대한수학교육학회지 <학교수학> 제 8 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.8, No.4, 397-415. Dec. 2006

0처리 오류의 기원 및 0의 지도[1)]

김 수 미*

이 연구는 사칙 계산 과정에서 초등학생들이 공통적으로 0을 처리하는 것의 어려움을 느낀다는 점에 착안하여, 학생들의 0처리 오류의 기원을 찾고자 수학사 및 교과서 분석을 시도하였다. 그 결과 오늘날의 사람들이 가지고 있는 0에 대한 어려움이 역사적인 근원을 가지고 있음을 밝혀내었다. 또한 0의 지도라는 관점에서 수학 교과서 및 익힘책을 분석한 결과, 0의 도입 시기와 방법이 십진기수법에서의 0의 역할을 인식시키기에 미흡한 점이 있으며, 0을 대상으로 하는 간단한 계산이 부분적으로 다루어지고 있지 않음을 밝혀내었다. 또한 학생들이 자주 범하는 0처리 오류를 예방하기 위한 문항이 체계적으로 제시되어 있지 않았다. 이러한 문제점을 극복하기 위해, 이 연구에서는 일본, 독일 교과서 등을 참고하여 0의 지도와 관련된 세 가지 방안을 제안하였다.

I. 들어가며

지난 수 십 년간 진행되어온 계산오류 연구 결과는 공통적으로 학생들의 0처리 미숙 실태를 보고하고 있다. 이들 연구 결과에 의하면 학년에 관계없이 자연수와 소수의 계산 전 영역에서 0에 의한 오류가 나타나고 있다(Kilian, et al, 1980; Bricken, 1987; 김종태, 1975; 윤희태, 2002;이영선, 2004 ;장영숙, 2002). 예를 들면 4808 나누기 8의 상황에서 피제수에 포함되어 있는 0을 무시하고 없는 것으로 간주하여 601대신 61로 답하는 경우가 이에 해당된다. 이와 같이 0이 포함되어 있지 않은 수의 계산은 제대로 수행하면서, 2404, 1890 등과 같이 0이 포함된 수를 처리하는 상황에서는 잘못된 규칙을 적용하여 오답을 내는 경우를 통상 '0처리 오류'라고 한다.

학생들이 계산 과정에서 0을 다루기 어려워하는 현상은 오래 전부터 외국의 연구자들에 의해 꾸준히 지적이 되어 왔으나, 국내에서는 0이 독립된 연구 주제로 다루어 진 바가 거의 없다. Wheat(1983)은 학교 현장에서 0의 의미가 결여된 채 지도되는 까닭에 학생들의 마음이 0을 처리하는 과정에서 기계로 바뀐다고 지적하였다(p.80). Spitzer(1954)는 0과 1에 관한 계산의 어려움을 이해하고, 두 자리 수의 곱셈에서 그 필요성을 경험할 때까지 지도가 지연되어야 한다고 주장하였다. Reys, Suydam, 그리고 Linquist (1984)는 기수법에서의 0의 역할을 지도할 것을 제안하였으며, 최근에는 Wilson(2001)과 Wheeler (2002)가 중등학생을 대상으로 0의 지도에 대한

* 경인교육대학교(smkim@gin.ac.kr)
1) 이 연구는 2005년도 한국학술진흥재단 신진교수연구지원 과제임.

아이디어를 제시한 바 있다. 이와 같이 외국에서는, 비록 연구의 양은 많지 않으나, 오래전부터 0을 처리하는 아동의 어려움을 감지하고 이를 해결하기 위한 방안을 모색해 왔다.

아동의 오류에 적절하게 대처하기 위해서는 오류의 원인이 체계적으로 규명되어야 한다. 기존의 오류 연구에서는 0처리 오류의 주요 원인으로 자리값 개념의 미숙과 0을 없는 것으로 간주하거나 무시하는 습관 등을 들고 있다(장영숙, 2003; 윤희태, 2002). 그러나 0처리 오류를 가진 아동이 0이 아닌 다른 수가 주어진 계산에서는 아무 문제없이 수행한다면 반드시 자리값 개념의 미숙만으로 원인을 돌릴 수는 없을 것이다. 아동이 계산 과정에서 0을 만나는 경우, 1부터 9까지의 수를 만났을 때와는 전혀 다른 행동을 보이는 경향은 보다 근본적인 곳에서 그 원인이 고찰되어야 할 것이다. 이와 관련하여 Brousseau(1983)는 오류의 원인을 인식론적 관점에서 고찰할 것을 제안한 바 있다. 즉 오류 혹은 장애의 인식론적 근원은 수학적 지식 자체의 본성에 기인하는 것으로, 수학의 역사 발생 과정에서 나타난 인식론적 장애가 학생들에게서도 매우 유사하게 나타난다는 것이다. 따라서 본 연구에서는 0에 관련된 수학사의 고찰을 통해 0처리 오류의 원인을 탐색해 보고자 한다.

아동의 오류는 교사, 교과서, 지도 방법 등과 같은 교수학적 근원을 가지기도 한다. 0처리 오류의 경우, 0 혹은 0의 계산에 관련된 교사의 오개념이나 지도 방식, 혹은 교과서나 교육과정의 내용과 전개 방식 등이 문제가 될 수 있다. 그러나 교사의 오개념이나 지도 방식에는 개인차가 너무 크기 때문에 본 연구에서는 교사 변인을 제외하고, 제 7차 수학과 교과서 분석으로 연구 영역을 제한하기로 한다.

마지막으로 효과적인 0의 지도를 위한 시사점을 얻기 위해, 미국, 일본, 독일 등 선진국의 교과서를 0의 지도라는 관점에서 비교 분석함으로써, 각각의 장단점을 취합하여 우리 실정에 적합한 교수 시사점을 도출해내고자 한다.

II. 0처리 오류의 의미와 실태

1. 0처리 오류의 의미와 하위 유형

수학학습 과정에서 발생하는 오류는 크게 부주의나 실수에 의한 단순 오류와 오개념이나 버그(bugs)에 의한 체계적 오류 두 가지로 구분된다. 오류 연구 분야에서 논의되는 오류는 주로 후자의 것으로 본 연구에서 다루고자 하는 0처리 오류 역시 이에 해당된다. 0처리 오류란 계산 과정에서 0을 적절히 처리하지 못함으로써 생긴 오류를 의미한다(윤희태, 2002). 즉 0이 아닌 다른 수의 계산은 제대로 수행하면서 0에 대해서는 적절하지 못한 방법으로 계산을 수행하는 것을 의미한다.

대부분의 연구에서 0처리 오류는 그저 '0에 의한 잘못' 혹은 '0에 의한 오류'와 같은 식으로 표현되며, 0이 들어간 계산에서의 모든 오류를 아우른다. 그러나 Maurer(1987), 윤희태(2001), 장영숙(2003), 이영선(2004)의 연구에서는 0처리 오류의 하위 유형을 보다 구체적으로 제시하고 있다(<표 II-1>). 장영숙(2003)은 자연수 뺄셈에서의 0처리 오류를 4가지로 분류하고 있는데, 모두 0에서 어떤 수를 빼야하는 상황에서 발생한다. 윤희태(2001)는 자연수 곱셈에서의 0처리 오류를 3가지로 분류하였는데, 모두 승수가 (몇 십)인 상황에서 발생한다. 또한 자연수 나눗셈에서의 0처리 오류는 2가지로 분류하였는데, 제수 혹은 피제수에 포함된 0을 없는 것으로 간주하여 발생한다. 마지막으로

이영선(2004)은 소수의 곱셈과 나눗셈에서의 0 처리 오류를 4가지로 구분하였는데, 0단을 이해하지 못한 경우, 0을 불필요하게 지우거나 지우지 않는 경우, 그리고 0을 몫의 자리에 넣지 못하는 경우에서 발생한다.

이와 같은 식으로 0처리 오류를 하위 유형으로 나누어 면밀히 검토해 보면, 0처리 오류를 가지고 있는 학생들의 일반적인 경향성을 다음 세 가지로 정리할 수 있다.

첫째, 0처리 오류를 가진 학생들은 계산 과정에서 0을 만나게 되면, 계산 절차를 의미와 연관 짓지 못하고 매우 기계적으로 수행한다. 예를 들어 '103-41'은 '113-41'의 계산과 거의 동일한 절차로 수행하면 되며, '80÷4'는 '84÷4'와 동일한 절차로 계산을 수행하면 된다. 그럼에도 불구하고 아동은 일반적인 알고리즘을 0에 적용하지 못하고, 완전히 다른 규칙을 만들어 0에 적용하는 경향이 나타났다.

<표 II-1> 사칙 계산 과정에서 나타나는 0처리 오류의 하위 유형

자연수의 뺄셈	자연수의 곱셈	자연수의 나눗셈	소수의 곱셈과 나눗셈
1. 0-(어떤 수)는 무조건 0이라고 답하는 오류 (0-N=0) 103　　1047 - 41　　- 835 102　　1012	1. (어떤 수)×(몇 십)에서 어떤 수 곱하기 0을 처리하지 못하는 오류 22 ×40 80 88 960	1. 피제수의 0을 무시하는 오류 2　　61 4)80　　8)4808 8　　48 0　　8 8 0	1. 0단을 이해하지 못한 결과로 발생하는 오류 2.327　　4.2 × 100　　×0.9 2327　　378 2327　　42 25597　　7.98
2. 0-(어떤 수)는 무조건 (어떤 수)라고 답하는 오류 (0-N=N) 140　　6025 - 21　　-3276 121　　3249	2. (몇 십)×(몇 십)에서 0을 처리하지 못하는 오류 40　　40 ×20　　×20 20　　4200 80 820	2. 제수의 0을 무시하는 오류 88 40)352 32 32 32 0	2. 불필요한 0을 지우지 않는 오류 172 × 0.1 172 000 017.2
3. 0을 건너뛰고 빌려오는 오류 & 0-N=N 406　　1023 - 219　　- 835 117　　888	3. (어떤 수)×(몇 십)을 무조건 0으로 답하는 오류 32 × 30 0		3. 소수점 앞의 0을 지우는 오류 7 × 0.001 .007
4. 0에서 받아내림 해야 하는 경우 9대신 10을 쓰는 오류 1300 - 522 788			4. 몫을 쓸 때, 소수점 다음의 0을 빠뜨리거나, 불필요하게 포함시키는 오류 7.8 5) 35.4 35 40 40 0
장영숙(2003)	윤희태(2001)	Maurer(1987) & 윤희태(2001)	이영선(2004)

둘째, 0처리 오류를 가진 학생들은 0을 있으나 마나한 기호로 취급하여, 수를 잘못 해석하는 경향이 있다. 예를 들어 203을 23으로, 40을 4로 해석하는 것이다. 이와 같은 경향은 특히 자연수 나눗셈과 소수 나눗셈에서 자주 나타난다. 자연수 나눗셈에서는 피제수나 제수에 0이 포함된 경우, 0을 없는 것으로 간주하여 수를 잘못 해석하거나, 소수의 나눗셈에서 몫에 0을 쓰지 않는 경우가 이에 해당된다.

셋째, 0처리 오류를 가진 학생들은 0과의 간단한 셈 결과를 정확하게 알고 있지 못하다. 예를 들어, '0-수'를 0으로 답하거나, '수×0'을 0으로 처리하지 못하거나 하는 식으로 0에 대한 간단한 셈을 하지 못해 오답을 내는 경우가 이에 해당된다.

2. 0처리 오류의 실태

계산 오류 연구가 시작된 지 수 십 년이 지났지만, 아직까지 오류 유형에 대한 합의는 이루어지고 있지 않다. 따라서 연구자에 따라 다양한 방식으로 오류 유형을 정하고 있으나, 자연수와 소수 계산 연구에서 공통적으로 포함되는 오류 유형이 0처리 오류이다(Hardar & Zaslavsky, 1987; Newmann, 1981; Clements, 1980; Kilian, et al, 1980; Brown & Burton, 1978; 윤희태, 2002; 이종문, 1983; 김종태, 1975 등). 예를 들어 자연수의 뺄셈오류 연구를 살펴보면, 김종태(1975)는 9가지의 오류 유형을, 이종문(1983)은 4가지의 오류 유형을, 장영숙은 3가지의 오류 유형을 구분하고 있는데, 모두 0처리 오류 유형이 포함되어 있다. 특히 Brown과 Burton(1978)의 연구는 자연수의 뺄셈 오류 유형을 14가지로 세분하고 있는데, '무조건 큰 수에서 작은 수 빼기' 오류 등과 같은 한두 가지 오류 유형을 제외하고는 거의 대부분이 0처리와 관련된 오류이다. 뿐만 아니라 자연수의 덧셈과 뺄셈 오류에 대한 Engelhart(1977)의 연구(Maurer, 1987에서 재인용), 자연수의 곱셈 오류에 대한 Kilian, et al.(1980)의 연구, 자연수의 나눗셈 오류에 대한 김종태(1975)의 연구, 소수의 곱셈과 나눗셈 오류에 대한 윤희태(2002)의 연구에서도 모두 0처리 오류가 오류 유형에 포함되어 있다(<표 II-2>).

이상의 선행 연구 고찰을 통해, 학생들은 학년이나 계산 영역에 관계없이 계산 과정에서 0을 처리하는 것에 매우 큰 어려움을 겪고 있음을 알 수 있다. 특히 자연수의 뺄셈 영역에서는 '0을 처리해야하는 상황'이 '받아내림 해야하는 상황'과 더불어 오류를 유발하는 대표적인 경우로 나타났다(장영숙,2003). 그런데 특이한 점은 0처리 오류가 자연수와 소수 계산 연구에서만 나타나고, 분수의 계산 연구에서는 나타나지 않는다는 사실이다(강형구, 1989; 조병윤, 1992; 김진식, 1995; 이경아, 1997). 분수에서도 명백히 0을 처리해야하는 상황이 있음에도 불구하고, 분수 계산 영역에서는 0처리 오류가 중요하게 논의되지 않고 있다. 이는 아마도 분수의 독특한 표기체계에서 기인하는 것은 아닐까 생각된다. 자연수와 소수는 십진기수법에 근간을 둔 매우 유사한 표기법을 사용하기 때문에, 자연수 계산에서 나타나는 오류가 소수 계산에서도 유사한 형태로 나타나기 쉽다. 반면 분수는 분모와 분자를 근간으로 하는 매우 다른 표기법을 사용하기 때문에, 0에서 어떤 것을 빼야한다든가, 0으로 곱해야한다든가 하는 0을 처리해야하는 상황이 자주 발생하지는 않을 것이다. 결국 0처리 오류는 십진기수법의 이해와 밀접하게 연관되어 있으며, 이는 0처리 오류의 원인으로 자리값 개념의 부재를 제시한 선행 연구자들의 결론과도 어느 정도 일치하는 것이다.

III. 0처리 오류의 역사 발생적 기원

1. 0의 발생

이미 논의한 바와 같이 초등학생들은 계산 과정에서 0과 만나게 되면, 다른 수를 만날 때와는 다르게 행동한다. 그들은 그릇된 알고리즘을 기계적으로 적용하려 하거나, 0을 아예 없는 것으로 간주하기도 한다. 이는 초등학생들이 0을 수로써 인식하는 데 어려움을 겪는다는 것을 의미하는 것으로, 0의 발생 과정에서 고대인이 겪은 어려움과 유사하다.

일반적으로 알려진 사실 가운데 하나는 0이 1부터 9까지의 숫자 보다 뒤늦게 만들어졌다는 것이다. 그러나 이러한 현상은 비단 인도 기수법에만 적용되는 것이 아니라 소위 위치적 기수법을 채택한 모든 지역에서 그러하다. 오늘날 사용되는 기호 0은 인도 지역에서 대략 6-9세기에 만들어진 것으로 추정되지만, 그 유래에 대해선 명확하지 않다(김주영, 김성숙, 2001). 그러나 이 보다 더 오래 전부터 여러 지역에서 모양은 다르나 0에 대응하는 기호가 만들어져 사용된 흔적이 있다.

기원전 2000-3000년경 고대 바빌로니아 지역

<표 II-2> 기존의 오류 연구에서 나타난 0처리 오류

영역	자연수 뺄셈	자연수 곱셈	자연수 나눗셈	덧셈과 뺄셈	소수의 곱셈	소수의 나눗셈
학년	4-6학년		4학년	3-6학년	5학년	6학년
연구자	Brown & Burton (1978)	Kilian, et al. (1980)	김종태 (1975)	Engelhart (1977)	윤희태 (2002)	윤희태 (2002)
계산 오류 유형	**-Borrow/From/Zero** Smaller/From /Larger **-Borrow/From/Zero and Left/Ten/Ok** **-Diff/0-N=N and Move/over/Zero /Borrow** **-Diff/0-N=N and Stops/Borrow/At /Zero** **-Smaller/From /Larger and 0-N=N** **-Diff/0-N=0 and Move/over/Zero /Borrow** **-Borrow/From/Zero and Diff/N-0=N** 등	①절차적오류 -수 누락오류 -받아올림오류 **-0 처리 오류** -배열 오류 ②계산 오류 -덧셈 오류 -곱셈구구오류 ③기타 오류	-기본결합오류 **-0에 의한 오류** **-몫에서 0을 빼는 오류** -곱셈 오류 -뺄셈 과정을 완수하지 못하는 오류 -계산 과정을 완수하지 못하는 오류 -뺄셈오류 -몫 정하기 오류	-기본사실오류 -받아올림과 받아내림 오류 -부적절한 역산 -알고리즘 결함 -불완전한 알고리즘 **-0에 의한 오류** -부정확한 연산 -항등원 오류 (0과 1의 혼동)	-소수점 오류 -자연수 곱셈 오류 -알고리즘 오류 **-0처리 오류** -기술적 오류 -덧셈 오류	-알고리즘 오류 -소수점 오류 -자연수 나눗셈 오류 **-0처리 오류** -뺄셈 오류

에서는 1과 10을 의미하는 두 기호와 60진법을 근간으로 하는 위치적 기수법이 사용되었다. 그러나 3601의 경우, 3600(=60^2)이 1개, 그리고 1이 1개이므로, 60에 해당하는 자리수가 없게 되어 두 기호 사이에 공란을 둘 수밖에 없다. 이 표기법의 문제는 이처럼 공란이 있는 경우, 공란의 크기를 놓고 그것이 한 칸인지 혹은 두 칸인지가 구분되지 않는다는 것이다. 당시 사람들은 공란이 있을 경우 문맥을 참고하여 수의 크기를 가늠하였으나, 점차 생활이 복잡해짐에 따라 큰 수의 사용이 불가피해지면서 기원전 6세기와 3세기 사이에 자리가 비어있음을 뜻하는 기호를 고안하였다. 이 기호는 마침표나 강조를 위해 구별점으로 쓰였던 것인데, 기수법에 사용되면서 '이 자리에 아무것도 없다.'는 것을 표시해 주었다. 이로써 바빌로니아인들은 수를 해석하는데 혼란을 줄여나갔지만, 이 기호를 끝자리에는 사용하지 않음으로써 여전히 혼란의 여지를 남겼다(Kaplan, 2003).

한편 기원전 3세기 그리스인들 역시 영의 기호(O)를 사용하였다. 그들이 왜 하필 동그라미를 사용했는지는 정확히 알 수 없으나, '없음'을 의미하는 그리스 문자 '오미크론'에서 나왔다는 것이 가장 흔한 설명이다. 그러나 그들은 O를 사용하였으나, 다른 숫자들과 달리 이 기호 위에 항상 별난 모양의 선을 그려 넣고는 했다(Kaplan, 2003).

마야 문명에서도 기원전 300년에서 서기 900년 사이에 영에 해당하는 기호를 사용하였다. 마야인들은 주로 조개 껍데기 모양으로 0을 표시했으나, 이따금 사람 얼굴 모양의 여러 복잡한 문양을 이용하기도 했다(Smith, 2002). 이것은 간단한 점과 막대 모양으로 표현되었던 다른 숫자와 대조되는 것이다.

이처럼 0이 인도, 바빌로니아, 그리스, 마야 지역 등과 같이 위치적 기수법 체계를 사용한 지역에서만 나타나는 것으로 볼 때, 0의 초기 위상은 수로서 보다는 '자리가 비어있음'을 알리는 기호로서의 용도가 주요하다. 이것은 0 기호의 등장이 다른 숫자에 비해 확연히 지체되었다는 점과 0 기호의 외양이 다른 숫자와 다르게 복잡하고 요란한 문장 기호의 모습에 가깝다는 것으로도 명확하다. 이로써 우리는 0을 순수하게 수로서 받아들이기 어려워하는 오늘날 학생들의 어려움을 이해할 수 있을 것이다. 또한 0을 바르게 이해하기 위해서는 0의 애초의 용도인 '자리지기'의 역할을 명확히 이해하는 것이 중요함을 알 수 있다.

2. 계산의 대상으로서의 0

0처리 오류 유형을 가진 학생들의 특징 가운데 하나는 0에 대한 간단한 셈을 하지 못한다는 것이다. 나눗셈에 한정된 것이긴 하나, 고대 수학자들 역시 0을 계산의 대상으로 생각하는 것에 큰 어려움을 겪은 듯 하다.

고대인들은 0 기호를 발명한 이후에도 오랫동안 '0'을 수로서 받아들여지지 못했기 때문에, 0을 계산의 대상으로 삼지 못했다. 그러나 7세기 경에 드디어 인도인이 처음으로 0이 포함된 사칙계산을 시도하였다. Kaplan(2003)은 이와 관련하여 다음과 같이 기술하고 있다.

> 영의 경우에 그것이 수가 되기 위해서는 우선 우리가 영으로 어떻게 더하고, 빼고, 곱하고, 나누는지 이해해야 한다. 인도의 수학자들이 바로 이 일을 해냈다. 이로써 그들은 중대한 전환을 일으키는 데에서 큰 역할을 하였다(Kaplan, 2003, 101쪽).

특히 7-12세기의 인도 수학자들은 0이 포함된 계산 결과에 대해 많은 언급을 하고 있는데, 그 가운데 0이 포함된 나눗셈의 결과에 대

해 의견이 분분하였다. 7세기의 인도 수학자인 브라마굽타(598-670)는 그의 유명한 책 가운데 하나인 『Brahmasphuta-siddhanta(우주의 열림)』에서 0에 관한 연산을 정의하였다. 그는 0을 '어떤 수에서 같은 수를 뺄 때 나오는 수'라고 정의하고, 0의 성질에 대해 다음과 같이 소개하였다.

> 양수나 음수를 영으로 나누면 영을 분모로 하는 분수가 된다(이 분수를 그는 '카체다(khacheda)'라고 불렀다. 영을 뜻하는 '카'에서 나온 말이다). 영을 음수나 양수로 나누면 영이 되거나, 또는 영을 분자로, 유한 수를 분모로 하는 분수가 된다.....영을 영으로 나누면 영이 된다(Kaplan, 2003).

한편 인도의 Jania 지역의 수학자인 마하비라(800-870)는 자신의 저서 『Ganita Sara Samgraha』에서 '어떤 수를 영으로 나누면 그 수는 바뀌지 않는다.'라고 기록해 두었다. 반면, 수학 보다는 천문학으로 더 잘 알려진 11세기의 인도의 수학자인 스피파티(1019-1066)는 그의 저서 『Ganita-tilaka』에서 '어떤 수 나누기 영은 영이다.'라고 주장하였다(김주영, 김성숙, 2001). 12세기의 인도 최고의 수학자였던 바스카라(1114-1185)는 그의 책 『Vija-Ganita(씨앗 계산)』에 처음으로 $a \neq 0$일 때 $\frac{a}{0}$는 무한대라고 주장하였다.

> 분자 3, 분모 0.
> 분수 $\frac{3}{0}$의 몫. 분모가 0인 이 분수의 값은 무한대이다. 분모가 0인 이런 분수에 아무 값을 더하거나 빼도 변함이 없다(Smith, 2002, 47쪽).

이 글로 미루어 보아 바스카라가 무한의 개념에 꽤 정통해 있었다는 점은 분명하나, '$\frac{a}{0} \times 0 = a$'라고 주장한 것으로 미루어 보아, 그 당시 0으로 곱하거나 나누는 개념이 분명하지 않았음을 짐작할 수 있다(Smith, 2002).

이상의 내용에서 알 수 있듯이, 0이 하나의 기호에서 수로서 인식이 전환되는 과정에서, 고대 수학자들은 엄청난 혼란을 겪었던 모양이다. 특히 피제수나 제수가 0인 나눗셈의 경우는 많은 논란거리를 제공하였으며, 이러한 논란거리를 해소하는 과정에서 수학의 발전이 이룩되었다고 할 수 있다. 그런데 여기서 주목해야 할 점은 고대 수학자들이 겪었던 혼란이 오늘날의 학생들에게서 그대로 재현된다는 점이다. 예비교사를 대상으로 피제수나 제수가 0인 나눗셈을 해결하도록 한 연구에 의하면(김수미, 2004), 학생들의 정답률은 매우 저조했으며, 반응유형은 고대 수학자들의 의견과 매우 유사하게 나타났다(<표 III-1>, <표 III-2>). 특히 $a \div 0$의 경우, 예비교사들의 반응 유형은 고대 수학자들과 완전히 일치하는 것으로 나타났다.

<표 III-1> 0을 대상으로 한 나눗셈 문제에 대한 고대 인도 수학자들의 의견

수학자 \ 나눗셈	a÷0	0÷a	0÷0
브라마굽타	0을 분모로 하는 분수	0 또는 0을 분자로 유한수를 분모로 하는 분수	0
마하비라	a		
스피파티	0		
바스카라	∞		
현대적 합의	불능	0	부정

여러 문명에서 영에 해당하는 기호가 발명되었지만, 고대 인도를 제외하고 영은 계산의 대상으로 인식되지 못하였다. 아마도 고대의 사람들에게 있어 수는 추상적인 개념이라기보다 실재하는 대상을 표현하는 구체적인 개념이었을 것이며, 이러한 점에서 '아무 것도 없음'을 의미하는 0은 사람들의 실제로 보고자 하는 욕구를 충족시키지 못했음은 자명하다. 그러나 19세기에 이르러 수에 대한 관점의 기본적인 변화가 일어났다. Hankel은 음수를 받아들이기 위하여 물리적 세계에서 구체적인 모델을 더 이상 찾지 않았다. 그에게 음수는 실제적인 것을 나타내는 개념이 아니라 형식적인 구조를 이루는 것이었다. 여기서 비로소 음수 개념을 양의 개념과 관련짓지 않고 순전히 형식적인 개념으로 간주할 수 있게 되었다. Hankel은 양수 체계를 구성하는 여러 원리를 그대로 유지하면서 음수체계를 연구하였으며, 이렇게 하여 얻어진 음수의 구조는 대수적으로 모순이 없었다. 이것이 바로 형식불역의 원리이다(우정호, 1999).

이 원리는 기존의 수 체계에서 인정된 성질이 그대로 유지되도록 새로운 수 체계의 연산과 관계를 규정하는 방식으로 대수적인 구조를 확장한다는 것이다. 예를 들어 자연수 집합에서 만족하는 성질이 0을 포함하는 범자연수의 집합에서도 그대로 보존되도록 범자연수의 연산이 규정되어야 한다는 뜻이다. Kaplan(2003)은 다음과 같이 아주 쉬운 말로 형식불역의 원리를 설명하고 있다.

> 수학을 만드는 활발한 활동의 특징은 어떤 것이 수가 되려면 기존의 수들과 별 문제 없이 어울릴 수 있어야 하고, 최소한 그들과 인사 정도는 나눌 수 있어야 한다(Kaplan, 2003, 101쪽).

위의 인용문은 자연수에서 범자연수로 수체

<표 III-2> 0을 대상으로 한 나눗셈 문제에 대한 예비교사들의 반응유형 및 빈도

제시된 문제	응답유형	빈도(명)	백분율(%)
5÷0	불능(해가 없다)	22	62.9
	5	2	5.7
	0	2	5.7
	∞	4	11.4
	무응답	2	5.7
	기타(알 수 없다 등)	3	8.6
0÷3	0	31	88.6
	부정	1	2.9
	불능	2	5.7
	무응답	0	0
	기타(성립하지 않는다 등)	1	2.9
0÷0	부정	10	28.6
	불능(해가 없다)	7	20
	∞	1	2.9
	1	3	8.6
	무응답	10	28.6
	기타(알 수 없다 등)	4	11.4

2) 나눗셈과 곱셈이 역연산이라는 것을 범자연수 집합에 확장하는 원리

3) 3×3=9, 3×2=6, 3×1=3에서 보면 3씩 줄어드는 규칙이 있다. 이것을 3×0에 적용하면 0이어야한다. 이처럼 자연수 곱셈에서 만족하는 규칙을 범자연수 집합으로 확장하는 원리

계를 확장해 갈 때, 기존의 자연수 집합의 대수적 구조가 그대로 보존되도록 범자연수의 연산이 규정되어야 함을 의미한다. 즉 0과 자연수 혹은 0과 0의 연산 결과는 연산 자체의 의미 보다는 자연수 집합의 대수적 구조를 보존하는 방향에 달려있다는 것이다. 예를 들어 '수÷0=불능'인 이유를 형식불역의 원리에 입각해 생각해 보면 다음과 같다.

문제) 어떤 수 나누기 0은 불능(undefined)이다.
증명) $a\neq0$, $a\in N$에 대하여 $a\div0=\square$라 하자.
그러면 $a=\square\times0$이다. (형식불역의 원리에 의해)2) $\square$에 오는 수에 관계없이 항상 $\square\times0=0$ (형식불역의 원리에 의해)3)
그런데 $a\neq0$이라 했으므로 $\square$를 만족하는 해가 없음을 알 수 있다.
따라서 불능이다.

이와 같은 식으로 하면 '0÷수'는 0이 되며, '0÷0'은 부정이 명백하다. 그러나 0을 계산의 대상으로 간주하기 시작하여 이와 같은 성과가 나타나기까지는 천년 이상의 세월이 소요되었음을 주목해야 한다. 이것은 0을 계산의 대상으로 고려하는 일이 학생들에게 결코 쉬운 것이 아님을 의미한다. 특히 '더하기 0'은 아무 것도 보태지 않음을 의미하며, '빼기 0'은 아무 것도 덜어내지 않음을 의미하는 식으로 실제의 행동과 연결되지만, '곱하기 0'이나 '나누기 0'은 실제 행동과 연결되지 않는다. 0단에 대한 잘못된 지식이 자연수와 소수의 곱셈에서 오류를 유발한다는 것은 이미 논의된 사실이다. 학생들의 이와 같은 어려움을 고려할 때, 0에 대한 간단한 셈을 지금 보다는 더 명시적이고 체계적인 방법으로 지도하는 것이 필요할 듯하다.

IV. 0처리 오류의 교수학적 기원

지금까지 살펴본 바에 의하면, 학생들의 0처리 오류는 역사적 기원을 갖는 어느 정도 예측 가능한 것이라 하겠다. 따라서 보다 명시적이고 체계적인 방법으로 0 및 0이 포함된 계산을 지도할 필요가 있다. 이에 따라 이 연구는 우리나라 수학 교과서와 익힘책을 대상으로 0에 관련된 계산이 어떤 식으로 지도되고 있는지를 살펴보고, 이를 통해 0의 지도와 관련된 문제점과 대안을 모색해 보고자 한다.

이 연구의 분석 영역과 분석 내용은 <표 IV-1>과 같다.

<표 IV-1> 분석 영역 및 분석 내용

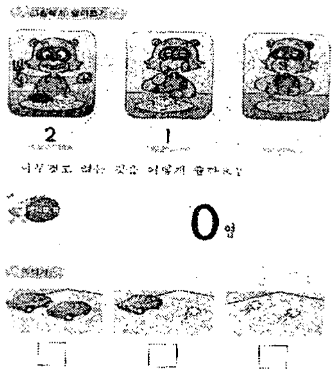
분석 영역	분석 내용
1. 0의 도입	- 도입 시기와 도입 방법
2. 0에 관련된 덧셈 · 뺄셈	- 간단한 셈의 지도 시기와 지도 방법 0+수=수, 수+0=수, 0+0=0 수-수=0, 수-0=수, 0-0=0 - 0처리 오류를 유발하는 덧셈 · 뺄셈 문제의 지도 시기와 지도 방법
3. 0에 관련된 곱셈	- 간단한 셈의 지도 시기와 지도 방법 수×0, 0×수, 0×0 - 0처리 오류를 유발하는 곱셈 문제의 지도 시기와 지도 방법
4. 0에 관련된 나눗셈	- 간단한 셈의 지도 시기와 지도 방법 수÷0, 0÷수, 0÷0 - 0처리 오류를 유발하는 나눗셈 지도 시기와 지도 방법

1. 0의 도입

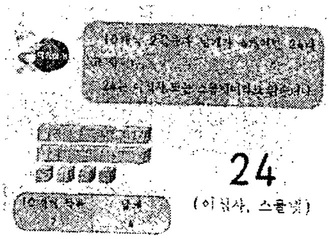
우리나라 교과서에서 0을 도입하는 시기는 1-가 단계에서 '1부터 5까지의 수'를 도입한 직후이다. 0을 언제 도입하는 것이 바람직한가에 대해서는 아직 결론을 내릴 수 없고, 다만 외국의 경우를 참고할 수 있을 것이다. 외국에서도 대체로 1학년 전반부에 0을 도입하지만, 일본, 미국은 '1부터 10까지의 수'를 도입한 후, 독일은 '1부터 20까지의 수'를 도입한 후에 0을 도입하고 있다. 따라서 우리나라는 다른 나라에 비해 일찍 0을 도입함을 알 수 있다. 0의 필요성은 10을 경험하지 않고 인식되기 어려운 만큼 5까지의 수를 도입한 직후에 바로 0을 도입하는 것은 이른 감이 없지 않다. 0의 도입 시기는 도입 방법에도 영향을 미친다.

0의 도입 방법은 비어 있는 접시, 빈 공간 등과 같은 시각적 자료를 통해, '아무 것도 없음'을 나타내는 기호로서의 의미를 강조하며, 이와 더불어 '2, 1, 다음의 수'와 같이 수의 계열을 이용하고 있다([그림 IV-1]). 그러나 십진기수법에서의 0의 역할, 즉 낱개의 수가 없음을 나타내기 위한 기호로서의 역할은 이 때 제시 불가능하다. 왜냐하면 그 당시로는 5까지의 수만 도입된 상태이기 때문이다.

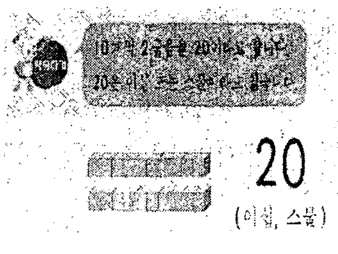
만약 0을 현재와 같은 방식으로 5까지의 수를 배우는 과정에서 도입하고자 한다면, 십진기수법에서의 0의 역할을 지도할 시점은 1-가 단계의 7단원 '50까지의 수'가 될 것이다. 이 단원에서는 두 자리 수를 10개씩 묶음과 낱개로 나타내는 방법을 배운다. 이 때 10과 20을 반성하면서 10은 '10개씩 1묶음과 낱개가 0인 수'이며, 20은 '10개씩 2묶음과 낱개가 0인 수'로 재인하게 한다면, 십진기수법에서의 0의 역할을 이해하는 데 도움이 될 것이다. 그러나 현 교과서에는 24는 '10개씩 2묶음과 낱개가 4인 수'로 약속하는 반면([그림 IV-2]), 20은 '10개씩 2묶음인 수'와 같이 정의하여([그림 IV-3]), 십진기수법에서의 0의 역할을 강조하고 있지는 않다. 수학사의 고찰을 통해서도 알 수 있듯이, 0의 발생은 십진기수법에서의 자리지기의 역할에서 비롯되었기 때문에 우리 교과서에서도 이러한 부분에 대한 고려가 필요할 것으로 생각된다.



[그림 IV-1] 0의 도입(수학1-가)
(교육인적자원부, 2004a:12)



[그림 IV-2] 24의 도입(수학1-가)
(교육인적자원부, 2004a:98)



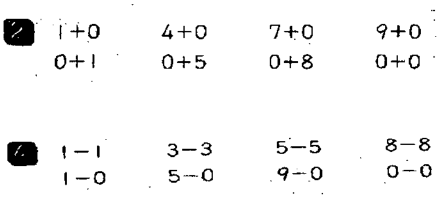
[그림 IV-3] 20의 도입(수학1-가)
(교육인적자원부, 2004a:96)

2. 0에 관련된 덧셈과 뺄셈

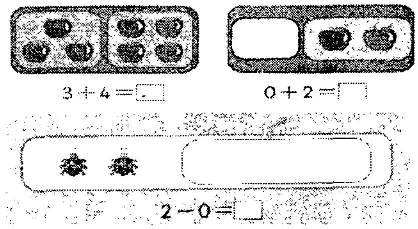
0을 대상으로 하는 간단한 덧셈에는 '0+수=수', '수+0=수', '0+0=0'의 세 가지가 있다. 0을 대상으로 하는 간단한 뺄셈에는 '수-0=수', '수-수=0' '0-0=0'의 세 가지가 있다. 교과서에는 이를 1-가 단계 5단원 '더하기와 빼기'에서 다루고 있으나, 여섯 가지 셈이 모두 제시되어 있지는 않다. 덧셈의 경우는 '0+0=0'이, 뺄셈의 경우는 '수-수=0', '0-0=0'이 전혀 다루어지고 있지 않으며, 문제의 개수도 하나 혹은 두개로 매우 제한적이다(<표 IV-2>).

이러한 셈을 명시적으로 아는 것은 중요하다. 왜냐하면 여러 자리 수의 세로 덧셈과 세로 뺄셈을 하는 과정에서 이들 셈이 모두 이용되기 때문이다. 예를 들어 480-210을 세로셈으로 해결해야하는 경우 제일 먼저 부딪히는 문제가 '0-0'이다. 이와 같은 식으로 두 자리 수 이상의 덧셈과 뺄셈에서는 0에 대한 셈 지식이 소용되므로, 교과서 제작 시 이러한 부분이 고려되어야 할 것이다. 이와 관련하여 일본 교과서를 참고할 만하다([그림 IV-4]). 일본 교과서에는 이 여섯 가지 셈에 대한 문제가 한 코너에 제시되어 있어, 0에 대한 셈을 일목요연하게 정리할 기회를 제공하고 있다.

0에 대한 셈을 제시하는 방법은 덧셈은 아무 것도 보태지 않음을, 뺄셈은 아무 것도 덜어내지 않음을 강조함으로써, 연산의 의미를 실제 행위와 관련짓고 있다([그림 IV-5]).



[그림 IV-4] 0이 대상인 덧셈과 뺄셈
(일본교과서) (細川藤次 外(2004a: 76, 77)

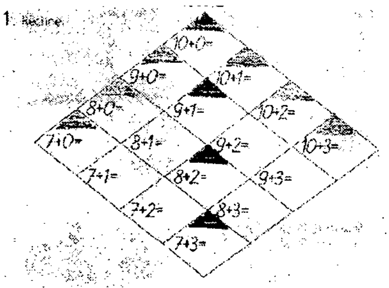


[그림 IV-5] 0+수, 수-0(수학 1-가)
(교육인적자원부, 2004a:64, 69)

이것은 저학년에게 지도하기에 적합한 방법으로 생각되나, 이와 같은 연결이 나중에 곱셈이나 나눗셈에서 연산을 형식적으로 생각하도록 하는 데 방해요소가 될 것으로 생각된다. 따라서 연산의 의미와 더불어 연산 결과의 규칙성을 보여주는 것도 대안이 될 수 있을 것이다. 이와 관련하여서는 독일 교과서에 제시된 방식을 참고할 만하다([그림 IV-6]). 독일 교과서에는 7+0, 7+1, 7+2, 7+3 등을 계열적으로 제시함으로써, 합의 규칙성을 보여준다. 또한 7+0, 8+0, 9+0, 10+0을 계열적으로 보여줌으로써, 덧셈의 항등원으로서의 0의 성질을 보여주고 있다.

<표 IV-2> 교과서와 익힘책에 제시된 0에 대한 간단한 덧셈과 뺄셈

셈의 유형	0+수=수	수+0=수	0+0=0	수-0=수	수-수=0	0-0=0
교재 유형	교과서, 익힘책	익힘책	×	교과서, 익힘책	×	×
도입 시기	1-가	1-가	×	1-가	×	×
문제 개수	1개, 1개	2개	×	1개, 4개	×	×



[그림 IV-6] 수+0(독일교과서),
(Wittmann, & Müller, 2003a :61)

선행연구에 의하면 0처리 오류는 자연수 덧셈 보다는 뺄셈에서 많이 나타나며, 대부분은 피감수에 0이 포함된 상황에서 어떤 수를 빼는 경우에 발생한다고 한다. 그럼에도 불구하고 우리나라 교과서는 피감수에 0이 포함된 경우를 체계적으로 다루고 있지 않다. 현 교육과정에서는 세로셈에서 받아내림이 요구되는 상황이 2-가, 2-나, 3-가, 3-나 단계에서 각각 제시되므로, 각 단계에서 피감수에 0이 포함된 상황을 충분히 다루어 주어야 한다. 그러나 받아내림이 처음 도입되는 2-가 단계에서는 피감수에 0이 포함되는 문제가 한 문제도 제시되지 않으며, 2-나 단계에서는 갑자기 피감수에 0이 연이어 두 개 포함된 문제가 하나 제시된다. 3-가 단계에서는 한 문제도 제시되지 않다가, 3-나 단계에서는 무려 일곱 문제가 제시된다(<표 IV-3>).

아동이 세로셈에서 '0-수'의 상황과 처음으로 부딪히는 시기는 아마도 2-가 단계에서 받아내림을 배운 직후일 것이다. 이 때 아동들은 0이 아닌 수로 배운 받아내림 규칙을 '0-수'의 상황에 일반화해야하는 도전을 받게 된다. 예를 들어 34-17을 푸는데 사용된 알고리즘을 30-17을 푸는데 적용해야 한다. 그러나 교과서에 이러한 문제 상황이 제시되어 있지 않기 때문에, 교사가 의식적으로 지도하지 않는 한, 아동은 스스로 어려움을 극복해야한다. 선행 연구에 의하면 주로 이러한 상황에서 아동들은 자신만의 독창적인 규칙을 개발하게 되며, 이렇게 만들어진 잘못된 규칙은 고착성 또한 강하다. 따라서 두 자리 수의 뺄셈에서 받아내림을 처음 배우는 시점부터 피감수에 0이 포함된 경우를 교사가 명시적으로 다루어 주고, 그 이후 단계에서는 피감수에 0이 한 번 있는 경우, 두 번 있는 경우, 세 번 있는 경우 등과 같이 나누어 체계적으로 지도하는 것이 바람직할 것이다.

3. 0에 관련된 곱셈

우리나라 교육과정에서 곱셈은 2-가 단계에서 처음 도입되나, 이 때 피승수나 승수가 0인 경우는 제시되지 않는다. 곱셈구구는 2-나 단계에서 제시되며, 2, 5 단을 시작으로, 3, 4, 6, 7, 8, 9 단이 제시되고, 마지막으로 1단과 0단이

<표 IV-3> 교과서에 제시된 피감수에 0이 포함된 뺄셈 문제

받아내림을 다루는 단계	2-가	2-나	3-가	3-나
피감수에 0이 포함된 뺄셈 문제	×	500-209-244 (68쪽)	×	7040-561(11쪽) 6043-1687(12쪽) 8340-6957(13쪽) 8200-2597(13쪽) 2000-475-645(15쪽) 6004-3769-1458(15쪽) 8004-4768-2457(15쪽)

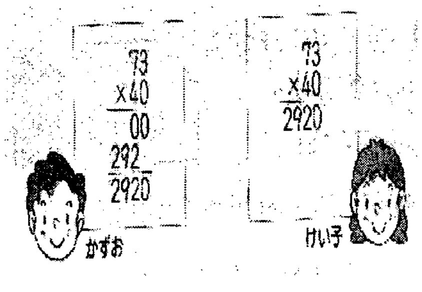
도입된다. 각 단의 도입 방법은 'm개씩 n묶음'과 같이 '묶음' 맥락을 활용하고 있는 반면, 0단은 '점수' 맥락을 활용하여, '0점' 혹은 '한 번도 맞히지 못했음'으로 0×2와 3×0을 도입하고 있다. 0×0은 교과서에서는 제시되어 있지 않으나, 익힘책(2-나)에 곱셈표를 채우는 과정에서 0×0의 결과를 쓰도록 하고 있다. 따라서 교사들이 0×0을 어떻게 지도할 지는 명확하지 않으나, 대체로 '자연수×0=0' 혹은 '0×자연수=0'인 점을 일반화하여 '0×0=0'으로 나아가도록 지도하지 않을까 예상된다. 그러나 이것이 익힘책에 있기 때문에, 교사의 설명 없이 학습자에게 과제로 맡겨질 가능성 또한 높다.

수×0, 0×수, 0×0의 곱은 (어떤 수)×(몇 십), (몇 십)×(몇 십) 등과 같이 끝의 자리에 0이 들어가 있는 수의 곱을 해결하는 과정에서 중요한 역할을 한다. 예를 들어 20×3의 세로셈은 0×3=0이라는 사실이 이용되며, 30×40의 세로셈은 0×0=0, 3×0=0, 0×4=0이라는 사실이 이용된다. 그러나 교과서에 제시된 방법은 이처럼 개별적인 사실을 이용하지 않고, 0이 제거된 상태의 계산에서 '유추'하여 결과를 추측하도록 하고 있다. 예를 들어 '13×30'은 '13×3'에서, '40×30'은 '40×3'에서 유추하여 끝의 자리에 0을 붙이도록 지도한다. 따라서 이를 세로셈으로 해결할 경우, 일반적인 두 자리 수의 세로곱이 3단계로 해결되는 것과 달리, 이 경우는 1단계로 종료된다([그림 IV-7]). 결국 아동에게는 (몇 십)×(몇 십)은 두 자리 수의 세로곱의 특별한 형태로 인식되기보다는 '0을 개수만큼 뒤에 붙이다' 식의 새로운 알고리즘으로 인식될 가능성이 높다. 피승수와 승수에 있는 0의 개수를 세어서, 곱의 결과에 그 개수만큼의 0을 붙이는 방식은 매우 간편하지만, 초등학생들에게는 많은 혼란을 주는 듯하다. 윤희태(2001)의 연구에 의하면, 아동은 승수나 피승수에 몇 십, 몇 백 등과 같이 0이 붙는 계산에 많은 오류를 나타낸다고 한다. 앞에서 제시된 <표 II-2>를 보면, 아동들은 두 자리 수의 곱과 마찬가지로 3단계로 문제를 해결하려 하나, 0×0, 수×0, 0×수의 상황을 해결하지 못하고, 끝내 자신만의 잘못된 규칙을 만들어내게 된다. 또한 1단계로 해결하는 경우에도 0이 제거된 곱을 정상적으로 해결하지 못함을 알 수 있다. 이러한 결과는 아동이 알고리즘을 매우 기계적으로 학습하였다는 것을 의미하며, 이를 위한 교육적 조치가 요구됨을 시사한다.

이와 관련하여 일본 교과서의 전개방법을 참고할 만하다([그림 IV-7]). 일본 교과서에서는 승수가 (몇 십)인 세로셈 알고리즘을 도입할 때, 3단계 방법(그림의 좌측)을 1단계 방법(그림의 우측)과 아울러 제시함으로써, 아동들이 잘못된 규칙을 만들 가능성을 줄이고 있다.

$$\begin{array}{rr} & 32 \\ \times & 24 \\ \hline & 128 \\ & 64 \\ \hline & 768 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 60 \\ \times & 70 \\ \hline & 4200 \end{array}$$

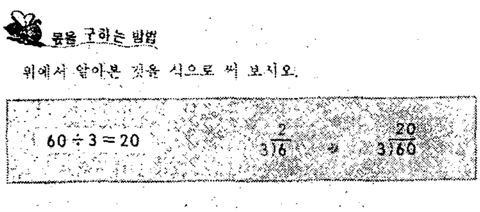
[그림 IV-7] 세로 곱셈의 3단계 알고리즘(좌측)과 1단계 알고리즘(우측)



[그림 IV-8] 승수가 몇 십인 세로곱셈 (細川藤次 外, 2004e:57)

4. 0에 관련된 나눗셈

이미 논의된 바와 같이, 0÷수, 수÷0, 0÷0의 결과에 대해서는 고대 수학자들이나 현대의 학생들이나 한결같이 혼란스럽다. 이러한 혼란은 형식불역의 원리를 이해함으로써 해결되지만, 현재의 교육과정에서 명시적으로 지도되는 사항이 아니므로, 학생들의 어려움을 예측하기란 어렵지 않다. 현재 초등 교육과정에서 위의 세 가지는 모두 명시적으로 다루어지고 있지 않으며, 중등 교육과정에서 공리적으로 제시하도록 되어 있다. 그러나 초등교육과정에서도 이들이 암묵적으로 이용되는 상황은 있다. 예를 들어 48÷2의 경우, 4÷2와 8÷2를 각각 하여 몫으로 24를 쓰는 것과 마찬가지로, 60÷3을 할 때, 6÷3과 0÷3의 두 가지를 이용하면 몫을 구할 수 있다. 그러나 현 교과서에서는 0÷수의 상황을 피하기 위해서인지 몰라도, 곱셈과 마찬가지로 유추를 사용하고 있다. 즉 6÷3=2의 결과를 유추하여, 60÷3을 계산하도록 한다([그림 IV-9]).



[그림 IV-9] 피제수가 몇 십인 나눗셈
(교육인적자원부, 2004c: 3-나, 55)

이 방법은 0을 떼고 계산 한 후, 몫에 0을 붙이도록 하는 것으로, 곱셈 알고리즘과 유사하다. 그러나 곱셈에서 논의되었듯이, 이 방법은 학생들에게 일반적인 (두 자리 수)÷(한 자리 수)의 알고리즘과 별개의 방법으로 인식되어 기계적인 암기를 조장할 수 있다. 또한 이런 식으로 지도해도 일부 학생들은 일반적인 표준 알고리즘을 적용하여 문제를 해결하려 하기 때문에 필연적으로 0÷수의 상황에 부딪히게 된다. 이 경우 0÷수를 제대로 처리하지 못하고 자신만의 규칙을 만들어냄으로써 나눗셈 오류를 유발할 가능성이 있다. 뿐만 아니라 4808÷8과 같이 몫에 0이 포함되는 경우의 문제가 교과서와 익힘책에 제시되어 있지 않기 때문에, 오류 유발 가능성을 높이고 있다. 따라서 '0÷수=0'이라는 정도는 명시적으로 지도하는 것이 바람직하다고 생각되나, 이와 관련된 외국의 사례는 찾아 볼 수 없다.

0÷수=0 뿐만 아니라 수÷0=불능이라는 사실도 초등교육과정에서 암묵적으로 이용된다. 5-가 단계에서 동치분수 만드는 법을 학습할 때, '분모와 분자에 0이 아닌 같은 수로 나누면 크기가 같은 분수가 된다.'는 내용이 제시된다. 또한 6-가 비례식의 성질, 6-나 연비의 성질을 학습할 때, '전항과 후항에 0이 아닌 같은 수로 나누었을 때, 비의 값은 변하지 않는다.'와 '연비는 각 항을 0이 아닌 같은 수로 나누어 간단한 자연수의 연비로 나타낼 수 있다.'라는 내용이 제시된다. 이것은 모두 '수÷0=불능'과 관련된 사실로 쉽게 말해 수를 0으로 나누었을 때 해가 없음을 의미한다. 따라서 동치분수, 비례식, 연비 등을 지도할 때 왜 0으로 나눌 수 없는가에 대해 문제를 제기하는 것도 학생들이 0에 대해 관심을 갖게 하는 하나의 방법이 될 수 있다. 그러나 이 경우 연산의 결과 즉 수÷0이 불능이라는 것을 정당화하기 위해 초등학생들에게 형식불역의 원리를 제시해야한다는 점에서 부담스러울 수 있다. 현재의 공리적 접근을 택할 것인지, 아니면 형식불역의 원리를 초등화 혹은 중등화하는 방안을 택할 것인지에 대해서는 차후 연구에서 논의가 필요하다. 수÷0이나 0÷0의 계산 결과에 대한 부정확한 지식이 곧바로 자연수나 소수의 나눗셈 오류와

연결되는 것은 아니므로, 이에 대한 논의는 논제를 벗어난다.

V. 0의 지도를 위한 시사점

지금까지 논의된 바로는 학생들의 0처리 오류는 0에 대한 인식론적 장애 및 0에 대한 불명확한 지도에서 비롯된 것이라 하겠다. 이 장에서는 앞장에서 고찰된 내용을 바탕으로 효과적인 0의 지도를 위한 시사점을 정리해 보고자 한다.

먼저 0의 도입 시기에 대해 정리해 보면, 우리나라는 5까지의 수를 배운 이후 '아무 것도 없는 것'을 나타내는 기호로 0을 도입하고 있으나, 이와 같은 방식으로는 십진기수법에서의 자리지기로서의 0의 역할을 인식하기 어렵다. 따라서 도입 시기를 9까지의 수를 배운 이후로 늦추던가, 아니면 50까지의 수를 배우는 과정에서 묶음과 낱개로 나누는 활동을 통해 낱개가 없음을 나타내기 위한 기호로서 재인시키는 방법을 생각해 볼 수 있다. 또한 2학년이나 3학년 과정에서는 세 자리 수와 네 자리수를 배울 때, 바빌로니아나 마야와 같은 고대 기수법을 부분적으로 도입하여 0이 없음으로 인해 일어나는 불편한 점을 느껴보도록 하는 것도 십진기수법에서의 0의 역할을 이해하는 데 도움이 될 것으로 생각한다.

둘째, 0을 대상으로 하는 간단한 셈에 대해 살펴본 바로는, 각각의 셈 결과에 대해 명시적이고 체계적인 방법으로 지도하는 것이 바람직하다고 생각된다. 우리나라 교과서에서는 사칙계산에 필요한 0을 대상으로 하는 셈 가운데, 수+0, 0+0, 수-수, 0-0, 0×0, 0÷수가 다루어지고 있지 않다. 물론 이 가운데 몇 개는 익힘책에 제시되어 있으나, 이 경우 교사가 명시적으로 설명하지 않고 넘어갈 수 있기 때문에 셈 결과에 대해 아동의 오개념이 개입할 여지를 제공한다. 도입 방법도 여러 가지 자연수의 계산 문제를 다루는 과정에서 제한적으로 한 두 문제 포함되는 정도로 다루어지고 있기 때문에, 0에 대한 배려가 부족하다. 따라서 차후 교과서 제작 시에는 일본의 교과서와 같이 0에 대한 셈을 하나의 독립 주제로 다루면서, 모든 경우를 비교적 명확하게 다루는 방안을 고려해 보아야 한다.

0에 대한 셈을 두 자리 수의 연산에서 그 필요성이 제기될 때 도입하거나, 혹은 복습하는 것도 하나의 방법이 될 것이다. 예를 들어 30+40의 세로셈을 하면서 0+0은 얼마인가를 생각해 보거나, 20×30의 세로셈을 하면서 수×0과 0×0은 얼마인가를 생각해 봄으로써, 학생들로 하여금 0에 대해 생각해 볼 기회를 제공할 수 있을 것이다.

0에 대한 셈의 결과에 대한 논의는 초등학생을 대상으로 하는 만큼 연산과 실제적인 행위와 연결 지을 수밖에 없을 것이다. 그러나 곱하기 0이나 나누기 0이 실제 행위와 맞지 않는 부분이 있으므로, 이를 염두에 두고 덧셈과 뺄셈에서부터 가급적 계산 결과의 규칙성이 보이도록 문제를 계열적으로 제시해 주는 것이 좋을 것이다. 예를 들어 3+2=5, 3+1=4, 3+0=? 와 같은 식으로 규칙성을 이용해 문제의 해를 구하도록 하는 것도 하나의 방법이 될 수 있다.

셋째, 0처리 오류가 유발될 수 있는 유형의 문제는 가급적 수업시간에 교사가 직접 설명하거나 교실 토의를 하도록 하여 명시적으로 짚고 넘어가도록 한다. 예를 들어 피감수에 0이 포함된 뺄셈은, 0이 하나인 경우, 0이 두개인 경우, 0이 세 개인 경우로 나누어 명시적으로 다루어 줌으로써, 학생들이 그릇된 절차를 만들 가능성을 최소화 한다. 곱셈의 경우는 승수

가 (몇 십)인 경우의 다양한 문제를 같이 풀어 주거나, 대표적인 오답을 소재로 수업을 진행할 수 있다. 나눗셈의 경우는 몫을 어림하도록 하여 주어진 수에서 0을 떼어내고 해석하는 것의 잘못을 깨닫게 할 수 있다.

또한 0이 포함된 계산 문제의 알고리즘을 0이 포함되지 않은 문제의 알고리즘과 별개로 처리하여 지도할 것이 아니라, 일반적인 알고리즘의 적용으로 0이 포함된 문제를 해결할 수 있음을 보여 주어야 한다. 현재 우리나라 교과서에는 곱셈이나 나눗셈에서 0이 포함된 경우, 0을 떼어 놓고 계산하게 한 후, 0을 붙이는 식으로 유추를 이용하여 지도하고 있다. 그러나 이렇게 지도하여도, 일부 아동은 일반 알고리즘을 적용하려고 한다. 따라서 처음부터 일반 알고리즘을 0이 포함된 경우에 적용하는 방법을 지도하는 것이 나을 것이다. 예를 들어 23×15를 구하는 알고리즘을 학습한 후, 바로 그 알고리즘을 이용해 23×20을 구해보도록 한다. 그리하여 불필요한 단계가 있음을 확인시키고, 간단하게 0을 붙이는 방법을 제시하도록 한다.

VI. 마치며

이 연구는 사칙 계산 과정에서 학생들이 공통적으로 0을 처리하는 것의 어려움을 느낀다는 점에 착안하여, 학생들의 0처리 오류의 특징 및 그 원인을 살펴보고자 하였다. 오류 연구에서 드러난 학생들의 0처리 오류 패턴은 크게 세 가지이다. 첫째, 다른 수에 적용했던 알고리즘을 0의 경우에 적용하지 못하고, 잘못된 계산 절차를 창안해 내는 것이다. 둘째, 0을 있으나 마나한 기호로 간주하여 주어진 수를 잘못 해석하는 것이다. 셋째, 0을 대상으로 하는 간단한 셈을 부정확하게 알고 있어 계산에 실패하는 것이다. 이 연구에서는 이와 같은 문제의 기원을 찾고자 수학사 및 교과서 분석을 시도하였다. 그 결과 오늘날의 사람들이 가지고 있는 0에 대한 어려움이 역사적으로도 뿌리를 두고 있을 뿐만 아니라, 쉽게 극복되는 것이 아님을 밝혀내었다. 따라서 학생들의 0에 대한 인식론적 장애를 극복하기 위해서는 명확하고 세심한 교육적 처방이 필요함을 알 수 있다.

0의 지도라는 관점에서 수학 교과서 및 익힘책을 분석한 결과, 0의 도입 시기와 방법에 대해 개선의 여지가 있으며, 0을 대상으로 하는 간단한 셈이 부분적으로 제시되어 있지 않음이 밝혀졌다. 또한 학생들이 자주 범하는 0처리 오류 유형이 체계적으로 다루어지고 있지 않았다. 이에 따라 이 연구에서는 0의 지도와 관련하여 세 가지 방안을 제안하였다. 첫째, 0의 도입 시기를 늦추거나, 혹은 두 자리 수를 묶음과 낱개로 분할하는 과정에서 0의 역할을 강조하자는 것이다. 둘째, 0을 대상으로 하는 간단한 계산 결과를 체계적이고 명확한 방식으로 빠짐없이 지도하여 학생들이 그릇된 규칙을 만들 여지를 최소화하자는 것이다. 또한 0을 대상으로 하는 계산의 결과를 도출하기 위해 연산과 실제 행위를 연관 짓는 것 이외에 규칙성을 이용하게 함으로써, 계산의 형식적 측면을 경험하도록 하자는 것이다. 셋째, 오류 유발 가능성이 높은 문제를 교과서에 제시하고, 교사가 수업시간에 명시적으로 다루어줌으로써, 학생들의 그릇된 절차 개발을 사전에 방지하자는 것이다. 물론 이러한 사항은 제안에 불과하므로, 차후 이것의 타당성을 검증하기 위한 후속 연구를 기대하는 바이다.

참고문헌

강형구(1989). **분수의 사칙연산에 대한 오류 유형 조사 및 그 지도 방안 연구**. 석사학위논문. 국민대학교.

교육인적자원부(2004a). **수학 교과서 1-가·1-나**. 서울:대한교과서주식회사.

__________(2004b). **수학 교과서 2-가·2-나**. 서울:대한교과서주식회사.

__________(2004c). **수학 교과서 3-가·3-나**. 서울:대한교과서주식회사.

__________(2004d). **수학 교과서 4-가·4-나**. 서울:대한교과서주식회사.

__________(2004e). **수학 교과서 5-가·5-나**. 서울:대한교과서주식회사.

__________(2004f). **수학 교과서 6-가·6-나**. 서울:대한교과서주식회사.

__________(2004g). **수학익힘책 1-가·1-나**. 서울:대한교과서주식회사.

__________(2004h). **수학익힘책 2-가·2-나**. 서울:대한교과서주식회사.

김수미(2004). 고대 수학자와 현대 예비교사들의 영처리 오류 및 교수학적 시사점. **과학교육논총, 16**. 경인교육대학교 과학교육연구소.

김종태(1975). **산수 학습에 따른 계산 능력 향상을 위한 오류의 교정 지도-가감승제를 중심으로-** 석사학위논문. 동아대학교.

김주영, 김성숙(2001). 영의 역사와 영에 얽힌 오류들. **한국수학사학회지 14**(1), 101-108.

김진식(1995). **국민학교 아동의 분수 계산에서 오류 유형 분석**. 석사학위논문, 한국교원대학교.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울대학교출판부.

윤희태(2002). **초등학생들의 기초 계산 오류에 대한 분석적 연구**. 석사학위논문, 인천교육대학교.

이경아(1997). **유리수 계산에서 나타나는 오류의 현상적 분석-초등학교 6학년을 중심으로-**. 석사학위논문, 이화여자대학교.

이영선(2004). **초등 수학 수업에서의 계산 오류 활용에 관한 연구**. 경인교육대학교 교육대학원.

이종문(1983). **국민학교 산수 학습 계산 과정의 오류 분석에 근거한 치료 프로그램 개발에 관한 연구**. 석사학위논문. 계명대학교

장영숙(2002). **오류 분석을 통한 뺄셈 부진아 지도 방안 연구**. 석사학위논문, 경인교육대학교.

조병윤(1992). **분수 계산 오류의 효과적이 교정지도 방안**. 석사학위논문, 한국교원대학교.

細川藤次 外(2004a). **算數1年**. 大阪: 啓林館.

__________(2004b). **算數2年上**. 大阪: 啓林館.

__________(2004c). **算數2年下**. 大阪: 啓林館.

__________(2004d). **算數3年上**. 大阪: 啓林館.

__________(2004e). **算數3年下**. 大阪: 啓林館.

Bricken, W. M. (1987). *Analyzing errors in elementary mathematics.* Doctoral Thesis. Stanford University.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. *Researches en Didactique des Mathematicques, 4*, 2.

Brown, J. S., & Burton, R. R. (1978). Diagnostic model for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science, 2*. 155-192.

Clements, M. A. (1980). Analyzing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 2, 1-21.

Hadar, N. M. & Zaslavsky. O. (1987). An

empirical classical model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18,* 3-14.

Kaplan, R. (2003). **존재하는 무 0의 세계**. (심재관, 역). 이끌리오. (영어 원작은 1999년 출판).

Kilian, L., Cahill, E., Ryan, C., Sutherland, D., & Tascetta, D. (1980). Errors that are common in multiplication. *Arithmetic Teacher,* Jan.22-25. Reston, VA:NCTM.

Maurer, S. B. (1987). New knowledge about errors and new views about learners:what they mean to educators and more educators would like to know. In Schoenfeld, A. H.(Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc. 165-188.

Newmann, M. A. (1981). Compression of the language of mathematics, *Mathematics Education Research of Australia.* Adelaide.

Reys, R. E., Suydam, M. N., & Lindquist, M. M. (1984). *Helping Children Learn Mathematics.* Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.

Smith, S. (2002). **수학사 가볍게 읽기**. (황선욱, 역). 한승. (영어원작 1996년 출판)

Spitzer, H. F. (1954). *The Teaching of Arithmetic.* 2d ed. Boston: Houghton Mifflin Co.

Suydam, M. N., & Dessart, D. J. (1976). *Classroom Ideas from Research on Computational Skills.* Reston, Va. : NCTM.

Wheat, H. G. (1983). *The Psychology and Teaching of Arithmetic.* 1937. Reprint. Boston, Mass. : D.C.Heath & Co.

Wheeler, M. M. (2002). Children's understanding of zero and infinity. In Chambers, D. L.(Ed.), *Putting Research into Practice in the Elementary Grades.* NCTM. pp. 29-32.

Wilson, P. S. (2001). Zero: A special case. *Mathematics Teaching in the Middle School.* Vol 6, No 5, January 2001. NCTM.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N.(2003a). *Das Zahlenbuch Mathematik im 1.* Schuljahr. Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N.(2003b). *Das Zahlenbuch Mathematik im 2.* Schuljahr. Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag.

The Origin and Instruction of Computational Errors with Zero

Kim, Soo Mi (Gyeongin National University of Education)

This paper is to find out the reason why students often make mistakes with 0 during computation and to get some instructional implication. For this, history of 0 is reviewed and mathematics textbook and workbook are analyzed. History of 0 tells us that the ancients had almost the same problem with 0 as we have. So we can guess children's problems with 0 have a kind of epistemological obstacles. And textbook analysis tells us that there are some instructional problems with 0 in textbooks: method and time of introducing 0, method of introducing computational algorithms, implicit teaching of the number facts with 0, ignoring the problems which can give rise to errors with 0. Finally, As a reult of analysis of Japanese and German textbooks, three instructional implications are induced:(i) emphasis of role of 0 as a place holder in decimal numeration system (ii) explicit and systematic teaching of the process and product of calculation with 0 (iii) giving practice of problems which can give rise to errors with 0 for prevention of systematical errors with 0.

* key words : zero(영), computational error(계산 오류), analysis of textbook(교과서 분석), origin of error(오류의 원인), teaching zero(영의 지도)

논문접수 : 2006. 10. 31
심사완료 : 2006. 12. 7