한국수학사학회지 제19권 제1호(2006년 2월), 1-16

연속된 정수의 멱의 합의 변천사에 대한 고찰

경북대학교 정보전산원 **강동진**
djkang@knu.ac.kr
전북대학교 수학과 **김대열**
daeyeoul@chonbuk.ac.kr
공주대학교 수학교육과 **박달원**
dwpark@kongju.ac.kr
공주대학교 과학교육연구소 **서종진***
sjj8483@kongju.ac.kr
경북대학교 수학교육과 **임석훈**
shrim@knu.ac.kr
건국대학교 컴퓨터응용과학부 **장이채**
leechae.jang@kku.ac.kr

수학에서 가장 매력적이고 중요한 이론들 중에 하나로 알려진 베르누이(Bernoulli)수의 변천과정을 고찰한다. 즉, 당시대의 이러한 연속된 정수의 멱의 합에 대한 수학사적 배경들을 조사하고, 베르누이 수와 관련된 연구들이 현재 어떠한 방향으로 진행되고 있는지를 살펴본다.

주제어 : 베르누이 공식의 변천사, 연속된 정수의 멱의 합

0. 서론

가우스(Carl Frederick Gauss, 1777-1855)가 10살이 되던 해의 일화가 널리 알려져 있다. 1780년경 어느 날, 그의 선생님 뷔트너(J.G. Büttner)는 "1 부터 100까지의 모든 정수를 쓰고 그 합을 구하라"라는 문제를 학생들에게 해결하도록 하였다. 학생들은 초보적인 수준에 있었으므로 뷔트너는 얼마동안 자신이 편히 쉴 수 있을 것이라고 생각했다. 그러나 그의 예상은 빗나갔는데, 왜냐하면 몇 초밖에 지나지 않아서 가우스가 앞으로 나와 책상위에 계산판을 올려놓으면서 브룬스빅 사투리로 "여기 있어요"라고 말했기 때문이다. ...(중략)...얼마 후 선생님은 채점을 하였고, 그 결과 대부분의 학생들은 답이 틀려서 회초리를 맞았다. 그러나 가우스의 계산판에는 제일 아래쪽에 단지 하나의 수 5050이 적혀있었다. 어린 가우스는 어떻게 그 합을 구하였을까? 10살 소년

* 교신저자

은 $1+100=2+99=3+98=\cdots=101$의 성질을 활용하여 101이 50개이므로 그 값을 계산했던 것이다([3]). 이와 같이 연속된 정수의 멱의 합을 구하는 문제는 역사적으로 굉장히 오래되었다.

본고에서는, 임의의 자연수 n에 대하여 $S_n(k)=1^n+2^n+\cdots+(k-1)^n$을 구하는 계산 방법과 그 값이 실수의 계수를 가지는 다항식으로 표현된다는 결과에 대하여 베르누이시대로 돌아가서 베르누이의 접근방법들을 추측해 보고, 연속된 정수의 멱의 합에서 q-아날로그(analogue) 이론에 이르기까지 변천과정을 살펴보았다. 이러한 변천과정을 조사하고 연구하는 것은 과거와 현제의 수학사적 발전경로를 한눈에 볼 수가 있으므로 향후 정수론이 나아갈 하나의 방향설정과 그 결과를 예측할 수가 있다. 사례로, 김태균 외 6인([1])은 정수론을 연구하는 자는 과거 10년의 연구 결과를 알아야하고 이를 바탕으로 미래 10년의 정수론의 결과를 예측하고 도출해야한다고 주장하고 있다. 그들의 주장과 같이 연속된 정수의 멱의 합에 대한 변천과정을 수학사적 입장에서 연구하는 것은 미래의 연구를 수행하는 발판이 되는 중요한 연구가 될 것이다.

본 논문의 목적은 베르누이 시대부터 현제까지 연구되고 있는 결과와 변천과정에서 발견되는 규칙성과 수학자들의 자연스러운 사고를 학생 및 연구자들에게 소개함으로서 위대한 수학의 발견은 먼 곳에 있는 것이 아니고 우리와 가장 가까운 곳에 있다는 것을 알게 하여 수학의 흥미를 도출하게하고 능동적 입장에서 수학 연구를 수행할 수 있는 계기를 마련하는 것이다.

1. 베르누이(Bernoulli)의 연속된 정수의 멱의 합([5], [6])

연속된 정수의 k-제곱의 합, 즉 $\sum_{r=1}^{n} r^k$에 대한 공식은 1713년 베르누이(J. Bernoulli, 1654-1705)가 처음으로 소개하였으나, 실질적으로 이러한 문제에 대해서 괄목할만한 업적이 처음 소개된 것은 17세기 파울하버(Johann Faulhaber, 1580-1635)로 거슬러 올라 갈 수 있다([1], [4}, [5], [6], [13], [31], [36], [37]). 파울하버는 $1^m+2^m+\cdots+n^m$의 합에 대하여 $m=17$일 때까지 계산하는 방법을 구하였다. 비록 지금은 고등학생 혹은 대학교 1학년 정도의 수준이면 이러한 계산 방법을 알고 있지만 그 당시에 이러한 계산 방법을 발견했다는 것은 놀라운 사건이었다. 17세기 파울하버가 발견한 17제곱의 연속된 정수의 합을 구하는 방법을, 구체적으로 $m=1,2,3,4,5$인 경우를 살펴보면 다음과 같다.

$$1^1+2^1+\cdots+n^1=N,$$
$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{(2n+1)N}{3},$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=N^2$$

$$1^4+2^4+\cdots+n^4=\frac{(2n+1)(2N^2-\frac{N}{3})}{5},$$

$$1^5+2^5+\cdots+n^5=\frac{4N^3-N^2}{3}.$$

여기서 $N=\frac{n(n+1)}{2}$ 은 삼각형수 이다.

이러한 파울하버의 연구는 베르누이의 연구와 밀접한 연관이 있다.

1713년에 베르누이가 연구한 임의의 자연수 n에 대하여 $S_n(k)=1^n+2^n+\cdots+(k-1)^n$ 을 구하는 계산 방법과 그 값이 실수의 계수를 가지는 다항식으로 표현된다는 결과가 저널에 발표되었다. 이러한 베르누이 연구결과인 베르누이 수는 수학의 수열에 관련된 가장 흥미 있고 중요한 것 중에 하나이지만 유감스럽게도 이 결과는 베르누이 사후에 발표된 작품으로 Ars Conjectandi에서 발표되었으므로 이것을 베르누이 사후의 결과로 불리어지고 있다([5]). 이러한 $S_n(k)$와 관련된 3개의 베르누이 추측(conjecture)들을 소개하면 다음과 같다([5], [6], [18], [19], [20], [21], [30], [36], [37]).

(1) $S_n(k)$ 는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{n+1}$ 이면서 차수가 $n+1$이다.

(2) $S_n(k)$ 의 상수항은 0이다.

(3) $S_n(k)$ 의 k^n의 계수는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

실제로, 우리가 위에서 $S_n(0)=S_n(1)=0$ 와 $S_n(k+1)-S_n(k)=k^n$ 라는 사실은 쉽게 얻을 수가 있다. 한 가지 더 첨가하면, 베르누이는

$$S_n(k)=\sum_{j=1}^{k-1} j^n=1^n+2^n+\cdots+(k-1)^n=\int_0^k B_n(x)\,dx$$

을 만족하는 다항식 $B_n(x)$의 존재성을 밝혔다.

오래 동안 많은 수학자들을 매료시킨 이러한 놀라운 베르누이 발견에 대해서 논의하기 전에 먼저 베르누이 다항식으로부터 연속된 정수의 멱(n-제곱)의 합을 어떻게 도출하는지에 대해서 베르누이시대로 돌아가서 베르누이의 접근방법들을 추측해보자.

여기서 베르누이 다항식 $B_n(x)$는 다음과 같다([7], [8], [9], [10], [12]).

$$B_0(x)=1,\quad B_1(x)=x-\frac{1}{2},\quad B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},$$

$$B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,\qquad B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30},\cdots,$$

$$B_{10}(x)=x^{10}-5x^9+\frac{15}{2}x^8-7x^6+5x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{66}$$ 등이다.

일반화하여 표현하면,

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$$ 이고, 여기서 $\binom{n}{k}$는 이항계수를 나타낸다.

양변을 n으로 나누면 $\frac{B_n(k)-B_n(0)}{n}=S_{n-1}(k)=\int_0^k B_{n-1}(x)dx$ 이다.

이것으로부터 다음을 얻을 수 있다([23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [33], [36], [37]).

$$B_n(x)=n\int_0^x B_{n-1}(t)dt+B_n(0)$$

$$S_n(k)=\frac{B_{n+1}(k)-B_{n+1}(0)}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}B_j k^{n+1-j}-B_{n+1}$$

2. 김 태균(Taekyun Kim)의 연속된 q-정수의 멱의 합([17], [28])

1800년경에 초 베르누이(Ultra Bernoulli)수의 존재성에 대한 문제가 제기되었고 이러한 문제의 해로서 많은 베르누이 수의 아날로그(analogue) 형태가 연구되었으나 만족할 만한 연구결과는 없었다. 카리즈(Leonard Carlitz, 1907-1999)가 Duke Math. J.에서 처음으로 초 베르누이 수의 개념으로 q-베르누이 수와 다항식을 구성하여 발표하였다([11]). 그 이후에 1982년경에 코블리즈(Neal Koblitz)는 이러한 카리즈의 q-베르누이 수를 정수론에 활용할 수 있도록 p-진 q-L-함수와 연관시켜 연구하였고([32]), 그 이후 1990년 이후부터 사토(Junya Satoh)와 김(Taekyun Kim)등 많은 수학자들에 의해서 q-베르누이 수와 관련된 많은 합동식과 q-제타함수 및 q-L-함수 등이 연구되었다([1], [2], [3], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [28], [34]).

김(T. Kim)에 의한 연속된 q-정수의 멱의 합([17], [28], [29])을 소개하기 전에 간단한 용어들을 먼저 소개한다. 먼저 q는 복소수 값에서 정의된 임의의 미지수 이고, k가 정수 일 때, q-정수를 다음과 같이 정의한다.

$$[k]_q=\frac{q^k-1}{q-1}.$$

예를 들면, $[1]_q=\frac{q-1}{q-1}=1,$

$$[2]_q=\frac{q^2-1}{q-1}=q+1,$$

$$[3]_q = \frac{q^3-1}{q-1} = q^2+q+1,$$

....

$$[n]_q = \frac{q^n-1}{q-1} = 1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1},$$

임을 알 수 있다. 또한 우리는 쉽게 $\lim_{q\to 1}[k]_q = k$가 됨을 알 수 있다.

만약 j를 어떤 정수라 가정하면,

$$[j+1]_q^2 - [j]_q^2 = ([j]_q + q^j)^2 - [j]_q^2 \quad = q^j(2[j]_q + q^j) \tag{2.1}$$

이 되고, 식(1.1)로 부터

$$[k]_q^2 = \sum_{j=0}^{k-1}([j+1]_q^2 - [j]_q^2) = 2\sum_{j=0}^{k-1} q^j [j]_q + \frac{[2k]_q}{[2]_q} \tag{2.2}$$

을 얻는다.

그러므로 $$\sum_{j=0}^{k-1} q^j [j]_q = \frac{1}{2}\left([k]_q^2 - \frac{[2k]_q}{[2]_q}\right) \tag{2.3}$$

을 자연스럽게 얻게 된다.

또한, 식 (1.1)과 같은 방법으로, 간단한 계산을 하면,

$$[j+1]_q^3 - [j]_q^3 = 3[j]_q^2 q^{j+1} + 3[j]_q q^j + q^{3j} \tag{2.4}$$

이 되고, 이 식(1.4)로 부터

$$\sum_{j=0}^{k-1}[j]_q^2 q^{j+1} = \frac{1}{3}[k]_q^3 - \frac{1}{2}\left([k]_q^2 - \frac{[2k]_q}{[2]_q}\right) - \frac{1}{3}\frac{[3k]_q}{[3]_q} \tag{2.5}$$

을 얻게 된다([17]).

만약 식 (1.5)에서 $q = \frac{9}{10}$ 이라면,

$$\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3\left(1+\frac{9}{10}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{9}{10}\right)^k\left[1+\left(\frac{9}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^{k-2}\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-9/10}\right)^3 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1-9/10}\right)^2 - \left(\frac{1}{1-(9/10)^2}\right)\right] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-(9/10)^3}\right)$$

이 된다.

이제, q-정수의 정의로부터,

$$[j+1]_q^n - [j]_q^n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}[j]_q^k q^{j(n-k)}$$

임을 얻을 수 있다. 여기에서 $j = 0, 1, \cdots k-1$ 인 경우이다.

우리가 만약 n, h가 정수이고, k가 1보다 큰 정수일 때

$$S_{n,q^h}(k)=\sum_{l=0}^{k-1}q^{hl}[l]_q^n$$

이라 두면

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}S_{i,q^{n-i}}(k)=\sum_{l=0}^{k-1}([l+1]_q^n-[l]_q^n)=[k]_q^n \tag{2.6}$$

이 됨을 쉽게 알 수가 있다. 여기서, n을 $n+1$로 바꾸게 되면,

$$[k]_q^{n+1}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}S_{i,q^{n+1-i}}(k) \tag{2.7}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}S_{i,q^{n+1-i}}(k)+(n+1)S_{n,q}(k)$$

을 얻게 되고, 특히

$$S_{n,q}(k)=\frac{1}{n+1}\left([k]_q^{n+1}-\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}S_{i,q^{n+1-i}}(k)\right) \tag{2.8}$$

이 됨을 쉽게 알 수가 있다([17]).

최근에 연구된 김(T. Kim)에 의해 연속된 q-정수의 합에 대한 계산을 소개하기 전에, 먼저 필요한 모함수의 정의 및 개념에 대해서 알아보자([17]).

q-베르누이 다항식 $\beta_{n,q}(x)$은 생성함수의 계수로 표현되며 그 정의는 아래와 같다.

$$F_q(x,t)=e^{t/(1-q)}\frac{q-1}{\log q}-t\sum_{n=0}^{\infty}q^{n+x}e^{[n+x]_q t} \tag{2.9}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_{n,q}(x)}{n!}t^n.$$

여기서 $|q|<1,\ |t|<1$ 이다([28]).

특히 $x=0$인 q-베르누이 다항식 $\beta_{n,q}(=\beta_{n,q}(0))$을 q-베르누이 수라고 부른다.

식(1.9)을 이용하면,

$$\beta_{n,q}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}q^{jx}\beta_{j,q}[x]_q^{n-j} \tag{2.10}$$

$$=\left(\frac{1}{1-q}\right)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{k}{[k]_q}q^{kx}$$

을 얻을 수 있다.

식(1.9)와 식(1.10)에서, q-베르누이 수는

$$\beta_{0,q}=\frac{q-1}{\log q},\quad (q\beta+1)^k-\beta_{k,q}=\delta_{k,1} \tag{2.11}$$

가 된다. 여기에서, $\delta_{k,1}$ 은 크로네커 부호이다([28]).

우리는 상징적인 기호로 β^i을 $\beta_{i,q}$로 나타낸다.
식(1.9), 식(1.10)과 식(1.11)을 이용하면,

$$-\sum_{l=0}^{\infty} q^{l+k}\exp([l+k]_q t)+\sum_{l=0}^{\infty} q^l \exp([l]_q t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sum_{l=0}^{k-1} q^l [l]^{n-1}\right)\frac{t^{n-1}}{n!}$$

을 얻을 수 있다. 이것으로부터

$$\beta_{n,q}(k)-\beta_{n,q}=n\sum_{l=0}^{k-1} q^l [l]_q^{n-1} \tag{1.12}$$

을 얻는다([17], [28]).
자연스럽게 식(1.8)과 식(1.12)로 부터, 우리는 아래가 됨을 알 수가 있다.

n은 음이 아닌 정수이고, $k>1$인 정수이면,

$$S_{n,q}(k)=\sum_{l=0}^{k-1} q^l [l]_q^n \tag{1.13}$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{n}\binom{n+1}{l} q^{kl}\beta_{l,q}[k]_q^{n+1+l}-\frac{(1-q^{(n+1)k})}{n+1}\beta_{n+1,q}$$

이다. 여기서 식(1.10)을 이용하면 다음 식을 유도 할 수가 있다.
n은 음이 아닌 정수이고, k>1 인 정수이면,

$$\int_0^k \beta_{n,q}(x)\,d[x]_q=\frac{1}{n+1}(\beta_{n+1,q}(k)-\beta_{n+1,q})=S_{n,q}(k)$$

이다([17]).

임의의 정수 $n, k>1$ 이고 h가 정수일 때,

$$S_{n,q^h}(k)=\sum_{j=0}^{n} q^{hj}[k]_q^n$$

이라 놓고 김(T. Kim, [17])은 이 함수를 이용하여 다음과 같은

$$S_{n,q}(k)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}\beta_{j,q}q^{kj}[k]_q^{n+1-j}-\frac{(1-q^{(n+1)k})\beta_{n+1,q}}{n+1},$$

베르누이수와 연결을 가지는 관계식을 만들었다. 여기에서 $\beta_{j,q}$ 는 변형화된 카리즈 q-베르누이 수이다.
실제로, 위 식은 연속된 정수의 멱의 합과 관련된 베르누이 공식의 정확한 q-아날로그가 된다는 것을 알 수가 있다.

3. 시로스(Michael Schlosser)의 연속된 q-정수에 대한 합([35])

1993년 Math. Computation에서 너스(D. E. Knuth)는 파울하버의 이론에 대해서 소개하였고([13], 16], [32]), 2000년에 와서는 파울하버의 q-아날로그 개념으로 가레트(K. Garrett)와 험멜(K. Hummel), 워너(S. O. Warnaar) 등 많은 수학자들이 조합론적인 입장에서 제1절에서 소개된 $S_n(k)$의 $n=1,2,3$에 대한 q-아날로그 이론에 대해서 많이 연구하였고, 워너([38])는 $n=2,3$의 q-아날로그에 대한 공식을 얻었다. 특히, 워너는 그의 논문에서 그가 발견한 공식보다 더욱 간단하고 유용한 q-아날로그 이론을 구할 수 있겠는가? 등의 연구 문제들을 제안하였다. 그 이후 가레트(K. Garrett)와 험멜(K. Hummel, [14])은 워너의 공식을 더욱 간단히 하고 다양한 q-아날로그 이론들을 연구한 후 $n=4$이상에 대하여 $S_n(k)$의 q-아날로그를 구하는 문제를 제안하였다. 2004년에 시로서(M. Schlosser, [35])가 이러한 문제의 답으로써 $S_n(k)$에서 $n=1,2,3,4,5,6$에 대한 q-아날로그 이론을 q-초월기하함수를 사용하여 얻었고([15], [35]), 또한 그는 유사한 방법으로 '베르누이처럼 $n=6$이상의 고차에 대해서도 q-아날로그 합의 공식을 유도할 수 있는가?'에 대한 문제를 제안하였다. 그리고 그는 이러한 합이 카리즈(L. Carlitz)의 q-베르누이 수 혹은 다른 q-베르누이수와 밀접한 관계가 있을 것이라고 추측하였다. 이러한 것을 추측함에 있어서 그는 컴퓨터를 활용하였다.

본 장에서는 시로스([35])의 이론과 관련된 내용들을 소개한다.

n, m은 정수라 하고,

$$S_{m,n}(q)=\sum_{k=1}^{n}[k]_{q^2}[k]_q^{m-1}q^{(n-k)\frac{m+1}{2}}$$

라는 S 함수를 정의 하자.

예를 들어 소개하면 다음과 같다([35]).

$$S_{1,n}(q)=\frac{(1-q^{n+1})(1-q^n)}{(1-q)(1-q^2)},$$

....

$$S_{5,n}(q)=\frac{(1-q^{n+1})^2(1-q^n)^2}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}\left(\frac{(1-q^{n+1})(1-q^n)}{(1-q)^2}-\frac{1-q}{1-q^2}q^n\right),$$

$$S_{6,n}(q)=\frac{(1-q^{n+1})(1-q^n)(1-q^{n+1/2})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^{7/2})}\left[\frac{(1-q^{n+1})^2(1-q^n)^2}{(1-q)^4}\right.$$
$$\left.-(2+2q+q^{1/2})\left(\frac{(1+q^{n+1})(1-q^n)q^n}{(1-q)(1-q^{5/2})(1+q^{1/2})}-\frac{(1+q^{1/2})^2q^{2n}}{(1-q^{3/2})(1-q^{5/2})}\right)\right],$$

....

$$S_{11,n}(q)=\frac{(1-q^n)^2(1-q^{n+1})^2}{(1-q)^3(1-q^6)}\Bigg[\frac{(1-q^n)^4(1-q^{n+1})^4}{(1-q)^7(1-q^2)}$$

$$-\frac{2(2+q+2q^2)(1-q^n)^3(1-q^{n+1})^3q^{2n}}{(1-q)^5(1-q^5)}$$

$$+\frac{(9+19q+29q^2+19q^3+9q^4)(1-q^n)^2(1-q^{n+1})^2q^{3n}}{(1-q)^2(1-q^4)(1-q^5)}$$

$$-2(7q^2+11q+7)\left(\frac{(1-q^n)(1-q^{n+1})q^{4n}}{(1-q^4)(1-q^5)}-\frac{(1-q)^3q^{5n}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^5)}\right)\Bigg].$$

여기서 주의하여 볼 사실은 $q\to1$을 시행하면 파울하버의 결과가 유도된다는 흥미있는 사실이다([35]).

이제 우리는 새로운 함수

$$T_{m,n}(q)=\sum_{k=1}^{n}[k]_{q^2}[k]_q^{m-1}q^{(n-k)(m+1)/2}$$

에 대해서 생각해보자.

$n>0$보다 큰 정수에 대하여, q-베르누이 수 $\beta^*_{n,k,q}$ 의 생성함수를 생각하면,

$$F^*_{k,q}(t)=-t\sum_{j=0}^{\infty}q^{k-j}[j]_{q^2}\exp(t\,[j]_q q^{(k-j)/2})$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\beta^*_{n,k,q}\frac{t^n}{n!}.$$

이다.

위 식을 이용하면 다음을 얻을 수 있다.

k,n을 양의 정수라 하고 n을 짝수라 하면,

$$\beta^*_{n,k,q}=\left(\frac{1}{1-q}\right)^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n}{m}\frac{(-1)^m mq^{(n-1)(k-1)/2+k+m-2}}{(1-q^{-(n-1)/2+m-2})(1-q^{m-(n-1)/2})}$$

의 관계식을 만족한다.

$n>0$인 정수라 가정하고 조금 변형된 q -베르누이 다항식 $\beta^*_{n,k,q}(k)$ 의 생성함수를 고려하면 다음과 같이 되는 것을 얻을 수 있다.

$$F^*_{k,q}(t;k)=-t\sum_{j=0}^{\infty}q^{-j}[j+k]_{q^2}\exp(t[j+k]_q q^{-j/2})$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^*_{n,k,q}(k)}{n!}t^n.$$

여기서 k, n을 양의 정수라 하고 n을 짝수라 하면,

$$\beta^*_{n,k,q}(k)=\frac{1}{[2]_q(1-q)^n}\left(\frac{1}{1-q}\right)^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n}{m}(-1)^m\left(\frac{mq^{k(m-1)}}{(1-q^{-(n-1)/2+m-2})}-\frac{mq^{k(m+1)}}{(1-q^{-(n-1)/2+m})}\right)$$

의 관계식을 만족한다.

또한, k, n을 양의 정수라 하고 n을 짝수라 하면,

$$T_{n,k-1}(q)=\sum_{j=0}^{k-1}[j]_{q^2}[j]_q^{n-1}q^{(n+1)(k-j)/2}=\frac{\beta^*_{n,k,q}(k)-\beta^*_{n,k,q}}{n}$$

의 관계식을 얻는다. 본 장에서 취급된 공식들 또한 300년 전부터 현재까지 수많은 수학자들을 매료시킨 그 유명한 베르누이와 파울하버의 연속된 정수의 합과 관련된 낮은 차수에서의 q-확장 이론으로 볼 수 있다.

4. 베르누이-오일러-김(Bernoulli-Euler-Kim)의 공식([5], [6], [29])

n, k가 정수이고, k는 1보다 큰 양의 정수라 하자.
우리는 베르누이와 밀접한 관련이 있는 한 함수를 소개한다.
즉,

$$S_{n,q}(k)=\sum_{l=0}^{k-1}q^l l^n$$

이라 놓자([29]).

특히, j를 양의 정수라 하면,

$$q^{j+1}(j+1)-q^j j=(q-1)q^j j+q^{j+1} \tag{4.1}$$

임을 알 수 있다.

식(4.1)로 부터,

$$(q-1)\sum_{j=0}^{k-1}q^j j+q[k]_q=q^k k\ , \tag{4.2}$$

가 되고, 이것으로부터

$$S_{1,q}(k)=\sum_{j=0}^{k-1}q^j j=\frac{q^k k-q[k]_q}{q-1} \tag{4.3}$$

임을 알 수 있다.

아래의 식은 간단한 계산으로부터 나온다.

$$\frac{k(k-1)}{2} = \lim_{q\to 1}\frac{q^k k - q[k]_q}{q-1} = S_1(k)$$

식(4.1)을 계산하는 것과 비슷한 방법으로,

$$q^{j+1}(j+1)^2 - q^j j^2 = (q-1)q^j j^2 + 2q^{j+1}j + q^{j+1} \tag{4.4}$$

이 유도되고, 식(4.4)를 이용하면 식(4.5)을 얻는다.

$$S_{2,q}(k) = \sum_{j=0}^{k-1} q^j j^2 = \frac{q^k k^2}{q-1} - 2q\frac{q^k k - q[k]_q}{(q-1)^2} - \frac{q[k]_q}{q-1}. \tag{4.5}$$

간단한 계산에 의해서

$$q^{j+1}(j+1)^3 - q^j j^3 = (q-1)q^j j^3 + 3q^{j+1}j^2 + 3q^{j+1}j + q^{j+1}, \tag{4.6}$$

$$q^k k^3 = (q-1)S_{3,q}(k) + 3qS_{2,q}(k) + 3qS_{1,q}(k) + q[k]_q$$

을 얻을 수 있고, 식(4.5)와 식(4.6)을 이용하여 식(4.7)을 도출할 수 있다.

$$S_{3,q}(k) = \frac{q^k k^3}{q-1} - \frac{3q}{q-1}S_{2,q}(k) - \frac{3q}{q-1}S_{1,q}(k) - \frac{q[k]_q}{q-1}. \tag{4.7}$$

$S_{n,q}(k)$의 성질로부터,

$$q^{l+1}(l+1)^{n+1} - q^l l^{n+1} = q^{l+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i} l^i + (q-1)l^{n+1}q^l$$

이 된다. 이 식을 변형하면 아래 식(4.8)이 유도된다.

$$q^k k^{n+1} = q(n+1)S_{n,q}(k) + q\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}S_{i,q}(k) + (q-1)S_{n+1,q}(k). \tag{4.8}$$

위에서 살펴본바와 같이 우리는 다음을 관찰 할 수 있다.

n, k가 정수이고, k는 1보다 큰 양의 정수라 하면,

$$S_{n,q}(k) = \frac{k^{n+1}}{n+1}q^{k-1} - \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}S_{i,q}(k) + \frac{1-q}{q(n+1)}S_{n+1,q}(k) \tag{4.9}$$

이다.

위 식(4.9)에 극한값을 취하면,

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 1} S_{n,q}(k) &= \lim_{q\to 1}\left(\frac{k^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}S_{i,q}(k)\right.\\ &\quad\left. + \frac{1-q}{q(n+1)}S_{n+1,q}(k)\right) = \frac{k^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}S_i(k)\\ &= S_n(k)\end{aligned}$$

가 됨을 알 수 있다.

이제, q-베르누이 다항식

$$F_q(t,x)=\frac{\log q+t}{qe^t-1}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,q}(x)\frac{t^n}{n!} \tag{4.10}$$

에 대하여 생각하자([29]).

여기서 t 가 복소수이고, $|t|<2\pi$ 이면

$$F_q(t,x)=-(t+\log q)\sum_{n=0}^{\infty}e^{(n+x)t}q^n \tag{4.11}$$

이 되고, 특히 n이 0보다 같거나 크면,

$$B_{n,q}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_{j,q}x^{n-j}=m^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}q^iB_{n,q^m}\left(\frac{x+i}{m}\right) \tag{4.12}$$

이 성립한다([29]).

간단한 계산으로부터

$$-\sum_{n=0}^{\infty}e^{(n+k)t}q^n+\sum_{n=0}^{\infty}e^{nt}q^{n-k}=\sum_{l=0}^{\infty}(q^{-k}\sum_{n=0}^{k-1}n^lq^n)\frac{t^n}{l!} \tag{4.13}$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}(q^{-k}l\sum_{n=0}^{k-1}n^{l-1}q^n)\frac{t^{l-1}}{l!}$$

이 나오고, 아래의 식(4.14)는 식(4.13)으로부터 유도된다([29]).

$$\sum_{n=0}^{\infty}(B_{l,q}(k)-q^{-k}B_{l,q}(0))\frac{t^l}{l!} \tag{4.14}$$

$$=-(t+\log q)\sum_{n=0}^{\infty}e^{(n+k)t}q^n+(t+\log q)\sum_{n=0}^{\infty}e^{nt}q^{n-k}$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}(q^{-k}lS_{l,q}(k))+(q^{-k}\log q)S_{l,q}(k)\frac{t^l}{l!}$$

l, k 가 양의 정수이고, k가 1보다 클 경우, 식 (4.14)에서 양변의 계수를 비교하면,

$$q^{-k}S_{l-1,q}(k)+(q^{-k}\log q)S_{l,q}(k)=\frac{B_{l,q}(k)-q^{-k}B_{l,q}(0)}{l}$$

이다. 특히, $q=e^{-1}$ 취하면,

$$S_{l-1,q}(k)-S_{l,q}(k)=q^k\frac{B_{l,q}(k)-q^{-k}B_{l,q}(0)}{l}$$

이 됨을 알 수 있다.

한편, $S_{n+1,q}(k)=q\frac{d}{dq}S_{n,q}(k)$을 이용함으로써 이러한 합이 아래와 같이 중요한 제2종 Stirling 수와 관계있음을 볼 수 있다:

$$S_{n+1,q}(k)=\sum_{i=1}^{n}q^iS(n,i)\left(\frac{d}{dq}\right)^iS_{0,q}(k).$$

(단, $S_{0,q}(k)=[k]_q$ 이고 $S(n,i)$는 제2종 Stirling 수를 나타낸다)([29]).

5. 결론

앞에서 연속된 정수의 멱의 합(n-제곱합)의 대한 변천사를 살펴보았다. 파울하버가 $n=17$까지 멱의(n-제곱) 합을 구하였으나 임의의 멱의 합에 대해서는 해결하지 못하였다. 그러나 연속된 정수의 멱의 합은 베르누이 다항식으로부터 도출할 수 있다. 베르누이 수에 관한 연구는 1800년경에 이르러 초 베르누이(Ultra Bernoulli) 수의 존재성에 대한 문제가 제기되고, 1948년 카리즈(Carlitz)는 처음으로 초 베르누이 수의 개념으로 q-베르누이 수와 다항식을 구성하게 된다. 그 이후 코블리즈(Neal Koblitz)가 1982년경에 q-베르누이 수와 관련된 p-진 q-L-함수를 구성함으로써 q-베르누이 수가 정수론에 활용되어질 수 있는 계기가 마련된 것으로 생각된다. 그리고 1990년부터는 많은 수학자들이 q-베르누이 수와 관련된 많은 합동식과 q-제타함수 및 q-L-함수 등을 연구하고 있는 것으로 조사되었다. 최근에는, 파울하버의 q-아날로그 의미로 수학자들이 조합론적인 관점에서 $S_n(k)$의 q-아날로그 이론을 연구하고 있다. 그 중에서 시로스(Schlosser)는 $S_n(k)$에서 $n=1,2,3,4,5,6$에 대한 q-아날로그 이론을 q-초월기하함수를 사용하여 얻었고, 또한 그는 유사한 방법으로 베르누이처럼 $n=6$ 이상의 고차인 q-아날로그 합이 카리즈의 q-베르누이 수 혹은 다른 q-베르누이 수의 형태로 나타날 것이라고 컴퓨터를 활용하여 추측하였다([35]). 그러나 제2절에서 소개한 바와 같이 시로서의 이론보다 훨씬 간단하고 유용한 이론 및 베르누이 공식의 정확한 q-아날로그 공식들이 김태균(Taekyun Kim)에 의해 먼저 발표되었다. 이러한 이론들은 그의 비슷한 시기에 같은 목적을 가지고 다른 방법으로 각각 연구된 것으로 사료된다.

감사의 글 본 논문을 심사하여주시고 좋은 조언을 주신 심사위원님께 감사드립니다.

참고 문헌

1. 김태균 · 박달원 · 박홍경 · 임석훈 · 유천성 · 장이채 · 정인철(2004), 비아르키메디언 해석학 입문, 교우사.
2. 김태균 외, q-정수의 세계와 그 응용, 교우사. 2006.
3. 이우영 · 신항균 · 이홍렬 옮김(2001), 수학의 황제 가우스, 일공일공일.
4. Apostol, T, *Introduction to analytic number theory*, Springer -Verlag, New York. 1976.
5. Bernoulli, J. Ars Conjectandi, Basel, (Reprinted on pp. 106-286 in Vol. 3 of

"Die Werke von Jakob Bernoulli, Birkhauser Verlag", Basel, 1975. See also SMITH D.E. 1, (1713), 85-90.
6. Bernoulli, J., *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leipzig, 1899.
7. Carlitz, L., *An analogue of the von Staudt-Clausen theorem*, Duke Math. J. 3, (1937) 503-517.
8. Carlitz, L., *An analogue of the von Staudt-Clausen theorem*, Duke Math. J. 7, (1940) 62-67.
9. Carlitz, L., *An analogue of the Bernoulli polynomials*, Duke Math. J. 8, (1941) 405-412.
10. Carlitz, L., *Generalized Bernoulli and Euler numbers*, Duke Math. J. 8, (1941) ,585-589.
11. Carlitz, L., *q-Bernoulli numbers and polynomials*, Duke Math. J. 15, (1948) 987-1000.
12. Dilcher, K., *A Bibliography of Bernoulli Numbers*, http://www.mscs.dal.ca/~dilcher/bernoulli.html, December 31. 2004.
13. Faulhaber, J., *Academia Algebrae,* Darinnen die miraculosischeInventiones zu den h¨ochsten Cossen weiters continuirt und profitiert werden', Augspurg, bey Johann Ulrich Sch¨onigs, 1631
14. Garrett, K. C., Hummel, K. A., *Combinatorial proof of the sum of q-cubes*, Electron. J. Combin.11. 2004
15. Gasper, G., Rahman, M., *Basic hypergeometric series, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications* 35, Cambridge University Press, Cambridge. 1990
16. Goulden, I. P., Jackson, D. M. (2004), *Combinatorial enumeration, reprint of the 1983 original*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY,
17. Kim, T., *Sums of powers of consecutive q-integers.* Adv. Stud. Contemp. Math. 1, (2004) 15-18.
18. Kim, T., *An analogue of Bernoulli numbers and their congruences*, Rep. Fac. Sci. Engrg. Saga Univ. Math., 22 (2), (1994) 21-26.
19. Kim, T., *On explicit formulas of p-adic q-L-functions*, Kyushu J. Math., 48(1), (1994) 78-86.
20. Kim, T., *On a q-analogue of the p-adic log gamma functions and related integrals*, J. Number Theory 76(2), (1999) 320-329.
21. Kim, T., *Sums of products of q-Bernoulli numbers*, Arch. Math. (Basel) 76(3), (2001) 190-195.
22. Kim, T., *Remark on p-adic q-L-functions and sums of powers*, Proc. Jangjeon

Math. Soc. 1, (2000) 161-169.

23. Kim, T., *Remark on p-adic proofs for q-Bernoulli and Eulerian numbers of higher order*, Proc. Jangjeon Math. Soc. 2, (2001) 9-15.
24. Kim, T., *'Some q-Bernoulli numbers of higher order associated with the p-adic q-integers'*, Proc. Jangjeon Math. Soc. 2, (2001) 23-28.
25. Kim, T., *A note on p-adic q-Dedekind sums'*, C. R. Acad. Bulgare Sci. 54(10), (2001) 37-42.
26. Kim, T., *A note on the solutions for exercise problems of p-adic q-integrals*, Proc. Jangjeon Math. Soc. 2, (2001) 45-49.
27. Kim, T., *Some formulae for the q-Bernoulli and Euler polynomials of higher order*, J. Math. Anal. Appl. 273 (1), (2002) 236-242.
28. Kim, T., *On p-adic q-L-functions and sums of powers*, Discrete Math. 252(1-3), (2002) 179-187.
29. Kim, T., *A note on exploring the sums of powers of consecutive q-integers.* Adv. Stud. Contemp. Math. 11(1), (2002) 137-140.
30. Kim, T., Ryoo, C.S., Jang, L. C., Rim, S. H., *Exploring the sums of powers of consecutive q-integers,* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 36(8), (2005) 947-956.
31. Knuth, D. E., *Johann Faulhaber and sums of powers*, Math. Comp. 61, 77-294.
32. Koblitz, N.(1982), *On Carlitz's q-Bernoulli numbers*, J. Number Theory, 14, (1993) 332-339.
33. Rim, S. H., Kim, T., Ryoo, C. S., *On the alternating sums of powers of consecutive q-integers*, to appear Bull. Korean Math. Soc.42. 2006.
34. Satoh, J., *q-analogue of Riemann's ζ-function and q-Euler number*, J. Number Theory, 31(3), (1989) 346-362.
35. Schlosser, M., *q-Analogues of the sums of consecutive integers, squares, cubes, quarts and quints*, Elect. J. Comb. 11, #R71. 2004
36. Shen, Y.-Y..(民國 八十九年七月), *Exploring the sums of powers of consecutive Integers with Mathematica*, 東海科學弟2卷, 45-48
37. Shen, Y.-Y., *A note on the sums of powers of consecutive integers*, Tunghai Science 5, (2003) 101-106
38. Warnaar, S. O., *On the q-analogue of the sum of cubes*, Electron. J. Combin. 11 , #N13. 2004.

On the Historical investigation of Sums of Power of Consecutive Integer

Information Technology Service, Kyungpook National Univ. **Dong-Jin Kang**
Department of Mathematics , Chobuk National Univ. **Dae-Yeoul Kim**
Department of Mathematics Education, Kongju National Univ. **Dal-Won Park**
Department of Mathematics Education, Kongju National Univ. **Jong-Jin Seo**
Department of Mathematics Education Kyungpook National Univ. **Seog-Hoo Rim**
Department of Mathematics and Computer Science, KonKuk Univ. **Lee-Chae Jang**

In 1713, J. Bernoulli first discovered the method which one can produce those formulae for the sum $\sum_{l=1}^{n} l^k$ for any natural numbers k ([5],[6]). In this paper, we investigate for the historical background and motivation of the sums of powers of consecutive integers due to J. Bernoulli. Finally, we introduce and discuss for the subjects which are studying related to these areas in the recent.

Key words: Bernoulli numbers and polynomials, historical background, Sums of powers of consecutive integers

2000 Mathematics Subject Classification: 97D30

논문접수: 2005년 11월 16일 심사완료: 2005년 12월