한국수학사학회지 제19권 제1호(2006년 2월), 79-90

정오각형 작도에 의한 특수각의 삼각비 유도

영남대학교 수학교육과 조정수
chocs@yu.ac.kr

본 논문은 중·고등학교에서 특수각의 삼각비를 삼각비의 원래 기원인 기하학적 의미가 아닌 지나친 대수적 접근방법으로 지도하고 있다는 문제점으로부터 출발하여 특수각의 삼각비를 유클리드 <원론>에 기초한 정오각형과 정십각형의 작도법으로부터 유도하고자 한다. 이를 위하여 정오각형과 정십각형의 작도법을 고찰하고 이로부터 다양한 특수각을 기하적으로 유도하고 있다. 이런 기하학적 방법을 통하여 특수각의 삼각비의 기하학적 의미를 재조명하고 수학사를 활용한 삼각비의 교수 방법을 제시하고자 한다.

주제어 : 특수각, 삼각비, 정오각형, 정십각형, 유클리드 <원론>, 에일스의 직각삼각형

0. 서론

제 7차 수학과 교육과정에서 삼각함수에 대한 개념은 중학교 9-나에 삼각비의 개념으로 처음 소개된다. 한 예각의 크기가 같은 서로 닮은꼴의 직각삼각형을 이용하여 이 예각 A에 대한 변의 길이비로서 $\sin A$, $\cos A$, $tan A$를 이 예각의 삼각비라고 도입하고 있다([1], [2], [5], [6]). 또한 9-나에서는 정삼각형과 정사각형의 변의 길이 사이의 비를 이용하여 30°, 45°, 60°의 삼각비의 값을 구하고 있다. 예를 들어, $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 등의 값을 구한다. 또한 $\sin 50°$와 같은 일반적인 삼각비의 값은 반지름이 1인 사분원을 사용하여 x, y축을 균등하게 5등분이나 10등분으로 나눈 다음 각을 작도하고 그 각의 변이 사분원과 만나는 x, y 좌표값의 비를 구하여 약 0.77이라는 근사값을 구하도록 지도하고 있다([6]). 또는 삼각비의 표를 읽음으로써 그 값을 구하도록 하고 있다. 그리고 10-나에서는 일반각과 호도법을 도입하여 $\pi \pm \theta$, $\frac{\pi}{2} \pm \theta$로부터 $\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$ 과 같이 $sin150°$의 값을 구하고 있다([3]).

그런데 위에서 언급했듯이 9-나에서만 정삼각형과 정사각형을 사용하여 삼각비의 값을 구하는 방법을 지도하고 그 이후로부터는 대수적 알고리즘에 의해 이들 값을 구하고 있다. 이런 지도 방법을 취함으로 해서 중·고등학교에서 삼각비와 삼각함수를 배우는 학생들은 삼각비와 삼각함수의 기하학적 기원과 그 의미를 상실하게 된다. 예를 들어, 15°, 18°, 36°, 54°, 72° 등에 대한 삼각비는 고등학교에서 다루는 sin과 cos의 대수적인 덧셈정리와 뺄셈정리를 사용해야만 구할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 이러한 각들의 삼각비를 유클리드의 정오각형 작도법과 에일스의 직각삼각형 작도를 이용하여 구하는 기하학적 방법을 소개하고자 한다. 이를 통하여 단순히 대수적 방법에만 의존해서 지도하는 현재의 지도관행에서 벗어나 이들 각에 대한 기하학적 의미와 이들 사이의 수학적 연결성, 그리고 수학사를 활용한 삼각비의 지도방법을 탐색하는데 본 논문의 목적이 있다.

1. 수학사적 배경

유클리드 <원론> IV권의 명제 11은 “원이 주어졌을 때 각과 변이 동일한 오각형을 내접시킬 수 있다”, 명제 12는 “원이 주어졌을 때 각과 변이 동일한 오각형을 이 원에 외접시킬 수 있다”, 명제 13은 “각과 변이 동일한 오각형이 주어졌을 때 이 오각형에 원을 내접시킬 수 있다”, 그리고 명제 14는 “각과 변이 도일한 오각형이 주어졌을 때 이 오각형에 원을 외접시킬 수 있다”라고 정오각형의 작도를 제시하고 있다([7]).

또한 유클리드 <원론> X권에서는 일정한 단위길이로 측정 가능한 통약가능 수(commensurable)와 비통약가능 수(incommensurable), 그리고 이들 수에 대한 정의로부터 직선과 정사각형의 통약가능과 비통약가능을 정의하고 있다. 그리고 직선과 정사각형의 통약가능한 선분의 길이를 유리수라고 하고, 그렇지 않은 선분의 길이를 무리수라고 정의하고 있다([8]). <원론> X권의 내용은 무리수에 관한 이론으로서 오늘날의 기호로 표현하면 근호와 이중근호를 포함하고 있으며 이러한 무리수를 기하학적으로 해석하고 있다.

수를 기하학적으로 표현하는 사례는 수학의 여러 곳에서 볼 수 있다. 특히 유클리드의 경우 <원론> II권에서 오늘날 ‘기하학적 대수학’이라는 내용을 다루면서 대수식으로 표현되는 관계를 기하학적 용어로 표현하고 있다([4]). 중학교 9-가에서 다루고 있는 곱셈공식인 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$을 정사각형의 넓이로 해석하는 것은 이런 기하학적 대수학의 대표적인 예이다. 수를 기하학적으로 표현하면 수에 대한 의미가 풍부해진다. 예를 들어, 중학교 9-가에서 다루는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$의 경우 분모를 유리화하여 $\frac{\sqrt{2}}{2}$와 대수적으로 같다고 하지만 $\frac{1}{\sqrt{2}}$의 길이를 인식하기는 쉽지 않다. 그런데 기하

학적으로 보면 $\frac{1}{\sqrt{2}}$은 $\sqrt{2}$의 길이의 절반인 $\frac{\sqrt{2}}{2}$로 해석되어 이 무리수에 대한 의미가 보다 풍부해질 수 있게 된다.

삼각함수의 시작도 기하학에 뿌리를 두고 있다는 사실은 이미 널리 알려진 사실이다([10]). 이집트 시대부터 원시적 형태의 삼각법을 이용하여 거대한 피라미드를 건설하였으며 각의 크기인 각도를 측정하는 단위는 바빌로니아인들에 의해 만들어졌다고 한다. 이들은 365일에 기초하여 이와 비슷한 숫자인 360으로 원을 나누었고 이렇게 함으로써 반지름과 길이가 같은 현을 원의 호에 대응시킬 때 모든 원은 6등분된다는 사실 때문이다. 현대적 의미의 삼각법은 고대 최고의 천문학자였던 히파르쿠스(Hipparchus, 기원전 190-120년경)에 의해 처음으로 사용되었는데 그 내용은 프톨레마이오스(Ptolemy)의 '알마게스트'(Almagest)에 대한 해석을 쓴 테온(Theon, 서기 390년경)에 의해 알려지게 되었다. 히파르쿠스는 오늘날의 기호로 표현하자면 평면삼각법의 항등식인 $\sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, $\sin^2\alpha/2 = (1 - cos\alpha)/2$, $\sin(\alpha + \beta) = sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$를 완전히 기하학적인 방법으로 도출하였으며 원에 있어서 각과 현에 대한 공리로 표현하였다.

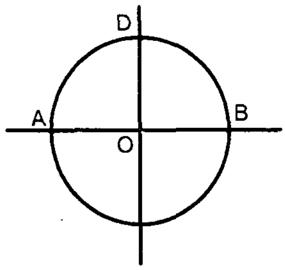
현재까지 알려진 삼각법에 관한 저서 중 가장 중요한 것은 프톨레마이오스(기원전 85-165)의 '알마게스트'인데 이 책에는 프톨레마이오스의 현의 표가 있다. 이 표는 현의 길이를 그에 대응하는 중심각의 함수로 구해 $0°$에서 $180°$까지를 $0.5°$ 간격으로 그 값을 나타낸 것으로 본질적으로 사인값과 같음을 알 수 있다. 이처럼 삼각함수 중에서 사인의 경우는 그 기원이 오래된 반면 나머지 5개의 삼각함수는 비교적 짧은 역사를 가지고 있다([9]). 삼각함수는 프랑스의 비에트(Viete, 1540-1603)에 의해 오늘날의 해석학적 성격을 띠게 되는데 비에트의 기호대수학과 17세기 초의 페르마와 데카르트의 해석기하의 탄생에 의해서이다. 또한 17세기 초 영국의 네이피어(John Napier, 1550-1617)가 고안한 로그는 삼각함수의 복잡한 계산과정을 크게 단순화시켰으며, 삼각함수 기호를 체계적으로 이용한 최초의 수학자인 오트레드(William Oughtred, 1574-1660), 그리고 무한급수에 관한 저서로 유명한 월리스(John Wallis, 1616-1703)에 의해 삼각함수는 현대적 모습을 갖추게 되었다.

지금까지 <원론>의 정오각형의 작도와 무리수 이론 그리고 '기하학적 대수학' 및 삼각함수의 발달에 대하여 간단히 살펴보았다. 수학사의 발달과정에서는 이들 사이의 분명한 연계성을 찾기 힘들지만 수학사를 활용하여 중·고등학교의 수학을 지도하고자 하는 경우 학생들에게 삼각함수의 학습에 대한 의미를 풍부히 할 수 있는 한 가지 방안으로 정오각형의 작도법의 활용은 교수학적 가치를 지닌다고 본다.

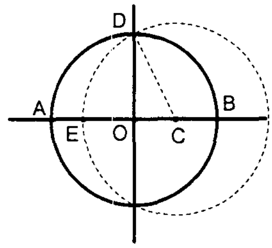
2. 정오각형의 작도법

정오각형의 원에 대한 외접과 내접 작도법은 유클리드의 <원론> IV권의 명제 11, 12, 13, 14에 제시되어 있다([7]). 일반적으로 원의 내접과 외접을 이용한 정오각형의 작도법에는 여러 가지가 소개되어 있는데 다음의 작도법은 그 중에서 보다 간단한 것으로 알려져 있다.

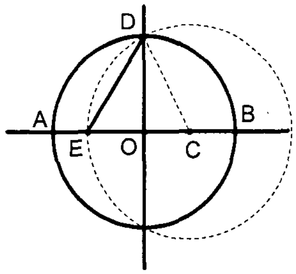
<단계 1>
일정한 반지름을 갖는 원을 작도하고 이 원의 두 지름이 수직이 되도록 작도한다.



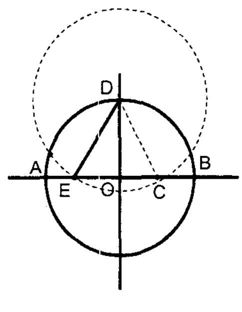
<단계 2>
선분 OB의 중점 C를 작도한다. C를 중심, 선분 DC를 반지름으로 하는 원을 작도해서 이 원이 선분 AO와 만나는 점을 E라 한다.



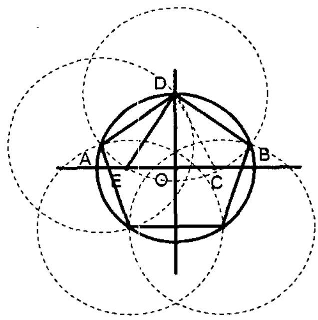
<단계 3>
선분 DE를 작도하면 이것이 정오각형의 한 변의 길이가 된다.



<단계 4>
점 D를 중심으로 하고 DE를 반지름으로 하는 원을 작도하여 두 원이 만나는 점을 잡는다.

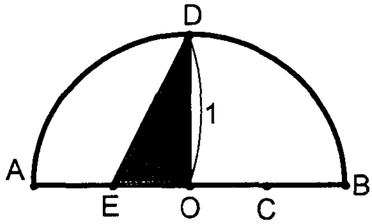


<단계 5>
원주를 따라 이 과정을 반복하고 그 교점들을 연결하면 정오각형이 작도된다.



위에서 작도한 정오각형의 성질에 대해 좀 더 살펴보기 위하여 중심이 O이고 반지

름이 1, 지름을 AB로 하는 <그림 1>을 조사한다.



<그림 1>

이 작도에서는 다음과 같은 중요한 세 가지 사실을 발견할 수 있다.

① 선분 OE는 (내접하는) 정십각형의 한 변의 길이이다.

② 선분 OD는 (내접하는) 정육각형의 한 변의 길이이다.

③ 선분 DE는 (내접하는) 정오각형의 한 변의 길이이다.

여기서 정육각형의 경우 반지름이 한 변의 길이이므로 $OD=1$이 되어 OD의 길이가 정육각형의 한 변의 길이임을 알 수 있다. 따라서 정십각형과 정오각형의 경우만을 살펴보기로 한다.

(1) 유클리드 <원론>과 정다각형의 한 변의 길이

위에서 제시한 정십각형과 정오각형의 한 변의 길이를 구하고자 한다.

① 선분 OE는 내접하는 정십각형의 한 변의 길이이다.

<증명>

$\triangle DOC$가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 적용하면

$$DC^2 = DO^2 + OC^2 = 1 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$$

정오각형 작도과정에서 중심이 C이고 반지름이 CD인 원이 AO와 만나는 점을 E라고 했으므로 $DC=EC$.

$$DC = EC = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$OE = EC - OC = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\therefore OE = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{------------} \ (*)$$ ■

이제 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$의 길이가 정십각형의 한 변의 길이임을 밝히면 OE는 정십각형의 한

변의 길이가 된다. 이를 위하여 먼저 아래 그림과 같이 이등변삼각형 FGH에 대해 $FG=FH=1$, $GH=x$, $\angle GFH=36°$라 하자. $\angle FGH$를 이등분하는 GJ를 작도한다. 그러면 $\angle GFH=36°$이므로 중심각이 $72°$인 정오각형의 절반이므로 결국 $\triangle FGH$는 정십각형을 이루는 한 삼각형이며, 이 x의 길이는 정십각형의 한 변의 길이가 된다. 삼각형의 닮음 성질을 이용하여 이 x의 길이가 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 임을 밝히고자 한다.

<증명>

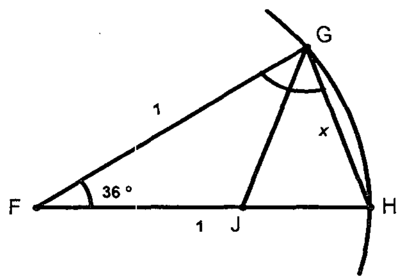
$\triangle FGH$는 이등변삼각형이므로 $\angle FGH=\angle FHG$ 이고, $\angle GFH=36°$이므로

$\angle FGH=\angle FHG=72°$ 이다.

선분 GJ가 $\angle FGH$의 이등분선이므로

$\angle FGJ=\angle JGH=36°$가 되며,

따라서 $\angle FJG=108°$이고 $\angle GJH=72°$가 된다.



<그림 2>

이로부터 이등변삼각형의 성질에 의해

$GH=GJ=FJ=x,\ HJ=1-x$ 이다.

그러면 삼각형의 닮음조건(AA)에 의해 $\triangle FGH \cong \triangle GHJ$ 이다.

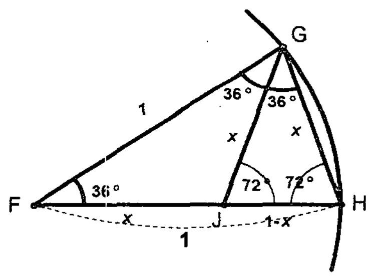
따라서, $\dfrac{FG}{GH}=\dfrac{GH}{HJ}=\dfrac{FH}{GJ}$ 이므로

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1}{x}$ 이다.

$1-x=x^2$

$x^2+x-1=0$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$



<그림 3>

따라서 $x>0$ 이므로 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ------------------(**)

결국 (*)과 (**)로부터 $OE=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 이며 이것은 정십각형의 한 변의 길이이다. ■

② 선분 DE는 내접하는 정오각형의 한 변의 길이이다.

<증명>

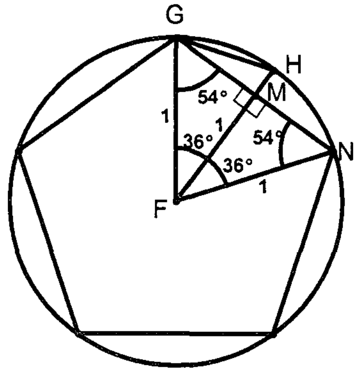
앞의 <그림 1>에서 $\triangle DEO$는 직각삼각형이므로

$$DE^2 = OE^2 + OD^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+1^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{4}$$

따라서 $DE=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$ 가 되어 정오각형의 한 변의 길이가 된다. ■

(2) 36° 와 54° 의 삼각비 구하는 기하학적 방법

다음 <그림 4>에서 보듯이 $\triangle FGN$은 정오각형을 이루는 삼각형이면서 이등변삼각형이므로 $\angle FGN=\angle FNG=54°$ 이다. 선분 GN의 중점 M을 잡아 중심 F를 지나면서 원주에 접하도록 연장하면 선분 FM은 $\angle GFN$의 각의 이등분선이므로 $\angle GFM=36°$ 가 된다.



<그림 4>

이렇게 하면 선분 GM의 길이는 정오각형의 한 변의 길이인 $\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$의 절반이므로

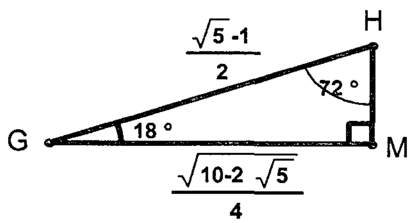
$GM=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ 가 된다. 그리고 선분 GH는 정십각형의 한 변의 길이이므로

$GH=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 이다. 따라서,

$$\sin 36°=\frac{GM}{FG}=\frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{1}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

가 된다. 이 사실로부터 알 수 있는 것은 정오각형의 한 변의 길이를 sin으로 표시하면 $2\sin 36°$ 가 된다.

$\sin 54°$ 를 구하기 위해서는 선분 FM의 길이를 구해야 한다. 그런데 선분 $FM=1-HM$이므로 먼저 선분 HM의 길이를 구하면 된다. 이를 위하여 <그림 4>에서 <그림 5>와 같이 직각삼각형 $\triangle GHM$을 작도한다. <그림 4>에서 볼 때 선분 GH는 정십각형의 한 변의 길이이고, 선분 GM은 정오각형의 한 변의 길이의 절반에 해당하므로 이들 두 선분의 길이를 표시하면 <그림 5>와 같다.



<그림 5>

선분 HM의 길이를 구하기 위하여 피타고라스 정리를 적용하면

$$GH^2 = GM^2 + HM^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2 + HM^2$$

$$HM^2 = \frac{14-6\sqrt{5}}{16}$$

$$HM = \pm\sqrt{\frac{14-6\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{14-2\sqrt{45}}{16}} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{4}$$

$$\therefore HM = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \quad (HM > 0)$$

그리고 $FM = FH - HM = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

위의 결과를 이용하여 <그림 4>로부터 sin54°의 값을 구해보면 다음과 같다.

$$\sin 54^\circ = \frac{FM}{GF} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

(3) 18°와 72°의 삼각비 구하는 기하학적 방법

18°와 72°의 삼각비를 구하기 위해서는 <그림 5>를 이용하면 이제 쉽게 구할 수 있다.

$$\sin 18^\circ = \frac{HM}{GH} = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{4}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\sin 72^\circ = \frac{GM}{GH} = \frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}-2} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{(2\sqrt{5}-2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

지금까지 18°, 36°, 54°, 72°에 대한 sin의 삼각비의 값을 구해 보았으며 그 결과를 요약하면 다음과 같다. 그리고 이들 각에 대한 cos의 값도 위의 그림들을 참고하면 쉽게 유도할 수 있다.

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \qquad \sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

(4) 15°와 75°의 삼각비를 구하는 기하학적 방법

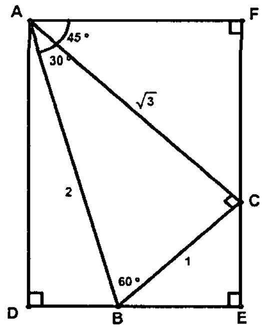
중·고등학교에서 삼각비를 배우는 학생들은 일반적으로 알려져 있는 0°, 30°, 45°, 60°, 90°의 특수각에 대한 비는 정삼각형과 정사각형을 사용하여 쉽게 구할 수 있다. 하지만 15°와 75°에 대한 $sin, cos, \tan$의 값은 $x=45^\circ$, $y=30^\circ$를 대입하여 다음 덧셈공식과 뺄셈공식을 사용하여 구해야 한다.

$$sin(x \pm y) = sinx cosy \pm cosx siny \qquad cos(x \pm y) = cosx cosy \mp sinx siny$$

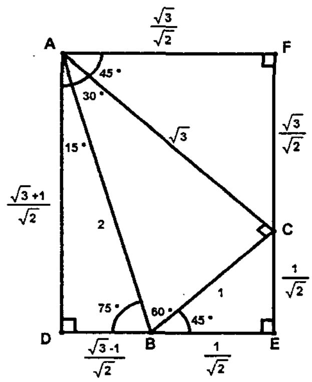
$$tan(x \pm y) = \frac{tanx \pm tany}{1 \mp tanx tany}$$

그런데 캐나다 온타리오의 에토비코대학 부설고등학교의 수학교사인 더그 에일스(Doug Ailles)는 직각삼각형의 작도를 사용하여 아주 간단하게 기하적으로 이들 값을 구하는 방법을 고안해냈다. 따라서 이것을 "에일스의 직각삼각형"이라고 하며 다음 <그림 6>과 같다([12]).

에일스의 직각삼각형을 작도하기 위해서는 먼저 임의의 정삼각형을 작도하여 그 절반의 삼각형을 사용하여 <그림 6>과 같이 30°−60°−90°의 $\triangle ABC$를 작도하고 그 변의 길이를 각각 1, $\sqrt{3}$, 2로 한다. 그리고 이 삼각형이 $\angle FAC = 45^\circ$를 만족하면서 사각형 $ADEF$에 내접하도록 작도한다. 이렇게 한 다음 45°−45°−90° 삼각형과 $AF = DE$와 $AD = FE$를 사용하여 비어있는 각들을 <그림 7>과 같이 채우면 15°, 75°의 삼각비를 구할 수 있는 모든 길이를 구하게 된다.



<그림 6>



<그림 7>

삼각형의 세 내각의 합은 180°이므로 쉽게 삼각형 ACF와 삼각형 BCE는

$45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$의 직각삼각형임을 알 수 있다. 따라서 $AF = FC = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$이 되고 $BE = CE = \frac{1}{\sqrt{2}}$이 된다. 이러한 결과를 사용하면 <그림 7>과 같이 각 변의 길이를 구할 수 있다. 따라서 $\triangle ABD$에서 15°와 75°의 삼각비를 다음과 같이 쉽게 얻을 수 있다.

$$\sin 15^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{BD}{AD} = 2-\sqrt{3}$$

$$\tan 75^\circ = \frac{AD}{BD} = 2+\sqrt{3}$$

3. 결론

수학적 개념들 사이의 관계성을 알 때 수학에 대한 학생들의 이해는 깊어지고 이로부터 얻어지는 지식의 기억도 오래 지속된다([11]). 학교수학의 개념들이 아무런 연관 없이 분리되어 있는 것이 아니라 상호 관련성을 가지고 있다는 것을 수학시간에 강조함으로써 학생들은 제 7차 수학과 교육과정의 수와 연산, 문자와 식, 규칙성과 함수, 도형, 측정, 확률과 통계의 6개 영역의 통합적 성격을 알 수 있을 것이며 이것은 수학교과의 유용성을 인식시키는데도 중요한 기여를 한다.

본 논문은 정오각형과 정십각형의 작도 과정으로부터 특수각에 대한 삼각비를 구하는 방법에 대하여 고찰하였다. 제 7차 수학과 교육과정에서는 중학교 9-나에서 0°, 30°, 45°, 60°, 90°의 특수각에 대해 살펴보고 있으며 본 논문에서 살펴본 15°, 18°, 36°, 54°, 72°, 75°의 특수각들에 대해서는 고등학교에서 삼각함수의 덧셈과 뺄셈정리를 이용하여 지도하고 있다. 이러한 대수적 방법에 대한 특수각의 지도는 학생들로 하여금 공식의 암기와 적용이 삼각함수에서 중요한 것임을 잘못 인식시킬 수

도 있다. 또한 중·고등학교에서 정오각형의 작도를 다루고는 있지만 이 작도 과정과 특수각과의 관계에 대해서는 다루고 있지 않음으로 인해 특수각의 삼각비가 어떤 과정을 통해 유도될 수 있는지를 알 수 없게 된다. 따라서 특수각의 삼각비를 기하적으로 유도할 수 있는 한 가지 방법으로 본 논문에서는 정오각형의 작도를 활용하였다.

본 논문의 고찰에 따르면 제시된 특수각에 대한 삼각비를 정오각형의 작도와 연관시켜 지도한다면 중·고등학교 수학교실의 학생들은 이들 각에 대한 기하학적 의미를 풍부히 습득할 수 있을 것이며 또한 이들 두 내용 사이의 수학사적 관계성, 그리고 이러한 수학 내용 사이의 긴밀한 연결성을 인식할 수 있을 것으로 기대된다. 물론 본 논문에서 고찰한 특수각의 삼각비는 이중근호의 계산 절차의 복잡성으로 인해 정규 중학교 과정보다는 영재반 수업 자료로 보다 적합할 것이며, 고등학교에서는 이들 특수각에 대한 삼각비를 구할 때 삼각함수의 덧셈공식과 뺄셈공식에 의한 계산 결과에 대한 기하학적 해석을 제공하는 심화내용으로 지도 가능할 것으로 본다. 하지만 본 논문에서 제시하고 있는 내용과 계열성에 대한 중·고등학교에서의 교수-학습적 타당성은 여전히 논의의 여지를 남기고 있다고 있으며 이에 대한 교실 수업에서의 실제적 자료의 보완이 필요하다고 본다.

감사의 글 미진한 부분에 대한 지적과 조언을 통해 보다 완성도 높은 논문이 될 수 있도록 도와주신 심사위원님들께 감사드립니다.

참고 문헌

1. 교육부, 수학과 교육 과정 (별책 8), 서울: 대한 교과서 주식회사, 1998.
2. 교육부, 중학교 교육과정 해설(III)-수학, 과학, 기술·가정, 서울: 대한교과서 주식회사, 1999.
3. 신현성, 최용준, 고등학교 수학 10-나, 서울: 천재교육, 2001.
4. W. Dunham/조정수 역, 수학의 천재들, 서울: 경문사, 2004.
5. 조태근, 임성모, 정상권, 이재학, 이성재, 중학교 수학 9-나, 서울: 금성출판사, 2002.
6. 이영하, 허민, 박영훈, 여태경, 중학교 교사용지도서 수학 9-나, 서울: 교문사, 2002.
7. Heath, T. L., *The thirteen books of Euclid's elements: Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary Volume II*, New York: Dover, 1953.
8. Heath, T. L., *The thirteen books of Euclid's elements: Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary Volume III*, New York: Dover, 1953.
9. Mankiewicz, R., *The story of mathematics*, New Jersey, Princeton University

Press, 2000.

10. Maor, E., *Trigonometric delights*, New Jersey, Princeton University Press, 1998.
11. National Council of Teachers of Mathematics., *Principles and standards for school mathematics,* Reston, VA: NCTM, 2000.
12. Vakil, R., *A mathematical mosaic: Patterns & problem solving,* Burlington, Ontario : Brendan Kelly, 1996.

Derivating the Ratios of Trigonometric Special Angles by Constructing Regular Polygon

Dept. of Mathematics Education, Yeungnam University **Cheong Soo Cho**

The purpose of this paper is to derive the ratios of trigonometric special angles from Euclid's <*Elements*> by constructing regular pentagon and decagon. The intention of this paper is started from recognizing that teaching of the special angles in secondary math classroom excessively depends on algebraic approaches rather geometric approaches which are the origin of the trigonometric ratios. In this paper the method of constructing regular pentagon and decagon is reviewed and the geometric relationship between this construction and trigonometric special angles is derived. Through such geometric approach the meaning of trigonometric special angles is analyzed from a geometric perspective and pedagogical ideas of teaching these trigonometric ratios is suggested using history of mathematics.

Key Words: special angles, trigonometric ratios, regular pentagon, regular decagon, Euclid's <Elements>, Ailles' right triangle

2000 Mathematics Subject Classification : 97D40

ZDM Subject Classification : A34

논문접수 : 2006년 1월 15일 심사완료 : 2006년 2월