부적합률의 다중검정을 위한 베이지안절차

김경숙* · 김희정* · 나명환* · 손영숙*†

* 전남대학교 자연과학대학 통계학과

Bayesian Procedure for the Multiple Test of Fraction Nonconforming

Kyungsook Kim* · Heejeong Kim* · Myung Hwan Na* · Young Sook Son*†

* Department of Statistics, College of Natural Sciences, Chonnam National University

Key Words : Fraction Nonconforming, Multiple Test, Bayes Factor, Posterior Probability

Abstract

In this paper, the Bayesian procedure for the multiple test of fraction nonconforming, p, is proposed. It is the procedure for checking whether the process is out of control, in control, or under the permissible level for p. The procedure is as follows : first, setting up three types of models, $M_1: p=p_0$, $M_2: p < p_0$, $M_3: p > p_0$, second, computing the posterior probability of each model. and then choosing the model with the largest posterior probability as a model most fitted for the observed sample among three competitive models. Finally, the simulation study is performed to examine the proposed method.

1. 서 론

안정된 생산공정 하에서 생산된 생산품이 정해진 품질규격에 따르지 않으면 이는 부적합(nonconforming)으로 판정된다. 이때 부적합률(fraction nonconforming)은 생산공정에서 생산되는 모든 개체의 수(모집단)에 대한 부적합품 수의 비(ratio)로서 정의된다. 어떤 생산 공정이 관리 상태 하에 있도록 하는 방법으로서 부적합률의 최대 허용수준을 정하고 이를 넘지 않도록 관리하는 방법을 고려한다(Montgomery, 2001).

생산 공정이 관리 상태 하에 있는지, 즉, 부적합률(p)이 허용되는 최대 수준(p_0) 이하로 유지되고 있는지, 혹은 관리 상태에서 벗어나 있는지를 파악하기 위해 지금까지 사용되어 온 고전적(classical) 검정 절차에서는 오직 두 가지 형태의 가설(모형), $H_0: p \le p_0$ 와 $H_1: p > p_0$ 를 설정하고 이 중 하나의 가설을 채택하게 된다. 이때 H_0가 기각된다면 생산 공정은 관리 상태를 벗어나 공정에 문제가 있는 것으로 판정될 것이며, H_0가 기각되지 못하면 생산 공정은 관리상태 하에 있다고 판정될 것이다. 그러나 이러한 형태의 검정 방법으로는 관리 상태 하에 놓여 있다고 판정된 경우에 더 구체적으로 공정이 허용수준 보다 더 좋은지, 즉, $p < p_0$ 인지에 대한 정보를 얻는 데에는 한계점이 있다.

본 논문에서는 이러한 한계점을 극복하기 위해 베이지안 절차를 따르는 다중 검정 방법을 제안하고자 한다. 베이지안 검정 방법은 셋 이상의 가설(모형)에 대해서도 동시에 검정이 가능하므로, 생산 공정의 부적합률(p)이 일정 허용수준을 유지하고 있는지, 감소되었는지 또는 증가되었는지에 대해 세 가지 모형을 동시에 설정하여 생산 공정의 상태를 더 구체적으로 파악할 수 있게 된다. 또한, 이러한 베이지안 검정법은 각 모형에 대한 지지정도를 확률로서 제시할 수 있어 해석이 쉬운 장점도 가지고 있다.

† 교신저자 ysson@chonnam.ac.kr

※ 본 연구는 산업자원부의 지역혁신 인력양성사업의 연구결과로 수행되었음.

다중검정을 위한 연구로서 김경숙과 손영숙(2002)은 포아송 평균모수에 대한 다중검정을, 김경숙과 손영숙(2003)은 $AR(1)$모형에서 자기회귀계수에 대한 다중검정을 논의하였으며 이들은 통계적 품질관리에서 유용하게 사용될 수 있는 방법들이다.

본 논문의 2장에서는 제안된 베이지안 다중검정 절차를 소개하였고, 3장에서는 모의실험 결과를 제시하였으며, 4장에서 결론 및 토의를 언급하였다.

2. 부적합률의 베이지안 검정절차

2.1 관측자료의 확률적 특성

부적합률이 p인 생산 공정에서 생산된 무한개의 생산품 가운데 어느 시점 $k(k=1,2,\cdots,N)$에서 n_k개의 표본(시료)을 추출하여 그 중 부적합품으로 판정된 개수를 X_k라 하자. 그러면 확률변수 X_k는 $b(n_k, p)$인 이항분포를 따르는 것으로 가정할 수 있고 확률분포는 다음과 같이 정의된다.

$$f(x_k|n_k, p) = \binom{n_k}{x_k} p^{x_k}(1-p)^{n_k - x_k},$$
$$x_k = 0,1,2,\cdots,n_k,\ k=1,2,\cdots,N.$$

2.2 다중검정 모형의 설정

N개 시점에서 관측된 자료를 $\boldsymbol{x}=\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$라고 할 때, 생산 공정에 있어서 부적합률($p$)이 일정 수준인 p_0로 유지되고 있는지, 감소되었는지, 또는 증가되었는지를 동시에 검정하기 위한 다중검정 모형은 다음과 같이 설정된다.

$$M_1 : p = p_0,$$
$$M_2 : p < p_0,$$
$$M_3 : p > p_0,$$

여기서 p_0는 $0<p_0<1$인 임의의 상수를 의미한다.

다중검정을 한 결과, 이들 검정모형 가운데 하나의 모형이 관측된 자료에 가장 적합한 모형으로서 선택되는데, 그 선택된 모형이 의미하는 바는 각각 다음과 같다. 먼저, M_1모형이 선택되었다면 생산 공정은 관리 상태 하에 놓여 있으며, 공정의 부적합률이 허용수준인 p_0 정도에 머물러 있는 것으로 판정할 수 있다. 다음으로 M_2모형이 선택되었다면 생산 공정은 역시 관리 상태 하에 놓여 있으나, 부적합률이 허용수준 p_0 보다 낮음으로서 공정 상태는 오히려 더 좋은 수준에 있는 것으로 판정할 수 있다. 마지막으로 M_3모형이 선택되었다면 부적합률은 허용수준 p_0 보다 더 높아 생산 공정은 관리 상태를 벗어나 있는 것으로 판정할 수 있는 것이다.

2.3 베이즈 인자의 계산

베이지안 검정절차는 모수에 대한 사전분포를 가정한 후 베이즈 인자(Bayes factor)를 사용하여 각 모형에 대한 사후확률을 계산함으로써 결론을 내리는 방식을 따른다(김달호, 2005).

모수 p에 대한 사전분포로는 각 모형 M_i의 모수 공간 A_i 상에서 다음과 같은 균일분포를 가정하였다.

$$M_1: \pi_1(p)=1, \qquad p \in A_1=\{p|p=p_0\},$$
$$M_2: \pi_2(p)=p_0^{-1}, \qquad p \in A_2=\{p|0<p<p_0\},$$
$$M_3: \pi_3(p)=(1-p_0)^{-1}, \quad p \in A_3=\{p|p_0<p<1\}.$$

베이즈 인자는 각 모형 $M_i(i=1,2,3)$에 대한 주변확률분포(marginal distribution) 혹은 사전예측분포(prior predictive distribution)라고 불리우는 $m_i(\boldsymbol{x})$를 계산하여 각각에 대한 비(ratio)를 취하는 것으로 정의된다. 즉, 모형 M_i에 대한 M_j의 베이즈 인자는 다음과 같다.

$$B_{ji} = \frac{m_j(\boldsymbol{x})}{m_i(\boldsymbol{x})},\ i,j=1,2,3.$$

모형 M_i에 대한 주변확률분포란 자료가 발생되었을 것으로 예상되는 모형에 대한 우도함수(likelyhood function)에 모수 p에 대한 사전확률을 가중치로 적용하여 가중평균을 구하는 방식으로 관측 자료에 대한 발생확률을 계산하는 것으로서 이는 다음과 같은 식으로 정의된다.

$$m_i(\boldsymbol{x}) = \int_{p\in A_i} \pi_i(p) \cdot L(p|\boldsymbol{x})\,dp,\ i=1,2,3, \qquad (1)$$

여기서 $L(p|\boldsymbol{x})$는 관측 자료에 대한 우도함수로서 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} L(p \mid \boldsymbol{x}) &= \prod_{k=1}^{N} f(x_k \mid n_k, p) \\ &= \left\{ \prod_{k=1}^{N} \binom{n_k}{x_k} \right\} p^{\Sigma x_k} (1-p)^{\Sigma n_k - \Sigma x_k}. \end{aligned} \qquad (2)$$

위에서 정의된 식 (1)과 식 (2)으로부터 각 모형에 대한 주변확률분포는 다음과 같이 계산된다.

$$m_1(\boldsymbol{x}) = C(x) p_0^{\Sigma x_k} (1-p_0)^{\Sigma n_k - \Sigma x_k},$$
$$m_2(\boldsymbol{x}) = C(\boldsymbol{x}) G(\boldsymbol{x}) p_0^{-1} F_{beta}(p_0 : \alpha, \beta),$$
$$m_3(\boldsymbol{x}) = C(x) G(\boldsymbol{x}) (1-p_{0)})^{-1} \{1 - F_{beta}(p_0 : \alpha, \beta)\},$$

여기서 $C(\boldsymbol{x}) = \prod_{k=1}^{N} \binom{n_k}{x_k}$,

$$G(\boldsymbol{x}) = \frac{\Gamma(\Sigma x_k + 1)\, \Gamma(\Sigma n_k - \Sigma x_k + 1)}{\Gamma(\Sigma n_k + 2)},$$

그리고 $F_{beta}(p_0 : \alpha, \beta)$는 모수 $(\alpha, \beta) = (\Sigma x_k + 1, \Sigma n_k - \Sigma x_k + 1)$인 베타확률분포 $beta(\alpha, \beta)$에서 p_0까지의 누적확률이다. 이때, $beta(\alpha, \beta)$ 분포의 확률밀도함수 및 누적확률은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$f(y \mid \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1},$$
$$\alpha, \beta > 0, \ 0 < y < 1,$$
$$F_{\beta}(p_0 : \alpha, \beta) = \int_0^{p_0} f(y \mid \alpha, \beta)\, dy.$$

2.4 사후확률의 계산

베이즈 인자를 이용하여 각 모형에 대한 지지확률을 측정하기 위한 측도로써 검정모형 가운데 가장 높은 사후확률을 갖는 모형이 관측 자료에 대해 참 모형(true model)인 것으로 선택된다.

모형 M_i에 대한 사후확률은 다음과 같이 정의된다.

$$P(M_i \mid \boldsymbol{x}) = \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{p_j}{p_i} B_{ji} \right)^{-1}, \quad i = 1,2,3,$$

여기서, p_i와 p_j는 각 모형에 대한 사전확률을 의미하는데, 모수 p에 대한 사전정보가 거의 없는 경우에는 일반적으로 동일한 값을 부여한다. 그러한 경우 모형 M_i의 사후확률은 다음의 식과 같이 얻어진다.

$$P(M_i \mid \boldsymbol{x}) = \frac{m_i(\boldsymbol{x})}{m_1(\boldsymbol{x}) + m_2(\boldsymbol{x}) + m_3(\boldsymbol{x})}, \quad i = 1,2,3.$$

3. 모의실험

앞 절에서 논의된 부적합률의 다중검정을 위한 베이지안 절차의 유용성을 평가하기 위해 모의실험을 수행하였다. 모든 계산 결과는 MATLAB(The MATH WORKS Inc., 2000)을 사용하여 얻어졌으며 특히, 이항확률변수 생성과 베타누적확률의 계산을 위해서 MATLAB의 BINORND 함수, BETACDF 함수가 각각 사용되었다.

관측시점의 수는 $N=30$이고, 각 시점에서의 표본(시료) 크기(n_k)는 편의상 모두 동일하게 n개인 것으로 가정하여 $n = 10, 30, 50$인 세 가지 경우를 고려하였다. 부적합률은 $p = 0.001$, 0.005, 0.01, 0.03, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20인 각 의 경우에 대해 이항분포 $b(n, p)$를 따르는 모의실험 자료를 생성하였다.

허용된 부적합률 p의 참값이 각각 $p_0 = 0.01, 0.05$ 0.1인 세 가지 경우에 대해 모의실험 자료를 이용하여 각 검정모형에 대한 사후확률을 계산하였다. 이때 검정결과의 신뢰성을 위해 각 경우에 대해 1,000번씩 모의실험 자료를 반복 생성하여 사후확률들을 얻었고, 이들의 평균과 표준편차를 계산하여 <표 1>에 제시하였다.

먼저, 표본 크기에 무관하게 거의 모든 경우에서 참 모형의 사후확률이 가장 크게 나타남으로써 제안된 검정절차가 참 모형을 잘 선택해 주는 것을 볼 수 있었다.

또한, 다른 조건은 동일하고 표본 크기만 점점 크게 했을 때의 결과는 모든 실험의 경우 동일하게 참 모형의 지지확률이 점점 더 커지는 경향을 보였으며, 고정된 부적합률의 허용수준(p_0)과 관측 자료에 대한 부적합률의 참값(p)의 차이가 클수록 참 모형의 지지확률이 점점 더 높아지는 경향도 보였다.

4. 결 론

본 논문은 생산 공정에 대한 부적합률의 최대 허용수준이 정해졌을 때, 관측된 표본을 생성해 내는 공정이 관리 상태를 벗어났는지 또는 관리 상태 하에 놓여 있는지, 그렇다면 더 나아가 예상한 최대

<표 1> 부적합률 p에 대한 반복 1000회의 사후확률의 평균(표준편차) : $n=10, 30, 50$인 경우

p_0	p	참모형	$n=10$			$n=30$			$n=50$		
			$P(M_1 \mid \boldsymbol{x})$	$P(M_2 \mid \boldsymbol{x})$	$P(M_3 \mid \boldsymbol{x})$	$P(M_1 \mid \boldsymbol{x})$	$P(M_2 \mid \boldsymbol{x})$	$P(M_3 \mid \boldsymbol{x})$	$P(M_1 \mid \boldsymbol{x})$	$P(M_2 \mid \boldsymbol{x})$	$P(M_3 \mid \boldsymbol{x})$
.01	.001	M_2	0.1966 (0.1111)	0.8026 (0.1118)	0.0008 (0.0007)	0.0207 (0.0426)	0.9793 (0.0427)	0.0000 (0.0001)	0.0020 (0.0091)	0.9980 (0.0091)	0.0000 (0.0000)
	.005	M_2	0.4128 (0.1909)	0.5832 (0.1945)	0.0040 (0.0254)	0.3123 (0.2229)	0.6865 (0.2245)	0.0012 (0.0086)	0.2261 (0.2119)	0.7735 (0.2124)	0.0004 (0.0005)
	.01	M_1	0.5971 (0.1708)	0.3860 (0.1817)	0.0169 (0.0541)	0.6725 (0.1767)	0.3148 (0.1840)	0.0127 (0.0489)	0.7159 (0.1722)	0.2773 (0.1769)	0.0069 (0.0194)
	.03	M_3	0.4153 (0.3048)	0.0838 (0.0855)	0.5009 (0.3767)	0.0666 (0.1732)	0.0062 (0.0184)	0.9272 (0.1912)	0.0061 (0.0431)	0.0004 (0.0028)	0.9935 (0.0459)
	.05	M_3	0.0485 (0.1370)	0.0071 (0.0236)	0.9444 (0.1600)	0.0000 (0.0004)	0.0000 (0.0000)	1.0000 (0.0004)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)	1.0000 (0.0000)
.05	.01	M_2	0.0127 (0.0354)	0.9873 (0.0357)	0.0001 (0.0002)	0.0000 (0.0000)	0.9997 (0.0035)	0.0003 (0.0035)	0.0000 (0.0000)	0.9653 (0.0231)	0.0347 (0.0231)
	.03	M_2	0.3398 (0.2271)	0.6568 (0.2303)	0.0034 (0.0039)	0.1240 (0.1760)	0.8755 (0.1769)	0.0005 (0.0009)	0.0361 (0.0916)	0.9638 (0.0918)	0.0001 (0.0003)
	.05	M_1	0.6927 (0.1627)	0.2745 (0.1782)	0.0329 (0.0693)	0.7695 (0.1618)	0.2109 (0.1675)	0.0196 (0.0568)	0.8105 (0.1546)	0.1766 (0.1606)	0.0129 (0.0240)
	.10	M_3	0.2115 (0.2744)	0.0194 (0.0304)	0.7692 (0.3035)	0.0025 (0.0207)	0.0001 (0.0008)	0.9974 (0.0215)	0.0000 (0.0001)	0.0000 (0.0000)	1.0000 (0.0001)
	.15	M_3	0.0023 (0.0278)	0.0002 (0.0022)	0.9975 (0.0299)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)	1.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)	1.0000 (0.0000)
.10	.03	M_2	0.0025 (0.0117)	0.9975 (0.0118)	0.0000 (0.0001)	0.0000 (0.0000)	0.9619 (0.0486)	0.0381 (0.0486)	0.0000 (0.0000)	0.9002 (0.0045)	0.0998 (0.0045)
	.05	M_2	0.0737 (0.1265)	0.9256 (0.1279)	0.0007 (0.0015)	0.0008 (0.0063)	0.9992 (0.0064)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)	0.9909 (0.0288)	0.0091 (0.0288)
	.10	M_1	0.7342 (0.1557)	0.2231 (0.1664)	0.0428 (0.0861)	0.8133 (0.1397)	0.1578 (0.1429)	0.0289 (0.0685)	0.8436 (0.1319)	0.1332 (0.1349)	0.0232 (0.0552)
	.15	M_3	0.3698 (0.3107)	0.0284 (0.0326)	0.6019 (0.3398)	0.0401 (0.1174)	0.0013 (0.0043)	0.9586 (0.1216)	0.0027 (0.0296)	0.0001 (0.0009)	0.9973 (0.0305)
	.20	M_3	0.0171 (0.0738)	0.0009 (0.0050)	0.9820 (0.0786)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)	1.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)	1.0000 (0.0000)

허용수준에 머무는지 또는 허용수준 보다 더 낮은 수준에 있는지를 판정할 수 있는 베이지안 검정절차를 제안하였다. 모의실험을 통해 이를 검증해 본 결과에서 제안된 검정절차는 이론적으로 타당함이 입증되었다.

일반적으로 이항분포에서 모수 p의 공액사전분포는 $beta(a, b)$분포이다(Gelman et al., 2000). 본 논문에서 가정된 모수 p의 사전분포인 균일분포는 $beta(a, b)$에서 $(a, b)=(1, 1)$인 특별한 경우이다. 사전분포로서 공액사전분포를 가정하는 경우의 장점은 사후분포 및 사전예측분포의 계산에 있어 편의성이 있는 것이다. 그러나 본 논문에서는 각 모형 내의 모수공간이 제한적이므로 사전예측함수를 계산할 때 여전히 적분함수 부분이 남아있다. 또 다른 장점으로는 공액사전분포에 포함된 초모수(hyper-parameter)의 주관적인 선택에 의해 사전분포로서 선택범위가 넓다는 데 있다. 그런데, 초모수의 선택을 위한 특별한 주관적인 사전지식(*prior information*)이 없는 경우인 베이지안 실험의 초기단계에서는 흔히 비정보 사전분포(noninformative prior distribution)가 사용된다. 균일사전분포는 비정보사전분포에 속한다.

본 논문에서 제안된 베이지안 검정절차는 기존의 고전적 검정절차로는 해결하기 어려운 가설검정 형태인 셋 이상의 가설(모형)을 동시에 검정하는 문제를 해결할 수 있다는 면에서 유용성을 갖는다.

그러나 제안된 방법은 어느 일정시기 내의 공정상태에 대해 전반적으로 검토해 봤을 때 관리 상태 하에 있는지 또는 벗어났는지를 판단하는 데에 주된 초점을 두고 있어서 생산 공정의 시간흐름에 따른 변화추이는 간과하고 있다. 생산 공정에 대한 판정결과가 만일 부적합률(p)이 허용수준(p_0)보다 더 작다($p < p_0$) 혹은 더 더 크다($p > p_0$)는 결론이 내려진 경우에는 생산 공정의 변화추이를 더 세부적으로 검토해 볼 필요가 있을 것이다.

따라서 향후에는 이러한 부분에 초점을 두는 연구가 이루어질 필요가 있을 것으로 본다.

참 고 문 헌

[1] 김경숙, 손영숙(2002), "디폴트 베이즈인자를 이용한 포아송 평균모수에 대한 다중검정", 「품질경영학회지」, 30권, 2호, pp. 18-129.

[2] 김경숙, 손영숙(2003), "$AR(1)$모형에서 자기회귀계수의 다중검정을 위한 베이지안방법", 「응용통계연구」, 16권, 1호, pp. 141-150.

[3] 김달호(2005), 「R과 WinBUGS를 이용한 베이지안통계학」, 자유아카데미.

[4] Andrew, B. and Gelman et al.(2000), *Bayesian data analysis*, Campman & Hall/CRC.

[5] Montgomery, D. C.(2001), *Introduction to Statistical Quality Control*, fourth edition, John Wiley & Sons, Inc.

[6] The MATH WORK Inc.(1998), MATLAB/Statistics Toolbox, Version 5.2, Natick, MA.