

## 스핀계에서 양자얽힘 이동

이혁재\*

국민대학교, 물리학과, 서울 성북구 정릉동 861-1, 136-702

(2006년 1월 19일 받음, 2006년 2월 2일 최종수정본 받음)

직접적인 상호작용 없이 멀리 떨어져 있는 두개의 스핀-1/2 입자들이 양자적으로 얽힐 수 있는 방법을 제시하였다. 이것은 국소적으로 양자 얽힘 상태에 있는 두개의 다른 입자들을 멀리 떨어져 있는 입자들에 각각 보내서 국소적으로 상호작용을 하면 떨어져 있는 입자를 양자 얽힘 상태로 바꿀 수 있다. 이것은 원래 국소적으로 얽혀있는 두 입자의 상태가 상호작용이 없는 다른 두 입자로 이동된 것을 알 수 있다. 이 프로세스가 양자 컴퓨터에서 중요한 게이트인 CNOT 게이트를 대신할 수 있음을 논의하였다.

**주제어** : 스핀 입자, 양자얽힘, 양자게이트, Concurrence

### I. 서 론

양자 얽힘은 양자역학의 시작 시기부터 연구되어 왔다. 처음에는 양자얽힘이 양자역학의 모순을 유도함으로써 양자역학을 부정하는 도구로 쓰였다[1]. 그러나 벨(Bell)의 부등식을 어기는 상태가 반드시 존재하고, 그 상태가 양자얽힘 상태라는 것이 밝혀진 뒤로 양자얽힘에 대한 연구는 양자역학의 중요한 분야가 되어왔다[2]. 최근 양자컴퓨터 및 양자 정보처리에 관한 연구가 진행 되면서 양자 얽힘의 중요성이 더욱더 대두되고 있다. 양자얽힘상태 대한 수학적 연구 또는 물리적 현상으로서의 연구 뿐 만아니라 다양한 응용성에 대한 연구까지 진행되고 있는 상황이다[3-5].

양자얽힘의 연구가 진행되면서 중요한 연구 과제 중에 하나는 어떻게 양자얽힘 상태를 만들어 낼 수 있는가에 대한 것이다. 양자얽힘은 단순히 두 입자 사이에 상호작용으로부터 만들어 질 수 있다. 두 개의 스핀-1/2 입자로 구성된 계에서 두 스핀 간의 스핀-스핀 상호작용은 처음 두 스핀의 상태가  $|\downarrow\downarrow\rangle$ 로 준비된 계를 양자얽힘 상태로 바꾸어 준다. 또한 간접적으로 두 스핀이 상호작용을 하는 경우 역시 양자얽힘이 생성된다. 두 개의 스핀-1/2 입자들이 열적으로 평형상태에 있는 주변 환경 또는 단일모드 조화진동자들과 상호작용을 하고 두 입자사이에 직접적인 상호작용이 없는 경우 두 스핀 입자들은 양자 얽힘 상태가 될 수 있다[6, 7]. 이 두 경우는 모두 두 스핀 입자가 서로 가까이 존재해야만 가능하다. 스핀 상호작용은 가까이 있을 때 작용하는 것으로 간주 할 수 있고 주변 환경 등도 두 개가 멀리 떨어져 있는 경우 단일 환경으로 보기 어렵기 때문이다.

그렇다면 멀리 떨어져 있는 두 스핀-1/2 입자들을 양자 얽

힘 상태로 만들고 싶을 때 어떻게 해야 할까? 이 논문은 이 질문에 대한 답을 구하려 한다. 멀리 떨어진 입자들을 양자 얽힘 상태로 만들려고 하는 것은 양자컴퓨터의 구현과 관련이 있다. 양자 컴퓨터는 현재 몇 개의 큐비트(qubit)들로 구성된 형태가 구현되어 있다[8]. 그러나 실제 필요한 계산을 위한 양자컴퓨터는  $10^3$  order 정도의 큐비트들이 필요하다. 이 정도 큐비트의 개수를 갖는 양자컴퓨터를 구현하기 위해서는 지금의 트랜지스터 컴퓨터처럼 고체물리를 기반으로 한 형태가 되어야 큐비트 개수를 늘리는데 문제가 없을 것으로 보고 있다. 이때 가까이 있는 큐비트들 사이뿐만 아니라 멀리 떨어져 고정되어 있는 큐비트들 사이에 양자얽힘을 구현해야만 하는 경우가 있는데 이 논문에서 제시하는 방법은 그 해결책이 될 수 있을 것이다.

### II. 양자 얽힘 전달

두 개의 큐비트들이 가까이 있을 때 국소적으로 상호작용을 통하여 쉽게 양자얽힘 상태를 만들 수 있다. 이렇게 만드는 것은 간단한 계산을 통하여 만들 수 있고 이 논문의 주제와 관련이 없으므로 여기서는 두 개의 스핀-1/2 입자들이 양자 얽힘 상태로 존재한다고 가정하고 시작할 것이다.

두 개의 스핀 입자들에 대하여  $A$ 와  $B$ 로 명명하고, 계의 양자상태가

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle) \quad (1)$$

로 주어진 양자얽힘 상태에 있는 경우를 고려할 것이다. 스핀 down 상태는 0, 스핀 up 상태는 1로 표시하였다. 그리고 서로 멀리 떨어져 있는 다른 두 개의 스핀-1/2 입자( $C, D$ )들이 서로 상호작용 없이 자유 입자들로 있는 상황을 생각한다.

\*Tel: (02) 910-5462, E-mail: lhjae@kookmin.ac.kr

C입자와 D입자는 스핀의 z 성분이 모두 down 방향으로 되어 있는  $|\Psi_{CD}\rangle = |0_C 0_D\rangle$  형태로 분리가능한 상태로 존재한다고 가정 할 것이다.

스핀 A를 스핀 C가 있는 위치로 보내고 스핀 B를 스핀 D가 있는 곳으로 보낸다. 그리고 A와 C 그리고 B와 D 사이에

$$H_I = J_A(\sigma_A^+ \sigma_C^- + \sigma_A^- \sigma_C^+) + J_B(\sigma_B^+ \sigma_D^- + \sigma_B^- \sigma_D^+) \quad (2)$$

같은 상호작용을 할 수 있도록 한다.  $J$ 는 스핀 입자들 사이에 결합 상수이다. 그러면 4개의 스핀 입자들의 양자상태는 초기

$$|\Psi_{ABCD}(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_A\rangle) \otimes |0_C 0_D\rangle \quad (3)$$

상태에서 상호작용 때문에 시간에 따라 양자 상태가 변하게 될 것이다. t 시간이 지난 뒤에 전체 양자 상태는  $H_I$ 가 시간에 독립이므로

$$|\Psi_{ABCD}(t)\rangle = e^{-iH_I t/\hbar} |\Psi_{ABCD}(0)\rangle \quad (4)$$

로 진행 될 것이다. t 시간 후에 상태는 식 (4)를 계산하여 얻을 수 있다. 그러나 우리가 관심 있는 것은 t 시간에서 식 (2)의 상호 작용이 C와 D 사이에 양자얽힘을 만들어 주는가에 관심이 있으므로 C와 D만의 부분 계의 양자상태를 계산할 것이다. C와 D의 양자상태는 밀도행렬로 나타나는데 그 계산 방법은 Kraus 연산자 공식을 이용하여 쉽게 계산할 수 있다[9]. 밀도 행렬은 Kraus 연산자  $K_n = \langle n | e^{-iH_I t/\hbar} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle)$ 을 이용하여

$$\rho_{CD}(t) = \sum_{n=1}^4 K_n \rho_{CD}(0) K_n^\dagger \quad (5)$$

로 쓸 수 있다. Kraus 연산자는

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_C \otimes \alpha_D - \delta_C \otimes \delta_D), \quad (6)$$

$$K_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha_C \otimes \gamma_D + \delta_C \otimes \beta_D), \quad (7)$$

$$K_3 = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma_C \otimes \alpha_D + \beta_C \otimes \delta_D), \quad (8)$$

$$K_4 = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma_C \otimes \gamma_D - \beta_C \otimes \beta_D), \quad (9)$$

로 4개가 존재한다. 여기서  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 는

$$\alpha_i = \cos\left(\frac{J_i t}{\hbar} (\sigma_i^+ \sigma_i^-)^{1/2}\right), \quad (10)$$

$$\beta_i = \cos\left(\frac{J_i t}{\hbar} (\sigma_i^- \sigma_i^+)^{1/2}\right), \quad (11)$$

$$\gamma_i = (\sigma_i^- \sigma_i^+)^{1/2} \sin\left(\frac{J_i t}{\hbar} (\sigma_i^- \sigma_i^+)^{1/2}\right) \sigma_i^-, \quad (12)$$

$$\delta_i = (\sigma_i^+ \sigma_i^-)^{1/2} \sin\left(\frac{J_i t}{\hbar} (\sigma_i^+ \sigma_i^-)^{1/2}\right) \sigma_i^+, \quad (13)$$

로 쓸 수 있다. 여기서 예 C 또는 D를 대입하면 각 값들을 표현할 수 있다. 위의 식들 (10)-(13)을 식들 (6)-(9)에 대입하여 C와 D로 구성된 계의 밀도행렬을 구하면,

$$\rho_{CD}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta_1 \sin^2\theta_2) \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin\theta_1 \sin\theta_2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sin^2\theta_1 \cos^2\theta_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

로 계산된다. 그리고 여기서  $\theta_i = \frac{J_i t}{\hbar}$  을 나타낸다.

식 (14)의 상태가 양자얽힘 상태임을 판별하기 위해서는 D 입자에 대한 성분을 부분 전치한 행렬인,

$$\rho_{CD}^{T_D}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\cos^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin\theta_1 \sin\theta_2 & 0 \\ \frac{1}{2}\sin^2\theta_1 \cos^2\theta_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

의 고유 값(eigenvalue)들을 구하면 된다. 이 때 고유 값들 중에 적어도 하나가 음수 값을 가지면 밀도 행렬 상태 (14)

는 양자얽힘 상태임을 알 수 있다[10, 11]. 식 (15)의 행렬에 대한 고유 값의 양·음의 판단은

$$D(\rho_{CD}^T) = \frac{1}{16} \sin^4 \theta_1 \sin^2 \theta_2 (\cos^2 \theta_1 + 1) (\cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 - 1) \quad (16)$$

으로 판별 할 수 있다.  $D(\rho_{CD}^T)$ 이 음의 값을 갖는 경우 식 (14)의 행렬은 음의 고유 값을 갖게 된다. 그런데  $D(\rho_{CD}^T)$ 는 특별한  $\theta_i$  값을 제외하고는 항상 음수가 된다. 그러므로 스핀 입자 C와 D는 양자얽힘 상태가 됨을 알 수 있다.

$J_A = J_C = J_D$  결합 상수가 같을 때 C와 D 스핀입자들 사이에 양자얽힘을 시간에 따른 변화를 구할 수 있다. 이것은 양자 얽힘을 양으로 나타낸  $C(\rho)$ (Concurrence)를 이용하여 그 변화를 볼 수 있다.  $C(\rho)$ 는 행렬  $\rho_{CD}(t) \otimes \sigma_y \rho_{CD}^* \sigma_y \otimes \sigma_y$ 의 고유 값들을 내림차순으로 쓴  $\lambda_i$ 를 가지고 계산 된다[12].

$$C(\rho) = \max(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}, 0) \quad (17)$$

식 (14)의  $C(\rho)$ 을 계산하여 시간에 대한 변화를 보면 0 부터 1까지 진동하는 모양을 보여 준다(Fig. 1).  $C(\rho)$ 가 1 이 될 때는 A와 B 사이에 존재하는 양자얽힘은 없어지고 이것이 C와 D 입자로 이동되어 이들 입자들이 양자얽힘 상태가 된다. 그림에서  $t = \pi \hbar / 2J$  시간의 정수 배일 때 C와 D 계의 Concurrence가 1이 되고 그 순간 전체 계의 양자 상태는

$$|\Psi_{ABCD}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0_A 0_B\rangle \otimes |0_C 0_D\rangle + (|0_C 0_D\rangle + |1_C 1_D\rangle) \quad (18)$$

가 됨을 알 수 있다. 이 순간들 중에 하나에서 입자들 사이에 상호작용을 없애 버리면 A와 B 입자는 자유 입자로 되고 C와 D 입자는 양자얽힘을 전송 받아서 A와 B의 양자 상태를 물려받게 된다.

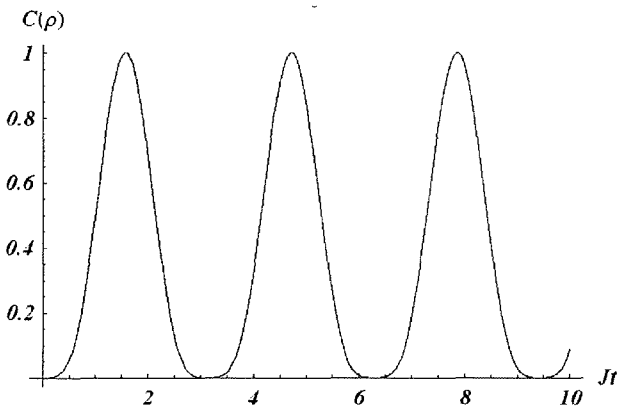


Fig. 1. Time dependent concurrence of quantum entanglement between C and D.

### III. 결 론

멀리 떨어져 있고 고정된 위치에 있는 두 스핀-1/2 입자들을 양자얽힘 상태를 만들기 위한 방법으로 국소적으로 생성된 양자얽힘 상태에 있는 두 입자를 준비한다. 이 입자들을 고정된 위치에 있는 입자들로 하나씩 보내서 상호작용을 하여 적당한 시간이 지난 뒤에 상호작용을 없애면 고정된 두 입자로 양자얽힘이 이동됨을 보였다. 양자컴퓨터의 개발이 고체물질의 양자현상을 이용하는 방향으로 가고 있는데, 여기서 입자들 사이에 양자얽힘 상태를 만들어 내는 것이 중요하다. 우리가 제시한 방법은 하나의 해결책이 될 수 있다. 양자 컴퓨터에서 양자 얽힘 상태를 만들어 내는 것은 처음 스핀 down 상태에 존재하는 두 개의 입자들에서 첫 번째 입자는 Hadamad 게이트를 통과시키고 그 이후에 첫 번째 입자를 두 번째 입자와 CNOT 게이트를 통과 시키면 두입자의 최종 상태는 양자 얽힘 상태가 된다. 우리의 방법은 분리가능한 상태에 있었던 계를 양자얽힘 상태로 바꾸어 주었으므로 관련한 상호작용은 Hadamad 게이트와 CNOT 게이트를 대신하는 게이트로 생각해도 무리가 없을 것이다.

우리 방법의 역 과정을 생각하면 양자얽힘 측정 방법으로 쓸 수도 있다. 멀리 떨어져 있고 위치가 고정되어 있는 두 개의 입자가 양자얽힘 상태에 있을 때 이것을 어떻게 알 수 있을까? 이것은 두개의 자유 입자를 고정된 입자로 보내서 고정된 입자의 양자얽힘을 자유입자로 이동시킨 뒤에 자유입자를 모아서 양자얽힘을 측정 할 수 있을 것이다. 즉 양자얽힘을 측정하는 방법으로 응용 가능하다.

우리 방법은 양자얽힘이 만들어 지는 새로운 과정으로 생각할 수 있다. 직접적인 상호 작용이 없고 분리가능한 양자 상태로 있던 두 입자가 주변 환경과 각자 상호작용을 통하여 분리가능한 상태에서 양자얽힘 상태로 바뀔 수 있다. 이 때 주변 환경이 두 입자에 대하여 같은 환경이라는 것이 중요하다. 만약 두 입자의 주변 환경이 다르다면, 두 입자는 각기 다른 환경과의 상호작용을 통하여 양자얽힘 상태가 되는 것이 불가능하다. 그러나 두 입자 주변의 환경들이 서로 양자얽힘 상태로 존재하는 경우 주변 환경이 가진 양자얽힘이 앞의 계산과 동일 한 방법으로 두입자로 이동됨을 계산할 수 있다. 주변 환경들 사이에 양자얽힘 가능성은 충분히 높기 때문에 다른 주변 환경을 갖는 두 입자 사이에 양자얽힘 생성이 가능하다.

### 참고문헌

[1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777(1935).  
 [2] J. S. Bell, Physics **1**, 195(1964).

- [3] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, Phys. Rev. Lett. **69**, 2881(1992).
- [4] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895(1993).
- [5] A. K. Ekert, Phys. Rev. Lett. **67**, 661(1991).
- [6] M. S. Kim, J. Lee, D. Ahn, and P. L. Knight, Phys. Rev. **A65**, 040101(2002).
- [7] D. Braun, Phys. Rev. Lett. **89**, 277901(2002).
- [8] N. A. Gershenfeld and I. L. Chuang, Science **275**, 350(1997).
- [9] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge(2000).
- [10] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413(1996).
- [11] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Lett. **A223**, 1(1996).
- [12] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245(1998).

## Quantum Entanglement Transfer in Spin-1/2 Systems

Hyuk-jae Lee\*

*Department of Physics, Kookmin University, Seoul 136-702, Korea*

(Received 19 January 2006, in final form 2 February 2006)

We suggest a procedure entangling two spin-1/2 particles at distant positions such that they cannot be directly entangled via local interaction. An already entangled pair is used to transfer the entanglement to another pair of particles by way of interaction. This scheme of nonlocal generation of entanglement can be used in the construction of a two-qubit universal gate.

**Key words** : spin particle, quantum entanglement, quantum gate, concurrence