 포함하고 있지 않다. 따라서 식 (3)에서 횡방향 수직응력의 변분은 영이 된다. 결과적으로 식 (22)에 주어진 가정된 횡방향 수직응력은 식 (5)에 주어진 면내 응력에만 영향을 주게 된다. 자세한 수식 전개는 다음 장에서 다루어질 것이다.

## 4. 개선된 일차전단변형이론

제4장에서는 개선된 일차전단변형이론(EFSDTM3D)을 앞장에서 유도된 횡방향 응력들을 이용하여 혼합변분이론으로써

터 유도한다. EFSDTM3D의 평형방정식과 경계조건, 그리고 3차원 응력상태의 복원 과정이 유도되어진다.

#### 4.1 평형방정식 및 경계조건

혼합변분이론에서 변위장은 고전적인 일차전단변형이론(Reissner, 1945; Mindlin, 1951)의 변위장과 같다고 가정되었다. 가정된 변위장은 다음과 같다.

$$u_\alpha^f = u_\alpha^{fo} + \theta_\alpha x_3, \quad u_3^f = u_3^{fo}. \quad (23)$$

이렇게 해서 혼합변분이론에서 필요한 횡방향 응력들과 변위들을 모두 얻었다. 식 (23)을 식 (3)에 대입하고 정리하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\delta \Pi_R = (N_{\alpha\beta}^f \delta + N_{\alpha\beta}^{3D}) \delta u_{\alpha,\beta}^{fo} + (M_{\alpha\beta}^f + M_{\alpha\beta}^{3D}) \delta \theta_{\alpha,\beta} + Q_\alpha \delta (\theta_\alpha + u_{3,\alpha}^{fo}) - q^\circ \delta u_3^{fo} = 0, \quad (24)$$

여기서

$$\delta \Pi_R = \int_\Omega \delta \Pi_R d\Omega, \quad (25)$$

그리고

$$q^\circ = q^+ - q^-, \quad (26)$$

$$[N_{\alpha\beta}^f, M_{\alpha\beta}^f] = \langle \bar{\sigma}_{\alpha\beta 2\nu} [1, x_3] \rangle, \quad Q_\alpha = \langle \sigma_{\alpha 3} \rangle \quad (27)$$

$$[N_{\alpha\beta}^{3D}, M_{\alpha\beta}^{3D}] = \langle \bar{C}_{\alpha\beta 33} \sigma_{33} [1, x_3] \rangle. \quad (28)$$

식 (24)에 대한 구속방정식은 다음과 같다.

$$\langle (\bar{\gamma}_{\alpha 3} - \gamma_{\alpha 3}^*) \delta \sigma_{\alpha 3} \rangle = 0, \quad (29)$$

여기서,  $\bar{\gamma}_{\alpha 3} = \theta_\alpha + u_{3,\alpha}^{fo}$ .

식 (27)에 정의되어있는 횡방향 전단력  $Q_\alpha$ 은 식 (18)을 고려하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Q_\alpha = \langle C_{\alpha 3 \gamma \beta} \Phi_{\gamma \beta}^s \rangle \phi_\beta, \quad (30)$$

이 식에서 횡방향 전단응력 변수  $\phi_\beta$ 는 식 (29)에 주어진 구속방정식을 이용하여 변위들의 함수로 표시할 수 있다. 식 (29)에 식 (18)을 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\langle C_{\lambda 3 \gamma \beta} \Phi_{\gamma \alpha}^s \rangle \bar{\gamma}_{\alpha 3} = \langle \Phi_{\lambda \alpha}^s C_{\alpha 3 \gamma \beta} \Phi_{\gamma \beta}^s \rangle \phi_\beta, \quad (31)$$

이 식으로부터 다음의 식을 얻는다.

$$\phi_\beta = \Gamma_{\beta \alpha} \bar{\gamma}_{\alpha 3}, \quad (32)$$

여기서

$$\Gamma_{\beta \alpha} = \langle \Phi_{\lambda \alpha}^s C_{\alpha 3 \gamma \beta} \Phi_{\gamma \beta}^s \rangle^{-1} \langle C_{\lambda 3 \gamma \beta} \Phi_{\gamma \alpha}^s \rangle. \quad (33)$$

식 (32)을 식 (30)에 대입하면 최종적으로 횡방향 전단력을 가정된 변위들의 함수로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Q_\alpha = \bar{G}_{\alpha 3 \beta} \bar{\gamma}_{\beta 3}, \quad (34a)$$

여기서

$$\bar{G}_{\alpha 3 \beta} = \langle C_{\alpha 3 \gamma \beta} \Phi_{\gamma \omega}^s \rangle \Gamma_{\omega \beta}. \quad (34b)$$

식 (24)로부터 혼합변분이론에 기초한 강화된 일차전단변형이론의 평형방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\delta u_\alpha^{fo}: (N_{\alpha\beta}^f + N_{\alpha\beta}^{3D})_{,\beta} = 0, \quad (35a)$$

$$\delta \theta_\alpha: (M_{\alpha\beta}^f + M_{\alpha\beta}^{3D})_{,\beta} - Q_\alpha = 0, \quad (35b)$$

$$\delta u_3^{fo}: Q_{\alpha,\alpha} = -q^\circ, \quad (35c)$$

그리고 상응하는 경계조건들은 다음과 같다.

$$\delta u_\alpha^{fo} = 0 \quad \text{or} \quad (N_{\alpha\beta}^f + N_{\alpha\beta}^{3D}) \nu_\beta = 0,$$

$$\delta \theta_\alpha = 0 \quad \text{or} \quad (M_{\alpha\beta}^f + M_{\alpha\beta}^{3D}) \nu_\beta = 0, \quad (36)$$

$$\delta u_3^{fo} = 0 \quad \text{or} \quad Q_\alpha \nu_\alpha = 0.$$

식 (35)에서  $N_{\alpha\beta}^{3D}$ ,  $M_{\alpha\beta}^{3D}$ , 그리고  $Q_\alpha$ 를 제외한 나머지 항들은 통상적인 일차전단변형이론의 것들과 일치함을 알 수 있다. 따라서 전단력과 횡방향 수직응력의 영향이 작은 경우에는 FSDT와 같은 해를 가진다.

#### 4.2. 변위 및 응력의 복원

두께 방향으로의 응력분포를 정확하게 예측하는 것은 중요한 문제이다. 3장 1절에서 소개한 효율적인 고차이론(EHOPT)의 변위장을 후처리기로 사용함으로써 응력분포를 보다 정확하게 예측할 수 있다. 이것은 EHOPT 변위장의 변수들을 본 논문에서 유도한 EFSDTM3D로 변수들로 표현함으로써 가능하다.

일반적인 3차원 변위장은 다음과 같이 Kirchhoff-Love 변위장에 워핑함수(warping function)를 중첩함으로써 표현될 수 있다.

$$u_\alpha(x_i) = u_\alpha^o - x_3 u_{3,\alpha}^o + W_\alpha(x_i), \quad (37a)$$

$$u_3(x_i) = u_3^o + W_3(x_i), \quad (37b)$$

여기서 면내 워핑함수는 식 (10)에 식 (11)과 식 (32)를

대입하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$W_a(x_i) = \Phi_{a\beta}^e(x_3) \Gamma_{\beta\mu} \bar{\gamma}_{\mu 3}(x_a) + w_a(x_a) \quad (38a)$$

$$\Phi_{a\beta}^e(x_3) = \left( x_3^3 - \frac{3h^2}{4} x_3 \right) \delta_{a\beta} + \sum_{k=1}^{N-1} a_{a\beta}^{(k)} \left[ -\frac{x_3}{h} - \frac{x_3^2}{2h} + (x_3 - x_{3(k)}) H(x_3 - x_{3(k)}) \right]. \quad (38b)$$

반면에 면외 워핑함수는 식 (8)을 적분함으로써 얻을 수 있다.

$$W_3(x_i) = \int_{-h/2}^{x_3} \frac{1}{C_{3333}} (\sigma_{33} - C_{33a\beta} \sigma_{a\beta}) dx_3 + w_3(x_a). \quad (39)$$

식 (38a)와 (39)에서 워핑 보정함수들(warping correction function,  $w_i$ )은 다음을 만족한다는 조건으로부터 구할 수 있다.

$$\langle W_a(x_i) \rangle = c_a, \quad (40a)$$

$$\langle W_3(x_i) \rangle = 0, \quad (40b)$$

여기서 식 (40a)에서의  $c_a$ 는 면내보정함수이며, 이것을 구하는 방법은 나중에 다루어진다.

고전적인 일차전단변형이론에서의 평균 변위의 정의와 식 (40)을 이용하면 강화된 일차전단변형이론의 변수들만으로 표현 할 수 있다. 평균 변위의 정의는 다음과 같다.

$$u_i^{fo} = \frac{1}{h} \langle u_i \rangle, \quad (41)$$

이식으로부터 다음의 식을 얻는다.

$$u_a^o = u_a^{fo} - \frac{1}{h} c_a, \quad u_3^o = u_3^{fo}. \quad (42)$$

식 (42)을 식 (37)에 대입하면 3차원 변위장은 다음과 같이 회복될 수 있다.

$$u_a(x_i) = u_a^{fo} - x_3 u_{3,a}^{fo} - \frac{1}{h} c_a + W_a(x_i), \quad (43a)$$

$$u_3(x_i) = u_3^{fo} + W_3(x_i). \quad (43b)$$

3차원 응력상태를 복원하기 위해서는 식 (5)에 보듯이 횡방향 수직응력과 2차원 면내응력들을 먼저 계산하여야한다. 2차원 면내응력들은 식 (5)에 식 (37)을 대입하여 얻는다.

$$\sigma_{a\beta}^{2D} = Q_{a\beta\gamma\omega} (u_{\gamma,\omega} + u_{\omega,\gamma})/2, \quad (44)$$

그리고 횡방향 수직응력은 식 (22)로부터 계산할 수도 있

지만 평형방정식을 이용하는 것이 보다 정확한 값을 제공함으로써 식 (18a)와 식 (32)를 이용하여 다음과 같이 3차원 평형방정식을 적분함으로써 얻는다.

$$\sigma_{33}^e = - \int_{-h/2}^{x_3} \sigma_{a3,a}^c dx_3 + q^-, \quad (45)$$

여기서 상첨자  $e$ 와  $c$ 는 각각 평형방정식을 이용하여 구한 값과 구성방정식을 이용하여 구한 값을 나타낸다. 또한 식 (45)는 윗면에서의 응력조건( $\sigma_{33}^{e+} = q^+$ )을 만족함을 식 (35c)를 통해 알 수 있다.

이제 식 (44)에 주어진 면내응력들과 식 (45)에서 계산된 횡방향 수직응력을 이용하여 3차원 면내응력들을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\sigma_{a\beta} = \sigma_{a\beta}^{2D}(\bar{c}) + \bar{C}_{a\beta 33} \sigma_{33}^e, \quad (46)$$

여기서

$$\bar{c} = [c_{1,1} \ c_{2,2} \ (c_{1,2} + c_{2,1})]^T, \quad (47)$$

이 식은 면내보정벡터이다. 그리고 그 값은 일차전단변형이론에 의한 면내응력들과 식 (46)에 주어진 면내응력들 사이의 오차를 최소화함으로써 구할 수 있다. 면내응력들의 차이에 대한 최소오차지승법은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\langle \min_{\bar{c}} \left\| \sigma_{a\beta}(\bar{c}) - \sigma_{a\beta}(u_{a,\beta}^f) \right\|_2^2 \rangle = 0. \quad (48)$$

이 식에 대한 유도는 참고문헌(Kim, 2004; Kim과 Cho, 2006)에서 찾을 수 있다.

횡방향 전단응력들은 식 (46)에 주어진 3차원 면내응력들을 이용하여 3차원 평형방정식을 적분하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma_{a3}^e = - \int_{-h/2}^{x_3} \sigma_{a\beta,\beta} dx_3, \quad (49)$$

얻어진 횡방향 전단응력들( $\sigma_{a3}^e$ )은 평판의 윗면과 아랫면에서의 무전단응력조건( $\sigma_{a3}^{e\pm} = 0$ )을 만족함을 식 (48)과 식 (35a)을 통해서 알 수 있다.

지금까지 계산된 3차원 면내응력들과 3차원 횡방향 응력들은 다음의 3차원 평형방정식들을 만족함을 보였다.

$$\sigma_{a\beta,\beta} + \sigma_{a3,3}^e = 0, \quad (50a)$$

$$\sigma_{a3,a}^c + \sigma_{33,3}^e = 0. \quad (50b)$$

본 논문에서 개발한 EFSDTM3D로부터 3차원 변위들과 응력들을 계산하는 흐름도가 그림 2에 주어졌다.

Calculation of coefficients from material properties

주어진 layup에서 고차이론에서 사용되어지는 계수  $\alpha_{\alpha\beta}^{(k)}$  를 계산

전단변형을 관계식과 면내보정벡터를 계산  $\Gamma_{\alpha\beta}, \tilde{c}$

2D Plate Analysis

개선된 일차전단변형이론 (EFSDTM3D  $\phi_\alpha = \Gamma_{\alpha\beta} \tilde{y}_\beta$ )

FEM or 해석해:  $u_i^{fo}, \theta_\alpha$  를 구함

3D Recovery: Displacements

$$u_\alpha = u_\alpha^o - x_3 u_{3,\alpha}^o + W_\alpha$$

$$u_3 = u_3^o + W_3$$

3D Recovery: Stresses

$$\sigma_{33}^e = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3, \alpha}^c dx_3 + q^-$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^e = \sigma_{\alpha\beta}^{2D} + C_{\alpha\beta 33} \sigma_{33}^e$$

$$\sigma_{\alpha 3}^e = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3, \beta}^c dx_3$$

그림 2 3차원 변위들과 응력들을 회복하는 방법의 계산 흐름도

### 5. 결과 및 고찰

본 논문에서 개발한 이론(EFSDTM3D)을 검증하기 위하여 다수의 복합재료 적층평판과 샌드위치 평판들을 해석하였고, 그 결과들을 3차원 탄성해 및 참고문헌에서 이용 가능한 결과들과 비교하였다. Pagano(1970)가 제시한 원통형 굽힘(cylindrical bending) 복합재료 평판(그림 3)에 대한 3차원 탄성해를 벤치마크 해(benchmark solution)로 사용하였다.

복합재료 적층평판에서의 각층의 물성치(ply material properties)는 다음과 같다.

$$E_L = 172.4 \text{ GPa}, E_T = 6.9 \text{ GPa},$$

$$G_{LT} = 3.45 \text{ GPa}, \nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25, \quad (51)$$

여기서 하첨자  $L$ 는 화이버(fiber) 방향의 물성치를 나타내고 하첨자  $T$ 는 화이버에 수직인 방향의 물성치를 나타낸다.

샌드위치 평판에서의 면재의 물성치는 식 (51)과 같고 심재의 물성치는 다음과 같이 가정하였다.

$$E_1 = 0.1 \text{ GPa}, G_{12} = 0.04 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.25,$$

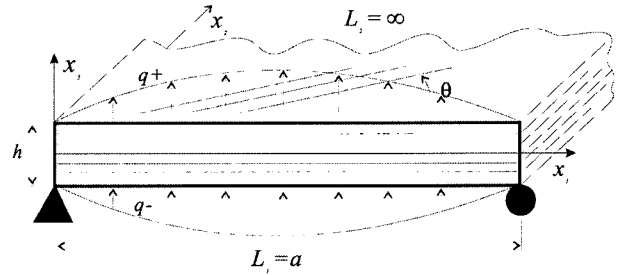


그림 3 원통형 단순지지 복합재료 적층평판의 형상

$$E_2 = E_3 = E_1, G_{23} = G_{13} = G_{12}, \nu_{23} = \nu_{13} = \nu_{12}. \quad (52)$$

모든 수치에 대하여 단순지지 경계조건을 부과 하였고, 하중은 다음과 같이 가정하였다.

$$q^\pm = \pm \frac{q_o}{2} \sin\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right), \quad (53)$$

그리고 강화된 일차전단변형이론의 변수들은 다음과 같은 형태를 가정하였다.

$$[u_\alpha^{fo}, \theta_\alpha] = [U_\alpha, \Theta_\alpha] \cos\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right), \quad (54)$$

$$u_3^{fo} = U_3 \sin\left(\frac{\pi x_1}{L_1}\right).$$

계산된 변위들과 응력들은 다음과 같이 무차원화 되었다.

$$\hat{u}_\alpha = \frac{100 E_T}{q^o h S^3} u_\alpha, \quad \hat{u}_3 = \frac{100 E_T}{q^o h S^4} u_3, \quad \hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{q^o} \sigma_{ij} \quad (55)$$

여기서  $S = L_1/h$ .

수치 결과들은 여러 가지 이론들에 의한 결과들과 비교하였으며, 비교에 사용된 이론들은 표 1에 정리되어 있다. 고전적인 일차전단변형이론(FSDT)에서 전단수정계수(shear correction factor)는 5/6을 사용하였다. EFSDTM은 본 이론(EFSDTM3D)의 평형방정식, 식 (35a)와 식 (35b)에

표 1 비교에 이용한 전단변형이론들

참고문헌	이론	자유도
현재이론	EFSDTM3D	5 (C <sup>o</sup> ,5)
현재이론	EFSDTM	5 (C <sup>o</sup> ,5)
Kim 등(2006)	EFSDT	5 (C <sup>o</sup> ,5)
Whintey 등(1970)	FSDT	5 (C <sup>o</sup> ,5)
Yu(2005)	VAPAS	5 (C <sup>o</sup> ,5)
Cho 등(1993)	EHOPT	5 (C <sup>1</sup> ,7)
Pandya 등(1988)	HSST	9 (C <sup>1</sup> ,9)
Carrera(1999)	Mli	9 (C <sup>o</sup> ,9)
Lo 등(1977)	LCW	11 (C <sup>o</sup> ,11)

서  $N_{\alpha\beta}^{3D}$ 과  $M_{\alpha\beta}^{3D}$ 을 무시함으로써 얻은 이론이다. 그림에서 보여줄 횡방향 응력들은 모두 3차원 평형방정식을 두께방향으로 적분하여 계산한 값들이다.

5.1. 최대 기준면 처짐의 수렴 및 비교

복합재료 적층평판의 두께 비에 따른 최대 기준면 처짐 백분율 오차를 준 직교대칭(a) 및 각대칭(b) 적층평판에 대하여 그림 4에 나타내었다. 각 이론들이 주는 값의 차이들은 두께비(S) 50 근처에서 비슷한 값들을 보여주고 있지만, S가 10에 접근함에 따라 그 차이가 급격하게 벌어짐을 알 수 있다. 그림 4에서 보듯이 준 직교대칭 적층평판에서는 EFSDT가 정확하며, 각대칭 적층평판에서는 EFSDT3D가 가장 정확하게 최대 처짐을 예측함을 알 수 있다. 특히, 자유도가 더 많은 HSDT에 비해서도 본 논문에서 개발한 EFSDT3D가 보다 정확한 값을 주고 있다.

샌드위치 평판은 전단력에 매우 약한 심재 재질에 의한 심한 전단변형 때문에 변형과 응력을 정확히 예측하기 매우 어려운 문제이다. 그림 5는 준 직교적층 샌드위치 평판과 엇각적층 샌드위치 평판의 두께 비에 따른 최대 기준면 처짐의 백분율 오차를 보여주고 있다. 그림 5(a)에 보듯이 고전적인 FSDT와 HSDT에 의한 최대 처짐 예측들은 심한 오차를 보여주고 있다. 두께가 매우 얇은 경우(S=100)에도 FSDT는 14%의 오차를 HSDT는 6%의 오차를 보여주고 있다. 엇각적층 샌드위치 평판의 경우에는 준 직교적층 샌드위치 평판에 비해서는 수렴의 정도가 빠르지만 평판의 두께비가 작은 경우에는 큰 오차를 보여주고 있다. 반면에 현재의 EFSDT3D는 다양한 두께비에 대하여 3차원 탄성해와 비교할 만한 결과를 주고 있다.

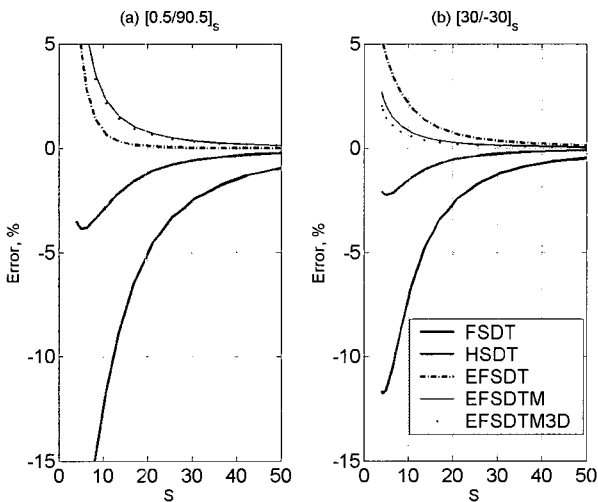


그림 4 복합재료 적층평판의 최대 기준면 처짐 백분율 오차; (a) [0.5/90.5]s plate, (b) [30/-30]s plate

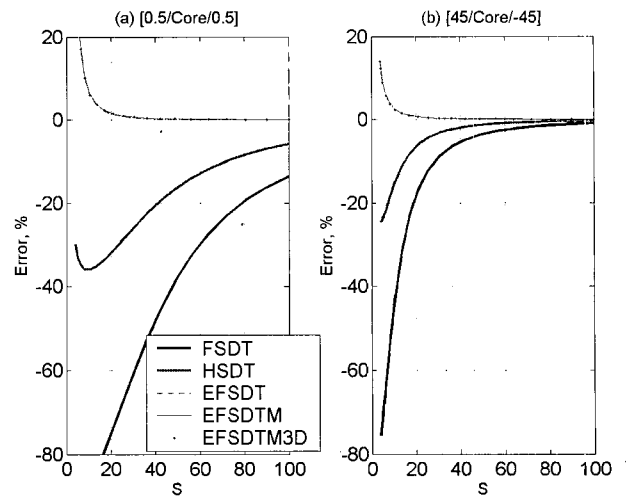


그림 5 샌드위치 평판의 최대 기준면 처짐 백분율 오차; (a) [0.5/Core/0.5] plate, (b) [45/Core/-45] plate

표 2 직교적층배열을 가지는 평판의 최대 기준면 처짐의 비교

	[0/90/0]		[0/90/0/90]	
	S=4	S=6	S=4	S=6
Exact 3D	2.887	1.635	4.181	2.556
EFSDTM3D	3.263	1.733	3.901	2.359
EFSDTM	3.273	1.738	3.920	2.367
EFSDT	3.226	1.717	4.336	2.552
FSDT	2.409	1.354	3.296	2.090
EHOPT	-	-	4.083	2.501
M1i	2.904	1.634	3.300	2.095
HSDT	2.706	1.520	3.623	2.251
LCW	2.687	1.514	3.587	2.242

매우 두꺼운 직교 적층평판의 최대 기준면 처짐을 다른 이론들과 함께 표 2에서 비교하였다. M1i와 LCW의 값들은 참고문헌(Carrera, 1999)을 참고 하였다. 정확도와 자유도수(표 1 참조)를 고려했을 때 EFSDT가 가장 좋은 성능을 보여주고 있고, 다음으로 EFSDT3D가 좋은 성능을 보여주고 있음을 알 수 있다. 뒤에 예시 되겠지만 EFSDT는 횡방향 수직응력이 평판의 윗면과 아랫면에서 정확하게 만족하지 못하는 단점을 가지고 있다.

5.2. 적층평판의 변위와 응력의 두께방향 분포

그림 6~8에는 두께비(S) 4의 두꺼운 준 직교대칭 적층평판(0.5/90.5/90.5/0.5)에 대한 변위와 응력들의 두께방향 분포를 보여주고 있다. 그림 6에서 보듯이 면내변위의 두께방향으로의 지그-재그 분포를 EFSDT, EFSDTM3D, 그리고 HSDT는 비교적 잘 묘사하고 있지만, FSDT는 그런 변



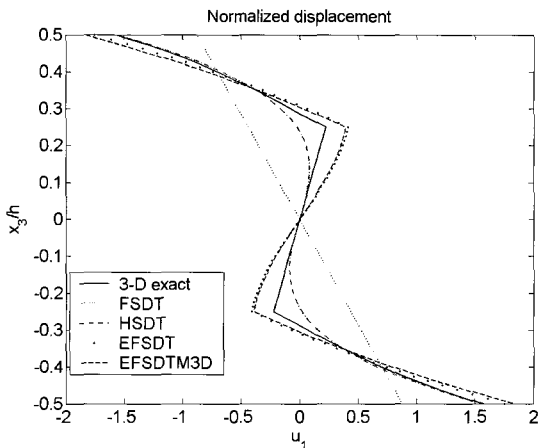


그림 6 복합재료 준 직교적층 평판에서 면내변위의 두께방향 분포, (0.5/90.5/90.5/0.5), S=4

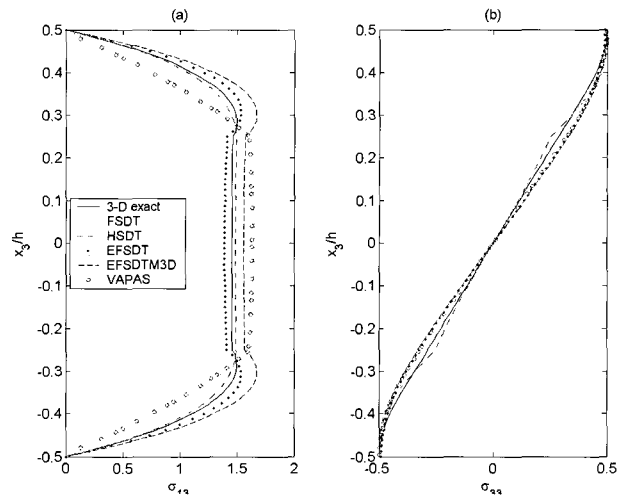


그림 8 복합재료 준 직교대칭 적층평판에서 횡방향 응력들의 두께방향 분포, (0.5/90.5)s, S=4: (a)  $\hat{\sigma}_{13}$ , (b)  $\hat{\sigma}_{33}$

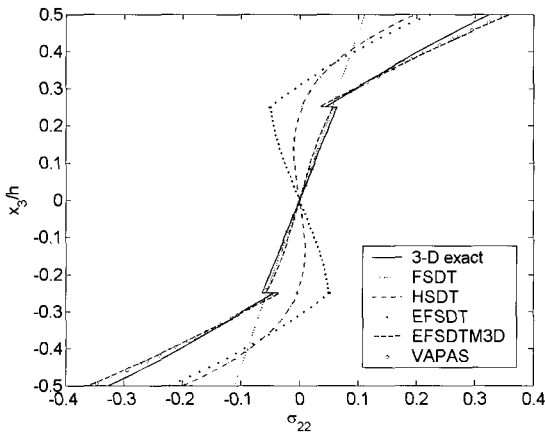


그림 7 복합재료 준 직교적층 평판에서의 면내응력의 두께방향 분포, (0.5/90.5/90.5/0.5), S=4

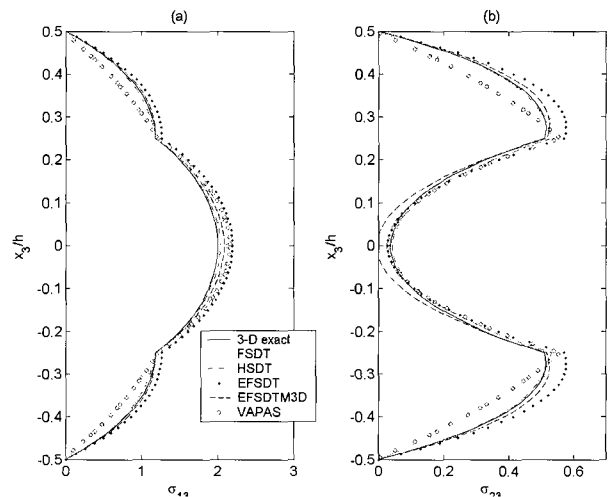


그림 9 복합재료 각대칭 적층평판에서 횡방향 전단응력의 두께방향 분포, (30/-30)s, S=4: (a)  $\hat{\sigma}_{13}$ , (b)  $\hat{\sigma}_{23}$

화를 잘 표현하지 못함을 알 수 있다. 면내응력  $\sigma_{22}$ 의 두께 방향의 분포는 매우 흥미로운 변화를 보여주고 있다(그림 7). FSDT, HSDT, 그리고 EFSDT는 평판 두께의 중간부에서 정확한 해를 제공하지 못한다. 반면에 EFSDTM3D와 VAPAS는 3차원 탄성해에 아주 가까운 두께방향 분포를 보여주고 있다. 이 이론들의 차이는 면내응력의 계산에 있어 3차원 구성방정식의 사용에 있다. 이것의 이유는 원통형 단 순지지 굽힘 문제에 있어 면내응력  $\sigma_{22}$ 은 횡방향 수직응력에 의한 푸아송 효과(poisson effect)가 면내응력  $\sigma_{11}$ 에 의한 푸아송 효과보다 매우 크기 때문이다. 따라서 일반적인 경우에 면내응력 계산 시에 3차원 구성방정식(즉, 횡방향 수직 응력의 고려하는 것이) 사용하는 것이 바람직하다. 그림 8에서는 횡방향 전단응력과 수직응력의 분포를 보여주고 있다. 그림 8(a)에서 보듯이 횡방향 전단응력은 두께방향으로 키크 형상(kink shape)을 보여주며, 이 형상은 EFSDT와 EFSDTM3D의 의해 잘 묘사되고 있다. 반면에 FSDT,

HSDT, 그리고 VAPAS는 그런 형상을 잘 묘사하지 못하고 있다. 그림 8(b)에는 FSDT를 제외한 모든 이론들이 횡방향 수직응력을 비교적 잘 묘사하고 있음을 보여주고 있다. 그 중에서도 본 논문에서 개발한 EFSDTM3D가 가장 탄성해에 근접한 분포를 보여주고 있다. 5장 1절에서도 언급했듯이 EFSDT에 의한 수직응력은 평판의 윗면과 아랫면에서 기술된 응력조건을 정확하게 만족하지 못함을 알 수 있다.

다양한 적층배열에 대한 본 이론의 검증용을 위하여 두꺼운 각 대칭 적층평판(symmetric angle-ply laminated plate)을 고려하였다. 그림 9에 두께비 4를 가지는 평판에서의 횡방향 전단응력들의 두께방향 분포를 나타내었다. 그림 9(a)에서 보듯이 횡방향 전단응력  $\sigma_{13}$ 의 예측에 있어서 HSDT, EFSDT, 그리고 EFSDTM3D가 탄성해에 매우 근접한 분포를 보여주고 있다. 또 다른 횡방향 전단응력  $\sigma_{23}$ 의 예측에 있어서는

HSDT와 EFSDTM3D가 정성적인 분포뿐만 아니라 정량적인 값도 탄성해와 비교했을 때 매우 정확함을 알 수 있다. 앞서서도 언급했듯이 HSDT의 자유도는 EFSDTM3D의 자유도보다 많기 때문에 계산의 효율면을 고려했을 때 본 이론이 상대적으로 보다 우수함을 알 수 있다.

### 5.3. 샌드위치 평판의 변위와 응력의 두께방향 분포

이 절에서는 본 이론의 정확도를 횡방향 전단변형이 매우 큰 경우에 검증하기 위하여 샌드위치 평판을 고려하였다. 그림 10과 그림 11에서는 두께비(S) 10의 직교대칭 샌드위치 평판의 면내변위 분포와 횡방향 응력들의 분포를 각각 보여주고 있다. 각 face sheet의 두께는  $h/10$ 로 가정하였다.

면내변위 두께방향 분포에 있어서 본 이론과 EFSDT가 심한 지그-재그 현상을 잘 묘사하고 있다(그림 10). 또한 그림 11에서 보듯이 EFSDT와 본 이론이 횡방향 응력들의 두

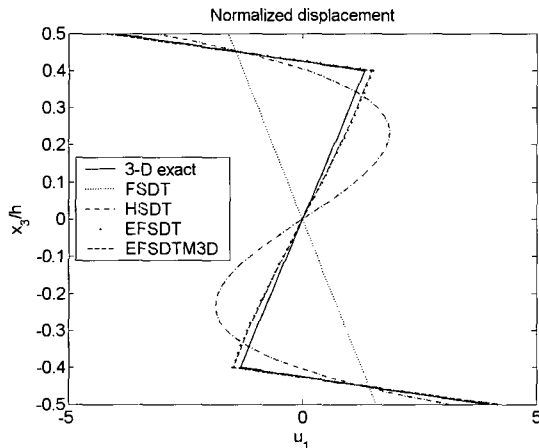


그림 10 직교대칭 샌드위치 평판에서 면내변위의 두께방향 분포, (0/Core/0), S=10

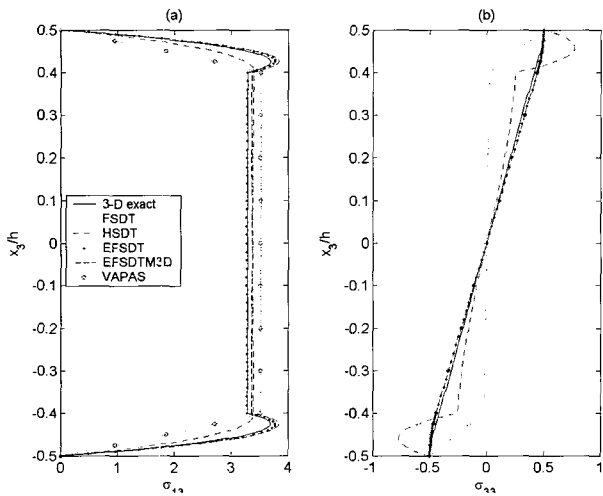


그림 11 직교대칭 샌드위치 평판에서 횡방향 응력들의 두께방향 분포, (0/Core/0), S=10; (a)  $\hat{\sigma}_{13}$ , (b)  $\hat{\sigma}_{33}$

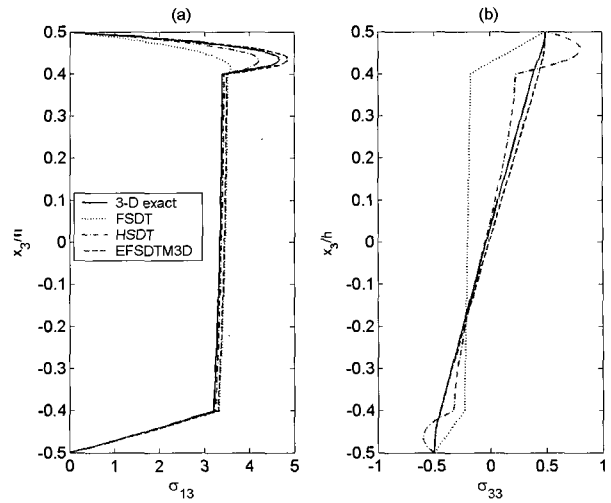


그림 12 직교비대칭 샌드위치 평판에서 횡방향 응력들의 두께방향 분포, (0/Core/90), S=10; (a)  $\hat{\sigma}_{13}$ , (b)  $\hat{\sigma}_{33}$

께방향 분포를 매우 정확하게 예측하고 있다. 자유도수가 더 많은 HSDT는 고전적인 FSDT와 비슷한 결과를 보여주고 있다. 그림 11(a)에서는 EFSDTM3D에 의한 횡방향 전단응력이 탄성해의 분포와 거의 구분하기 힘들 정도로 잘 일치하고 있다.

좀 더 다양한 샌드위치 평판의 정적 거동 예측의 정확성을 확인하기 위하여 두께비 10의 직교비대칭 샌드위치 평판을 고려하였다. 그림 12(a)에서 본 이론인 EFSDTM3D가 횡방향 전단응력 예측에 있어서 탄성해에 가장 근사함을 확인할 수 있다. 횡방향 수직응력에 있어서는 그림 12(b)에서 보여주듯이 본 이론이 FSDT와 HSDT에 비교하여 월등한 성능을 나타낸다.

지금까지의 수치예를 통해서 본 논문에서 제시하는 이론이 정확도와 수치계산상의 효율적인 측면에서 여타의 이론들 보다 우수함을 알 수 있다. 본 이론이 정확하게 예측하지 못하는 변위나 응력의 두께방향 분포에 대해서는 여러 참고문헌에서 밝히고 있듯이 3차원 탄성론에 기반을 둔 층간세분화 이론(layerwise theory) 등이 사용되어야 할 것이다.

## 6. 결 론

본 연구에서는 3차원 탄성론에 기반을 둔 개선된 일차전단변형이론(EFSDTM3D)을 혼합변분이론을 통하여 개발하였다. 저자들에 의해서 개발된 EFSDT와 비교하여 횡방향 수직응력이 정확하게 응력 평형을 만족하고, 횡방향 수직응력의 영향을 변형에너지에 고려하였다. 효율적이 고차이론에 기초한 횡방향 전단응력, 3차 다항식 형태의 횡방향 수직응력, 그리고 고전적인 일차전단변형이론의 변위장을 혼합변분

이론을 통해 새로 개선된 일차전단변형이론을 개발하였다. 유도된 이론의 변위장과 3차원 변위장 사이에 관계식을 최소 오차 자승법을 통해 체계적으로 수립하였다. 원통형 단순지지 굽힘 문제를 수치예로써 다양한 복합재료 적층평판과 샌드위치 평판을 해석하였다.

수치예를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 본 연구에서 개발한 이론이 변위와 응력을 다른 이론과 비교하여 정확하고도 효율적으로 예측할 수 있음을 알 수 있었다.
- 2) 변형에너지에 수직응력을 고려하는 것은 고려하지 않았을 때와 비교하여 최대 20%의 향상을 보였다. 하지만 탄성해와 비교했을 때 그 영향은 크지 않았다.
- 3) 포아송 효과가 클 때는 면내응력의 예측에 있어서 횡방향 수직응력의 영향(즉, 3차원 구성방정식)을 고려하는 것이 필요하다.
- 4) 샌드위치 평판의 경우에는 횡방향 전단변형이 월등히 크기 때문에 횡방향 수직응력의 영향이 매우 미미하였다. 같은 이유로 FSDT와 HSDT는 샌드위치 평판의 해석에 부적절함을 알 수 있었다.

본 연구에서 개발한 EFSDTM3D는 고전적인 일차 전단 변형이론과 복잡도가 동등하므로 모델링이 매우 간단한 반면에 변위와 응력의 예측에 있어서는 HSDT나 LCW와 같은 고차평판이론에 비교하여 보다 우수한 성능을 보여주었다.

## 참 고 문 헌

- 조맹효 (1994) 복합재료 적층판의 고차 이론의 검토, 대한기계학회지, 34(7), pp.517~526.
- 조맹효 (2002) 복합재료 적층 평판과 쉘의 전산해석 기법에 관한 소고, 한국전산구조공학회지, 전산구조공학, 1225-1569, 제 15권 1호, pp.17-30.
- Carrera, E. (1998) Evaluation of layerwise mixed theories for laminated plates analysis, *AIAA Journal*, 36(5), pp.830~839.
- Carrera, E. (1999). A study of transverse normal stress effect on vibration of multilayered plates and shells, *Journal of Sound and Vibration*, 225, pp.803~829.
- Carrera, E. (2003) Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells, *Applied Mechanics Review*, 56, pp.287~308.
- Cho, M., Choi, Y.J. (2001) A new postprocessing method for laminated composites of general lamination configurations, *Composite Structures*, 54, pp.397~406.
- Cho, M., Kim, J.H. (1996a) Postprocess method using displacement field of higher order laminated composite plate theory, *AIAA Journal*, 34, pp.362~368.
- Cho, M., Kim, J.-S. (1996b) Four-noded finite element post-process method using a displacement field of higher order laminated composite plate theory, *Computers and Structures*, 61, pp.283~290.
- Cho, M., Kim, J.-S. (1997) Improved mindlin plate stress analysis for laminated composites in finite element method, *AIAA Journal*, 35, pp.587~590.
- Cho, M., Parmerter, R.R. (1992) An efficient higher order plate theory for laminated composites, *Composite Structures*, 20, pp.113~123.
- Cho, M., Parmerter, R.R. (1993) Efficient higher order composite plate theory for general lamination configurations, *AIAA Journal*, 31, pp.1299~1306.
- DiSciuva, M. (1986) Vibration and buckling of simply supported thick multilayered orthotropic plates: an evaluation of a new displacement model, *Journal of Sound and Vibration*, 105, pp.425~442.
- Kim, J.-S. (2004) Reconstruction of first-order shear deformation theory for laminated and sandwich shells, *AIAA Journal*, 42, pp.1685~1697.
- Kim, J.-S., Cho, M. (1998) Matching technique of postprocess method using displacement fields of higher order plate theories, *Composite Structures*, 43, pp.71~78.
- Kim, J.-S., Cho, M. (2005) Enhanced first-order shear deformation theory for laminated and sandwich plates, *Journal of Applied Mechanics*, 72, pp.809~817.
- Kim, J.-S., Cho, M. (2006) Enhanced modeling of laminated and sandwich plates via strain energy transformation, *Composites Science and Technology*, in press.
- KnightJr, N.F., Qi, Y. (1997) Restatement of first-order shear-deformation theory for laminated plates, *International Journal of Solids and Structures*, 34, pp.481~492.
- Lo, K.H., Christensen, R.M., Wu, F.M. (1977) A higher-order theory of plate deformation part 2: laminated plates, *Journal Applied Mechanics*, 44, pp.669~676.

- Mindlin, R.D. (1951) Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, 18, pp.31~38.
- Noor, A.K., Burton, W.S. (1989) Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates, *Applied Mechanics Reviews*, 42, pp.1~13.
- Noor, A.K., Burton, W.S. (1990) Stress and free vibration analysis of multilayered composite plates, *Composite Structures*, 14, pp.233~265.
- Pagano, N.J. (1970) Influence of shear coupling in cylindrical bending of anisotropic laminates, *Journal of Composite Materials*, 4, pp.330~343.
- Pandya, B.N., Kant, T. (1988) Finite element stress analysis of laminated composite plates using higher order displacement model, *Composites Science and Technology*, 32, pp.137~155.
- Reddy, J.N. (1984) A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal Applied Mechanics*, 51, pp.745~752.
- Reddy, J.N. (1987) A generalization of two-dimensional theories of laminated plates, *Communication in Numerical Methods in Engineering*, 3, pp.173~180.
- Reddy, J.N., Robbins Jr., D.H. (1994) Theories and computational models for composite laminates, *Applied Mechanics Reviews*, 47, pp.147~169.
- Reissner, E. (1945) The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, 12, pp.69~77.
- Reissner, E. (1986) On a mixed variational theorem and on shear deformable plate theory, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 23, pp.193~198.
- Sutyrin, V.G. (1997) Derivation of plate theory accounting asymptotically correct shear deformation, *Journal Applied Mechanics*, 64, pp.905~915.
- Tarn, J.-Q., Wang, Y.-B. (1997) A refined asymptotic theory and computational model for multilayered composite plates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 145, pp.167~184.
- Whitney, J.M. (1972) Stress analysis of thick laminated composites and sandwich plates, *Journal of Composite Materials*, 6, pp.426~440.
- Whitney, J.M. (1973) Shear correction factors for orthotropic laminates under static load, *Journal Applied Mechanics*, 40, pp.302~304.
- Whitney, J.M., Pagano, N.J. (1970) Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates, *Journal of Applied Mechanics*, 37, pp.1031~1036.
- Yu, W. (2005) Mathematical construction of a Reissner-Mindlin plate theory for composite laminates, *International Journal of Solids and Structures*, 42, pp.6680~6699.
- Yu, W., Hodges, D.H., Volovoi, V.V. (2002) Asymptotic construction of Reissner-like composite plate theory with accurate strain recovery, *International Journal of Solids and Structures*, 39, pp.5185~5203.