

< 논문 >

보간 웨이블릿 기반의 Sparse Point Representation

박준표* · 이도형† · 맹주성**
(2005년 3월 10일 접수, 2005년 12월 22일 심사완료)

Sparse Point Representation Based on Interpolation Wavelets

Junpyo Park, Dohyung Lee and JooSung Maeng

Key Words: CFD(전산유체역학), Interpolation Wavelets(보간 웨이블릿), Data Compression(데이터 압축), Sparse Point Representation(등성간 격자 표현법)

Abstract

A Sparse Point Representation(SPR) based on interpolation wavelets is presented. The SPR is implemented for the purpose of CFD data compression. Unlike conventional wavelet transformation, the SPR relieves computing workload in the similar fashion of lifting scheme that includes splitting and prediction procedures in sequence. However, SPR skips update procedure that is major part of lifting scheme. Data compression can be achieved by proper thresholding method. The advantage of the SPR method is that, by keeping even point physical values, low frequency filtering procedure is omitted and its related unphysical thresholding mechanism can be avoided in reconstruction process. Extra singular feature detection algorithm is implemented for preserving singular features such as shock and vortices. Several numerical tests show the adequacy of SPR for the CFD data. It is also shown that it can be easily extended to nonlinear adaptive wavelets for enhanced feature capturing.

1. 서 론

유체 유동의 3차원 수치 모델링(Modeling)은 자연 현상에서의 유체 역학 효과를 이해하는데 중요한 도구로 각광받고 있다. 컴퓨터 성능의 향상으로 전산유체역학(Computational Fluid Dynamics, 이하 CFD)에서 다루어지는 모델들도 늘어났고, 정교한 해석을 위해 더욱더 조밀한 격자를 사용함에 따라, 처리해야 되는 데이터양도 크게 증가하였다. 최근 CPU의 성능이 빠른 속도로 향상되

고 있지만 데이터(data) 저장 장치는 이 속도를 따라가지 못하고 있다. 이로 인해 데이터 저장 비용 증가가 중요한 문제로 대두되고 있다.⁽¹⁾ 또한, 최근 국가 그리드(grid) 구축을 통해 컴퓨터 자원의 통합을 꾀하고 있는데, 각 자원들 간의 원활한 전송과 데이터 분석의 용이성을 위해 데이터 압축(compression)은 불가피하게 되었다.

실질적인 데이터 압축을 위해 신호처리와 영상 압축 등에서 적용되고 있는 웨이블릿(wavelets)^(2,3)을 이용하고자 한다. 특히, 최근에는 웨이블릿을 이용하여 난류 응집성을 추출⁽⁴⁾하는 등 유체 역학 분야에서도 조금씩 이용되어지고 있다.

영상 압축과는 달리 CFD 데이터는 결과물의 이미지(image)보다는 분석에 필요한 데이터 특성(quality) 유지가 더욱 중요하기 때문에 높은 압축율을 가지면서도 특징들(features)을 잘 보존하는 것이 중요하다.⁽⁹⁾

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계정보경영공학부
E-mail : dohyung@hanyang.ac.kr
TEL : (031)400-5289 FAX : (031)406-5550

* 한양대학교 대학원 기계공학과

** 회원, 한양대학교 기계공학과

Trott⁽⁵⁾ 등은 Plot-3D형식의 데이터에 웨이블릿(wavelet) 변환을 적용한 후 Huffman codes를 적용하여 압축하였다. Lee⁽⁶⁻⁹⁾는 Alpert⁽¹⁰⁾의 다중웨이블릿의 기저(basis)를 바탕으로 Beam과 Warming⁽¹¹⁾에 의해서 개발된 Supercompact Multiwavelets을 3차원으로 확장, 적용하여 높은 압축율과 정확도를 얻었다. 특히, Full-3D Supercompact Multiwavelets은 직교성(orthogonality), 대칭성(symmetry), 집약적인 지지(compact support)의 장점을 지니고 있고 특이점들에 걸쳐있는 유동정보간의 불필요한 상호작용을 막을 수 있다. 그러나 적용 범위에 있어 2의 급수 크기 제한을 받게 되어 다중해상법 적용시 각 차원의 방법을 조합한 방법(Hybrid method)⁽¹²⁾을 이용하기도 하였다. Schmalz⁽¹⁾은 기존의 영상 압축에 사용되는 압축 기법들(JPEG, MPEG)을 이용하여 CFD 데이터를 압축하였다.

본 연구에서는 Deslauriers와 Dubuc의 보간 웨이블릿^(13,14)을 이용한 Sparse Point Representation(SCR)⁽¹⁵⁾이 CFD 데이터 압축에 적합한 도구(tool)인지를 확인하고자 한다. SCR은 기존 웨이블릿 변환에서의 다중해상도법(Multiresolution method)을 적용하는 대신 리프팅법(lifting scheme)⁽¹⁶⁾과 유사한 분해, 예측 과정으로 이루어지게 되어, 데이터의 변화 정도에 따라 정확도의 차수를 국부적으로 변화시키는 것을 가능하게 한다. 이에 따라 CFD 데이터와 같이 대부분 영역에서 부드럽게 변화하게 되고 국부적으로 충격과와 같은 특이점에서만 불균일점을 갖는 데이터 처리에 유리하게 된다. 또한, 임계치리법(thresholding method)을 통해 실제적인 압축효과를 얻고, Singular Feature Detection으로 특성들을 정확하게 유지한다. 실제 CFD 시뮬레이션(simulation) 데이터에 SCR을 적용하여 압축한 후 복원함으로써 압축율과 정확도를 분석한다.

2. 이론

기존의 Fourier 변환은 기저함수(basis function)의 삼각함수 특성으로 인해 데이터의 전반적인 주기성을 분석하는 데는 유리하지만, 불연속적인 부분(예: Shock)에서는 큰 약점을 갖게 된다. 이와는 달리, 웨이블릿 변환에서는 여러 척도(scale)들을 이용함으로써 데이터의 전체적인 모습뿐만 아니라 세부적인 모습까지도 분석할 수 있다.⁽¹⁷⁾

2.1 웨이블릿 변환

웨이블릿 변환은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_j c_{j,k} \varphi_{j,k}(x) + \sum_{j,k} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (1)$$

여기에서,

$\varphi_{j,k}(x)$: scaling function,

$\psi_{j,k}(x)$: wavelet function,

$c_{j,k}$: scaling coefficients,

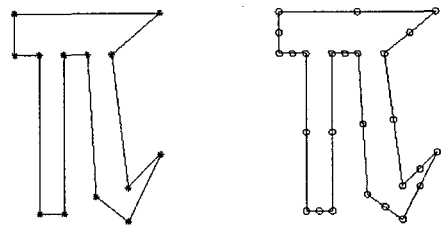
$d_{j,k}$: wavelet coefficients.

$c_{j,k}$ 는 앞서 설명한 전체적인 특성을 내포하게 되고 $d_{j,k}$ 는 세부적인 특징의 정보를 갖게 된다. 첨자 j 는 데이터 위치를 나타내며 k 는 해상도 단계를 나타낸다.

2.2 보간 웨이블릿

보간 웨이블릿은 다른 웨이블릿과는 다른 특별한 형태이다. 그 중에서, 본 연구에서는 Dubuc-Deslauriers Interpolation 웨이블릿^(13,14)을 사용한다. 음이 아닌 정수 N 에 대하여 $(2N+1)$ 차 다항식 $p(x)$ 와 계수 a 를 이용하여 Fig. 1(a), (b)에서처럼 원 데이터 사이의 새로운 값을 계산한다.

$$\sum_k a_{j-2k} p(x) = p\left(\frac{j}{2}\right) \quad (2)$$



(a) Original points

(b) One step of the subdivision scheme



(c) 3rd step of the scheme(V_0 : original dataset)

Fig. 1 Procedure of interpolation wavelets

식 (2)에서의 함수 관계를 위해서는 계수값을 설정하는 것이 필요한데, Dubuc-Deslauriers는 다음에서와 같이 Lagrange 다항식을 이용하였다.

$$L_k(x) = \prod_{k \neq j=-N}^{N+1} \frac{x-j}{k-j}, k=-N, \dots, N+1 \quad (3)$$

$$L_k(x) = \delta_{k,j}, k, j=-N, \dots, N+1 \quad (4)$$

$$\sum_{k=-N}^{N+1} p(k)L_k(x) = p(x) \quad (5)$$

식 (2)에서 j 가 0과 1일 때, 식 (4)와 (5)을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$a_{2j} + \sum_{k \in \{-N, \dots, N+1\}} a_{2k}L_{-j}(k) = \delta_{j,0} \quad (6)$$

$$a_{2j+1} + \sum_{k \in \{-N, \dots, N+1\}} a_{1-2k}L_{-j}(k) = L_{-j}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (7)$$

여기에서, $j = -N-1, \dots, N$ 이다. 또한, 계수 값들이 가장 적은 지지(minimally supported)를 갖기 위해서 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$a_{2j} = \delta_{j,0}, j \in Z \quad (8)$$

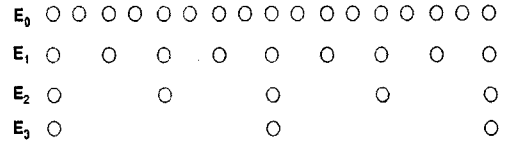
$$a_{2j+1} = L_{-j}, j = -N-1, \dots, N \quad (9)$$

$$a_{2j+1} = 0, j \geq N+1 \text{ or } j \leq -N-2 \quad (10)$$

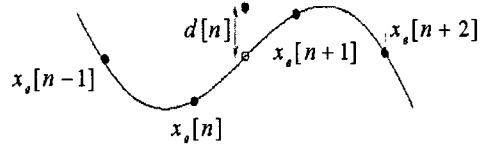
위의 식들을 이용하여 N 이 1일 때 계수 값들을 구하면 다음과 같다.

$$a_{2j+1} = \begin{cases} -\frac{1}{16}, j = -2 \\ \frac{9}{16}, j = -1 \\ \frac{9}{16}, j = 0 \\ -\frac{1}{16}, j = 1 \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

식 (2)를 이용하여 반복적으로 Scheme을 적용하면 Fig. 1(c)에서처럼 제일 밑줄의 촘촘한 데이터를



(a) Procedure of sparse point representation



(b) Predicting odd point

Fig. 2 Sparse point representation

구하게 되는데, 이를 interpolatory scheme⁽¹⁸⁾ 혹은 subdivision scheme이라 부른다.

2.3 Sparse Point Representation

Sparse Point Representation⁽¹⁵⁾은 앞 절에서 설명한 Dubuc-Deslauriers subdivision scheme⁽¹⁸⁾을 반대로 적용하게 된다. 듥성한 격자로부터 조밀한 격자로 예측했던 것과는 달리 조밀한 격자를 원 때 이터로 이용하게 된다.

Fig. 2(a)에서 보는 것처럼 E_0 가 원 데이터로 사용되고, 한 단계를 적용하였을 때 짝수 점들은 그대로 남기고 홀수 점들은 짝수 점들을 이용하여 예측하게 되는데, Fig. 2(b)에서와 같이 예측한 값과 원래의 홀수 점에서의 값과의 차를 새로운 홀수 점 값으로 저장하며 4차일 경우 식 (12)와 같다. 또한, 경계면에서는 2차를 사용하여 가상 격자 사용을 제한한다.

$$d[n] = x_o[n] - \frac{(-x_e[n-1] + 9x_e[n] + 9x_e[n+1] - x_e[n+2])}{16} \quad (12)$$

2.4 리프팅법

앞에서 설명한 SPR법은 리프팅법⁽¹⁶⁾과 유사한 구조를 가진다. 리프팅법은 기존 웨이블렛 변환을 이용할 때의 많은 계산량을 줄이기 위해 제안된 방법이다. Fig. 3(b)에서 보는 바와 같이 리프팅법은 분할(splitting), 예측(prediction), 갱신(update)의 세단계로 이루어지며, Fig. 3(a)에서 처

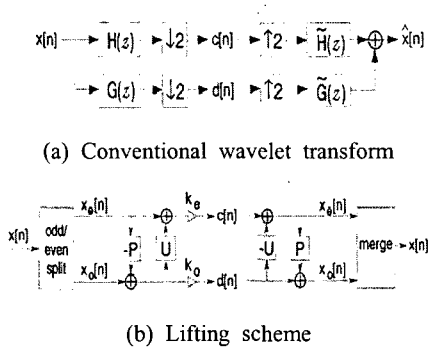


Fig. 3 Comparison of conventional wavelet transform and lifting scheme

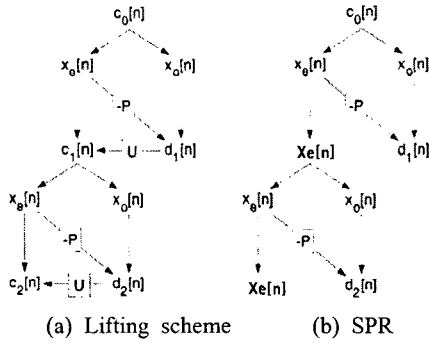


Fig. 4 Lifting scheme vs. SPR

럼 계수 저장 공간을 따로 필요로 하지 않고 입력된 데이터를 갱신함으로써 계산량이 절반 정도로 줄어들고 중간 메모리를 사용하지 않는 장점을 가지게 된다.

$$c[n] = x_e[n] + \frac{(-d[n-2] + 9d[n-1] + 9d[n] - d[n+1])}{32} \quad (13)$$

SPR은 리프팅법에서 식 (13)과 같이 나타나는 갱신단계를 생략함으로써 Fig. 3(b)에서의 $c[n]$ 값이 초기의 짝수 점(even)에서의 값을 그대로 유지하게 되어 Fig. 4에서처럼 여러 단계로의 적용이 가능해진다. 이 때, 짝수 점에 대한 물리적 정보가 그대로 보존되기 때문에 위에서 설명할 임계처리법을 적용한 후 복원할 때 비 물리적 오차가 짝수 점에 전달되는 것을 막을 수 있다.

2.5 임계처리법

Dubuc-Deslauriers의 보간 웨이블릿을 통해 적절하게 예측한 값은 기존의 값들과 매우 유사하여 작은 계수 값들을 갖는다. 이때, 적절한 임계처리값보다 작은 값들을 버림으로써 실질적인 압축효과를 얻을 수 있게 된다. SPR에서는 각 해상도 단계(level)마다 임계처리가 적용된다. 정확도를 유지하면서도 큰 압축율을 얻기 위해서는 적절한 임계처리법이 중요하다. 여기서는 Donoho^(19,20)에 의해 제안된 방법을 사용한다.

$$d[n] = \begin{cases} d, & \text{if } |f_{\max} \times \epsilon| \geq d \\ 0, & \text{if } |f_{\max} \times \epsilon| < d \end{cases} \quad (14)$$

특히, 각 함수 값들의 크기를 고려하기 위하여 최대값과 임계처리값의 곱을 사용한다.

2.6 Singular Feature Detection법

CFD데이터는 대부분의 영역이 매끄럽고 국부적으로 충격파, 와동, 전단층 등의 불연속성과 특이성(singularity)을 갖는다. 압축 후, 높은 정확도를 유지하기 위해서는 이러한 특성들이 잘 보존되어야 한다. 이를 위해 Singular Feature Detection법을 제안한다. SPR을 적용하기 전에 불연속적인 값들을 탐색하여 저장한 후 SPR이 끝난 후에 다시 이 값들을 불러들이는 방식으로 다음과 같다.

$$\text{memory } f_i, \text{ if } |f_{i+1} - f_i| > |\lambda \times f_{\max}| \quad (15)$$

여기에서, λ 는 Detection 계수이다.

3. CFD 데이터에의 적용

2가지 CFD 시뮬레이션 데이터를 압축하였다. 압축율은 데이터 계수의 총수와 SPR 적용 후 필요한 계수수의 비로 나타내고, 정확도는 L^2 Ratio 오차로 나타내며 다음과 같다.

$$r_{\text{comp}} = \frac{N}{S} \quad (16)$$

N = Number of points in the dataset,

S = Number of Compressed coefficients.

$$L^2 \text{ Ratio Error} = \frac{\sqrt{\sum_{ijk} \|P_{ijk} - O_{ijk}\|^2}}{N} \quad (17)$$

P = Reconstructed dataset value,

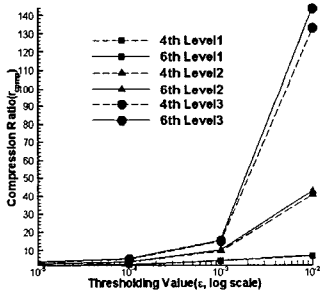
O = Original dataset value,

N_{grid} = Number of points in the dataset.

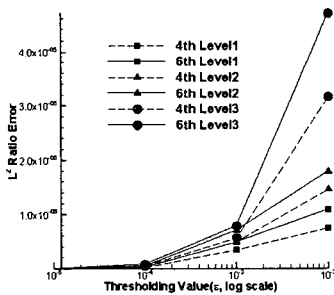
또한, 예측에는 4차와 6차의 보간 웨이블릿을 사용하며 계수값들은 Table 1과 같다.

Table 1 4th & 6th order Prediction coefficients

Order	Prediction coefficients
4th	$1/16\{-1,9,9,-1\}$
6th	$1/256\{3,-25,150,150,-25,3\}$



(a) Compression ratio



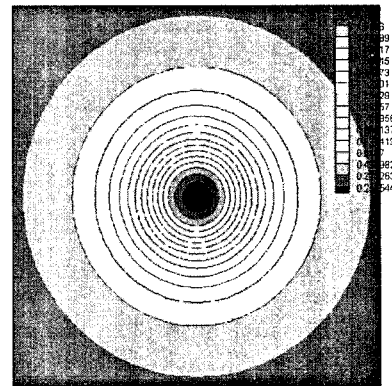
(b) L² ratio error

Fig. 5 Comparison for the Rott's vortex propagation solution

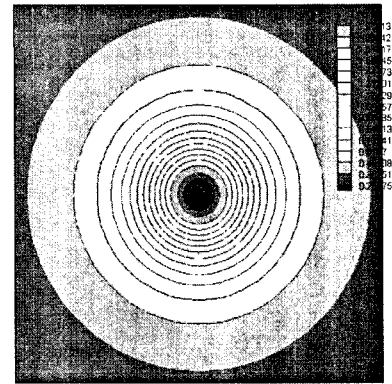
3.1 Rott의 와류 전파 해

첫 번째 적용 사례는 Rott⁽²¹⁾의 와류(vortex) 전파에 관한 데이터이다. Rott의 해(solution)는 Navier-Stokes 방정식의 해로써 정상상태에서의 3D 축 대칭 와류(vortex)를 나타낸다. 이 와류는 자유류 속도의 증가와 함께 유선 방향으로 전파된다. SPR은 적용범위가 2의 급수와 정수의 곱인 경우로 제한된다. 따라서 11×51×51의 데이터를 9×49×49의 격자 크기로 축소하여 사용하며, 약 7000여개의 격자가 SPR의 적용에서 제외된다. 또한, 데이터 대부분이 Fig. 6(a)에서 보는 것처럼 매끄럽기 때문에 Singular Feature Detection은 적용하지 않는다.

Fig. 5는 SPR로 압축했을 때의 임계처리 값에 따른 압축율과 L² Ratio 오차를 차례대로 나타낸다. 임계처리 값의 눈금은 Log 단위이다. Fig. 5



(a) Before compression



(b) After compression

Fig. 6 Energy contour of Rott's vortex propagation dataset (4th Order, $\epsilon = 1.32 \times 10^{-2}$, 2nd Level)

에서 보는 것처럼 각각의 임계치리값들에 대하여 6차 웨이블릿을 이용하면 4차 웨이블릿으로 압축했을 때보다 압축율은 조금 높아지지만 오차는 그보다 큰 폭으로 커지는 것을 확인할 수 있다. 이것은, 6차의 웨이블릿이 4차의 웨이블릿보다 더 먼 곳의 점들을 예측에 사용하기 때문에 나타나는 현상이다. 또한, 같은 그림에서 보듯이 해상도 단계에 따라서 압축율과 오차가 크게 다르고, 특히, 이 경우에는 2차 해상도가 임계치이다.

Fig. 6은 원 데이터와 4차 웨이블릿으로 1.32×10^{-2} 의 임계치리값으로 2단계까지 SPR을 적용하여 압축 후 복원한 데이터를 나타내는 그림으로 거의 차이가 없음을 알 수 있다. 이 때, 압축율은 42.6이고 오차는 2.08×10^{-5} 이다.

3.2 천음속 영역에서의 3차원 날개 압력분포

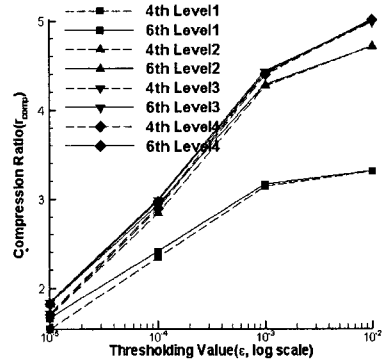
두 번째 적용사례는 천음속(transonic) 영역에서 3차원 날개의 압력분포에 관한 CFD 해석 데이터이다. 이 데이터는 Navier-Stokes 방정식의 해이고 Mach 수는 0.8이다. 격자 크기는 $33 \times 33 \times 129$ 로 위의 경우와는 다르게 그대로 적용할 수 있다. 또한, 충격파와 같은 불균일점들을 보존하기 위해 Singular Feature Detection을 적용하였다.

Fig. 7은 위에서와 마찬가지로 4차와 6차 웨이블릿을 사용했을 때의 임계치리값에 따른 압축율과 오차를 나타낸 그림이다. 임계치리값이 10^{-3} 일 때부터 압축율과 오차가 큰 폭으로 변하는 것을 확인할 수 있는데, 적절한 임계치리값이 정확하고 효율적인 압축에 중요한 요소임을 보여 준다.

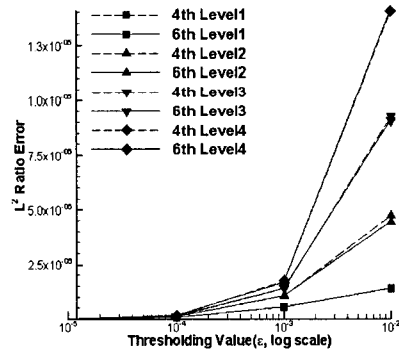
Fig. 8은 임계치리값이 0.01일 때 Detection 계수값에 따른 압축율과 오차를 나타낸 그림으로 계수값이 0.05일 때부터 0.15까지일 때의 값들을 비교하였다. 이 범위에서 압축율이 20.97에서 39.13으로 큰 폭으로 증가하는 반면 오차는 6.699×10^{-6} 에서 6.938×10^{-6} 으로 거의 변화가 없는 것을 확인할 수 있는데 이것은 Detection 계수값이 압축율과 밀접한 관련이 있음을 보여준다.

Fig. 9는 충격과 전-후의 밀도 변화를 나타낸 그림이다. Fig. 9(b)의 날개 주위에서 발생하는 충격파(shock)와 같은 불연속성의 특징들을 살펴보면 다소 데이터가 커지는 현상이 있는데 이는 SPR의 단계가 높아짐에 따라 형성된 격자에서의 주위 점들과의 연관성이 다소 떨어지기 때문이다. 하지만 대부분의 데이터가 큰 문제없이 표현

됨을 확인할 수 있다. 압축율은 20이고 오차는 5.64×10^{-6} 로 매우 작다.



(a) Compression ratio



(b) L² ratio error

Fig. 7 Comparison for the 3D wing dataset

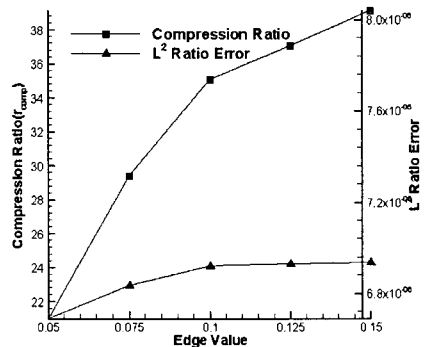
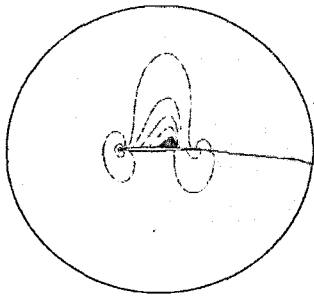
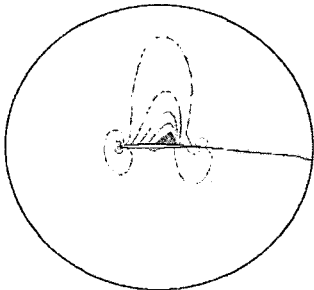


Fig. 8 Compression ratio and L² ratio error along edge detecting coefficient ($\lambda=0.01$)



(a) Original dataset



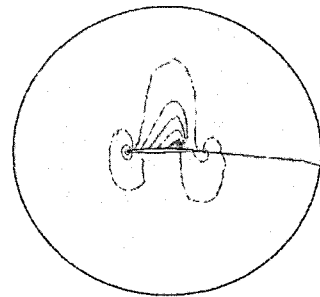
(b) After compression

Fig. 9 Density contours of transonic flow at 3D wing (6th Order, $\epsilon=7.5 \times 10^{-3}$, 2nd Level, $\lambda=0.05$)

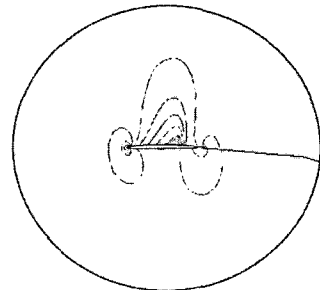
Fig. 10은 Supercompact Multiwavelets⁽⁶⁻⁹⁾을 이용하여 날개 데이터를 압축한 데이터에 Singular Feature Detection을 적용한 그림이다. 임계치리값은 0.001이고 오차는 2.26×10^{-6} 이다. 하지만, Multiwavelets의 특성으로 변환 나타나는 계수 값이 다르기 때문에 압축율은 비교하지 않는다. Fig. 10(a)에서 일그러졌던 부분이 많이 감소했음을 확인할 수 있는데, Detection 적용 후 오차는 1.55×10^{-6} 으로 줄어든다. 한편, SPR 방법과는 달리 리프팅법의 구조를 갖지 않기 때문에 Detection 적용 시 21438개의 추가적인 저장 공간을 요구하는 단점을 갖게 된다. 하지만, Singular Feature Detection의 적용이 용이하다는 점과 정확도에 도움이 되는 것을 확인할 수 있다.

4. 결론

보간 웨이블릿을 이용한 Sparse Point Representation이 CFD 데이터 압축에 적절히 응용될 수 있음을 확인할 수 있었다. 기존의 웨이블릿 변환과는 달리 SPR법은 리프팅법과 비슷한 구조를



(a) Reconstructed by supercompact multiwavelets



(b) After compression

Fig. 10 Singular feature detection for supercompact multiwavelets

가지므로 중간 계수 저장에 필요한 추가적인 메모리 사용을 제한할 수 있었고, 리프팅법에서의 갱신 과정을 생략하여 계산 시간을 줄일 수 있었다.

실제 CFD Simulation 데이터에 적용했을 때, 부드러운 데이터의 경우 오차 2.08×10^{-5} , 압축율 42.6의 정확하면서도 높은 효율의 압축이 가능했다. 또한, 충격파와 같은 불연속적인 점을 포함한 데이터의 경우 오차는 5.64×10^{-6} 이고 압축율은 20으로 비교적 높았으며, 적절한 임계치리값이 정확하고 효율적인 압축에 중요한 요소임을 확인했다. 한편, Singular Feature Detection을 통해 임계치리법에서 정확도가 떨어지는 문제를 보완하여 특징들을 잘 보존할 수 있었다. 또한, Detection 계수 값이 압축율에 중요한 요소임을 확인할 수 있었다.

결론적으로 SPR을 이용하여 압축한 CFD 데이터가 정확하면서도 높은 비율로 압축되었음을 보였다. 그러므로 Sparse Point Representation은 CFD 데이터 압축에 적절한 도구로 국가 Grid와 같은 분산처리 시스템에 적용할 경우 성능 향상을 기대할 수 있다.

덧붙여서, 국부적으로 예측 함수의 차수를 바꾸는 작업, 즉, 부드러운 데이터 부분에서는 높은 차수를 적용하여 압축 효율을 높이고 불연속적인 점에서는 차수를 낮추어 정확도를 높이는 것도 성능 향상에 도움이 될 것이다. 이는 비선형(Nonlinear) adaptive 웨이블릿으로써 불연속선(충격파)을 지닌 유동데이터표현에 아주 적절할 것으로 예상된다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 지역대학우수과학자 지원연구(R05-2004-000-12166-0)로 수행되었음.

참고문헌

- (1) Jörg Schmalzl, 2003, "Using Standard Image Compression Algorithms to Store Data from CFD," *Computer & Geosciences*, Vol. 29, pp. 1021~1031.
- (2) Brani Vidakovic and Peter Mueller, 1991, "Wavelets for Kids : A Tutorial Introduction," Duke University.
- (3) Michel Misiti, Yves Misiti, Georges Oppenheim and Jean-Michel Poggi, 1996, "Wavelet TOOL-BOX," *The Math Works*, Inc.
- (4) Sanghwan Lee and Jaeyoon Jung, 2004, "Coherent Structure Extraction from 3-dimensional Isotropic Turbulence Velocity Field Using Discrete Wavelet Transform," *Transactions of the KSME B*, Vol. 28, No. 9, pp. 1032~1041.
- (5) Aaron Trott, Robert Moorhead and John McGinley, 1996, "The Application of Wavelets to Lossless Compression and Progressive Transmission of Floating Point Data in 3-D Curvilinear Grids," *Data Compression Conference, DCC '96. Proceedings*, IEEE Comput. Soc. Press.
- (6) Dohyung Lee, 2000, "Supercompact Multiwavelets for Three Dimensional Flow Field Simulation," *38th AIAA Aerospace Meeting & Exhibit*.
- (7) Dohyung Lee, Richard M. Beam and Robert F. Warming, 2001, "Supercompact Multiwavelets for Flow Field Simulation," *Computers & Fluids*, Vol. 30, pp. 783~805.
- (8) Dohyung Lee, 2003, "MultiDimensional Supercompact Wavelets For Fluid Dynamics," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 43, pp. 307~329.
- (9) Junpyo Park, Dohyung Lee and Dohoon Kwon, 2004, "A Study on the Comparison Between Full-3D and Quasi-1D Supercompact Multiwavelets," *Transactions of the KSME B*, Vol. 28, No. 12, pp. 1608~1615.
- (10) Alpert, B., 1993, "A Class of Bases in for the Sparse Representation of Integral Operators," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. 24, pp. 246~262.
- (11) Richard M. Beam and Robert F. Warming, 2000, "Multiresolution Analysis and Supercompact Multiwavelets," *SIAM journal on scientific computing*, Vol. 22, No. 4, pp. 1238~1268.
- (12) Hyungmin Kang, Dongho Lee and Dohyung Lee, 2003, "A Study on CFD Data Compression Using Hybrid Supercompact Wavelets," *KSME International Journal*, Vol. 17, No. 11, pp. 1784~1792.
- (13) Deslauriers, G. and Dubuc, S., 1989, "Symmetric Iterative Interpolation Processes," *Constr. Approx.*, 5, pp. 49~68.
- (14) Dubuc, S., 1986, "Interpolation Through an Iterative Scheme," *J. Math. Anal. Appl.*, 144, pp. 185~204.
- (15) Mats Holmström, 1999, "Solving Hyperbolic PDEs Using Interpolating Wavelets," *SIAM J. Sci. Comp.*, Vol. 21, No. 2, pp. 405~420.
- (16) Sweldens, W., 1995, "The Lifting Scheme: A New Philosophy in Biorthogonal Wavelet Constructions," *Proc. SPIE*, Vol. 2569, pp. 68~79.
- (17) Choi, B., 2001, "Wavelet Anaysis," *Sekyungsa*, pp. 119~166.
- (18) De Villiers, J. M., Goosen, K. M. and Herbst, B. M., 2003, "Dubuc-Deslauriers Subdivision for Finite Sequences and Interpolation Wavelets on an Interval," *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 35, No. 2, pp. 423~452.
- (19) David L. Donoho and Iain M. Johnstone, 1993, "Ideal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage," Stanford University.
- (20) David L. Donoho, 1995, "Denoising by Soft Thresholding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 41, pp. 613~627.
- (21) Rott, N., 1958, "On the Viscous Core of a Line Vortex," *J. Appl. Math. Phys.*, Vol. 9b(5/6), pp. 543~553.