

유연보의 동역학 해석에 대한 선형 및 비선형 유한요소 정식화

윤성호[#]

Formulations of Linear and Nonlinear Finite Element for Dynamic Flexible Beam

Seong-Ho Yun[#]

ABSTRACT

This paper established the dynamic model of a flexible Timoshenko beam capable of geometrical nonlinearities subject to large overall motions by using the finite element method. Equations of motion are derived by using Hamilton principle and are formulated in terms of finite elements using C^0 elements in which the nonlinear constraint equations are adjoined to the system using Lagrange multipliers. In the final formulation are presented Coriolis and Gyroscopic forces as well as linear and nonlinear stiffnesses effects for the forthcoming numerical computation.

Key Words : Fnite element formulation (유한요소법), Nonlinear dynamics (비선형 동역학) Flexible beam (유연보), Coriolis force (코리올리힘, 전향력), Gyroscopic force (회전자력), C^0 element (C^0 요소)

1. 서론

유연 다물체의 동적해석에 대한 연구는 많은 분야에 응용되고 있다. 대표적인 분야로는 우주 및 항공 구조물, 로봇, 고속운동 기구의 설계이다. 초기의 연구는 작동시스템에 대한 강체 모델에 집중되어왔다. 구조물의 작동속도가 고속화 되고 경량 재료를 사용함에 따라 유연체 모델을 기본으로 한 연구가 많이 이루어지고 있다.

이러한 공학적인 문제를 해결하는데 있어 운동 방정식을 해석적으로 풀거나 유한요소를 이용하여 대수적으로 풀어왔다. 그러나 구조물이 복잡하고 대형화됨에 따라 운동방정식을 직접 푸는 방법은 많은 제약을 가지고 있어 유한요소를 이용하는 것이 더욱 유리하다.³

고속운동을 하면서 변형을 일으킬 때 통상적으로 운동방정식은 비선형이며, 회전으로 인한 코리올리

접수일: 2005년 9월 28일; 게재승인일: 2006년 1월 13일

[#] 교신저자: 금오공과대학교, 기계공학부(자동차)

E-mail shyun@kumoh.ac.kr Tel. (054) 478-7324

(Coriolis) 힘 및 원심력 영향 때문에 관성항이 심하게 연성되어 있다. 이를 위해 유동좌표계 방법(floating frame method)과 관성좌표계 방법(inertial frame method)에 다양한 유한회전(finite rotation) 표현들이 적용되어 왔다.⁴⁻⁶ 하지만 이러한 방법들은 특정한 문제에만 적용되어 왔으며, 선형대수학적인 성질이 아닌 매우 난해한 회전자 연산과 좌표계의 빈번한 변환, 관성항의 텐서변환 등을 내포하고 있다.⁷⁻⁸ 이러한 이유로 말미암아 일반적으로 복잡한 시스템에 수월하게 이용되지 못했다.

상기의 방법들과는 달리, 본 논문에서는 유연 다물체의 거동을 정식화하기 위하여 다음의 두 가지 좌표를 정의할 것이다. 첫째, 강체의 대변위 병진 및 회전운동을 표현하기 위한 기준좌표계를 설정할 것이고, 둘째로 물체의 미소체적 위치를 절점으로 정의한 후 절점간의 상대적 변위인 탄성변형을 표현하기 위한 탄성좌표계를 사용할 것이다. 셋째로 절점에 정의된 요소를 C^0 요소를 적용하여 에너지 식을 해밀턴 정리에 적용할 것이다.

또한, 본 논문에서는 대변위 운동에 의한 기하학적 비선형성과 축변형, 굽힘변형, 전단변형을 포함하는 대표적인 부재인 티모셴코(Timoshenko)보의 요소에 대하여 에너지 방정식과 가정한 형상함수를 이용하여 유한요소 방정식을 유도할 것이다.⁹ 그리고 이웃하고 있는 물체사이에 주어진 구속조건을 라그랑지 상수(Lagrange multiplier)를 도입하여 운동방정식에 포함시킬 것이다.¹⁰ 아울러 정식화 과정을 기반으로 기하학적 선형과 비선형의 영향을 비교하여 비선형 유연보 문제를 다룰 기반을 확보할 것이다.

2. 유연체 운동표현

2.1 유연체의 위치 및 변형

Fig. 1에서 보는 바와 같이 운동 전 물체의 위치 벡터 x 가 운동 후 X 로 이동하였을 때, 변위 $u (=X-x)$ 가 발생한다. 라그랑지 관점에서 재료좌표가 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 으로 주어지면 관성좌표계(inertia frame) I 에서는 위치벡터가 $x(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_i i_i, (i=1, 2, 3)$ 으로 표현될 수 있다. 변형 전후에서 재료선(material line)의 기본벡터 g_i 와 G_i 로 각각 정의할 수 있으며, 변위들도 다음과 같이 표현된다.

$$g_i = \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} = i_i; \tag{1a}$$

$$G_i = \frac{\partial X}{\partial \alpha_i}, \tag{1b}$$

$$X = (x_i + u_i)g_i \tag{2}$$

또한, 벡터 d 와 u_0 는 각각 운동 전후의 미소길이이고, 이 변화량 ΔS 를 식 (3a)로 정의하면 식 (3b)의 Green-Lagrange 변형을 텐서 ϵ_{ij} 와 동일한 표현이 된다.¹¹

$$\frac{\partial \Delta S}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{d^T d - u_0^T u_0}{2 \partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{1}{2} (G_{ij} - g_{ij}); \tag{3a}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ki} + u_{k,i})(\delta_{kj} + u_{k,j}) - g_{ij} \tag{3b}$$

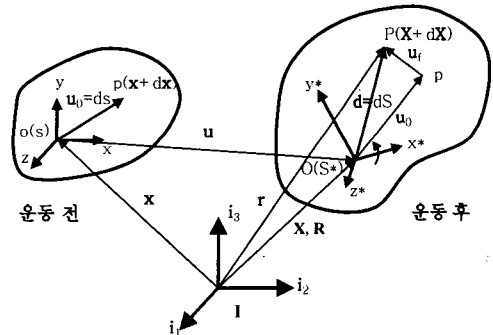


Fig. 1 The position and deformation of a flexible body before and after motion

R 은 관성좌표계 $I(i_1, i_2, i_3)$ 에 대하여 물체에 부착된 유동좌표계 $S^*(x^*, y^*, z^*)$ 의 오일러 회전각 φ 에 대한 행렬을 의미한다. 그리고 탄성변형 후의 물체상의 위치 P 의 좌표를 q_f , 강체운동에 대한 좌표를 q_r 라고 할때, 좌표계의 집합을 q 로 표현할 수 있다.

$$q = \begin{bmatrix} q_r \\ q_f \end{bmatrix}; \tag{4a}$$

$$q_r = [X^T \varphi^T]^T \tag{4b}$$

탄성변위 \mathbf{u}_f 를 형상함수 \mathbf{N} 으로 표현하면 미소 길이 d 와 위치벡터 \mathbf{r} 을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{N}\mathbf{q}_f \quad (5a)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_f = \mathbf{u}_0 + \mathbf{N}\mathbf{q}_f; \quad (5b)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{X} + \mathbf{R}\mathbf{d} = \mathbf{X} + \mathbf{R}\mathbf{u}_0 + \mathbf{R}\mathbf{N}\mathbf{q}_f \quad (5c)$$

2.2 에너지 표현식

속도 벡터는 위치 벡터 식 (5c)를 시간에 대하여 미분을 함으로써 다음과 같이 구할 수가 있다.⁵

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{d} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{N}}\mathbf{q}_f \quad (6)$$

여기서 둘째 항은 체인룰(chain rule)를 적용하면 $\mathbf{R}\dot{\varphi}\dot{\mathbf{d}}$ 로 되며 식 (5)는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{H}\dot{\varphi} + \mathbf{R}\mathbf{N}\dot{\mathbf{q}}_f \quad (7)$$

여기서 $\mathbf{H} = \mathbf{R}\dot{\varphi}\mathbf{d}$ 이고 식 (6)을 다음의 행렬식으로 표현한다.

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{H} & \mathbf{R}\mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}^T & \dot{\varphi}^T & \dot{\mathbf{q}}_f^T \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

속도 벡터를 이용하여 요소의 부피 V^e 와 밀도 ρ^e 를 가지는 n 개의 요소로 구성된 물체의 운동에너지 T 는 다음과 같다.

$$T = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \int_{V^e} \rho^e \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dV^e \quad (9)$$

식(9)에 식(8)을 대입하여 정리하면 질량행렬과 속도 벡터로 이루어진 운동에너지를 얻을 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (10)$$

여기서 질량행렬은 아래와 같다.

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \sum_{e=1}^n \int_{V^e} \rho^e \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{H} & \mathbf{R}\mathbf{N} \\ \mathbf{H}^T & \mathbf{H}^T\mathbf{H} & \mathbf{H}^T\mathbf{R}\mathbf{N} \\ (\mathbf{R}\mathbf{N})^T & (\mathbf{R}\mathbf{N})^T\mathbf{H} & \mathbf{N}^T\mathbf{N} \end{bmatrix} dV^e \quad (11)$$

변형에너지 V 는 탄성계수행렬 \mathbf{E} 와 변형을 벡터 $\boldsymbol{\epsilon}$ 으로 표현 할 수 있다.

$$V = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \int_{V^e} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon} dV^e \quad (12)$$

식 (5a)을 식 (3b)에 대입시키고, 이를 다시 식 (12)에 대입하여 정리하면 변형에너지 식을 얻을 수 있다.

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{q}_f^T (\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_{nl}) \mathbf{q}_f \quad (13)$$

전체 강성행렬 \mathbf{K} 는 선형 강성행렬 \mathbf{K}_l 과 대변위에 대한 비선형 강성행렬 \mathbf{K}_{nl} 의 합으로 표현됨을 알 수 있다.

2.3 운동방정식

해밀톤 정리에 의해서 다음과 같은 운동방정식을 유도할 수 있다.¹¹

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_i}^{t_f} (V - T) dt \\ = \int_{t_i}^{t_f} \delta W_{ext} dt - \left[\int_{V^e} \hat{\mathbf{p}}^T \delta \mathbf{q} dV \right]_{t_i}^{t_f} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 W_{ext} 는 외력에 의한 일이고, 우변 둘째 항은 외부에서 작용된 초기와 나중시간의 모멘텀 $\hat{\mathbf{p}}$ 에 의한 가상일이다. 요소의 표면 S 전체에 작용한 외력 $\hat{\mathbf{t}}$ 와 중력 \mathbf{b} 에 의한 일은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \int_{t_i}^{t_f} \left[\int_{V^e} \mathbf{b}^T \delta \mathbf{q} dV + \int_S \hat{\mathbf{t}}^T \delta \mathbf{q} dS \right] dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} dt; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\delta W_{ext} = \int_{t_i}^{t_f} \delta \phi(\mathbf{q}) dt \quad (16)$$

여기서 $\phi(\mathbf{q})$ 는 작용된 외력 \mathbf{Q} 에 의한 전체 포텐셜이다. 식 (14)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} (V - T + \phi) dt = 0; \quad (17)$$

$$\delta \int_{v_i}^{v_f} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}_f^T \mathbf{K} \mathbf{q}_f + \mathbf{q}^T \mathbf{Q} + \Phi^T \lambda \right] dt = 0 \quad (18)$$

마지막 항은 구속조건에 의해 의한 구속력이다. 부분 적분을 수행하고 δq 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q}_f \\ = \mathbf{Q} - \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_q^T \lambda \right] \end{aligned} \quad (19)$$

우변의 두 번째와 세 번째 항은 속도의 제곱형태로 되어 있으며, 각각 코리올리(Coriolis)힘과 회전자(gyroscopic) 힘을 의미한다.

3. 유연보의 유한요소 정식화

3.1 요소의 자유도 표현

일반적인 보와는 달리 전단변형을 고려하기 위하여 Timoshenko 보를 고려하였다. 이에 따른 굽힘변형, 축변형, 전단변형을 고려한 요소 절점에서의 자유도를 Fig. 2에 나타냈다.

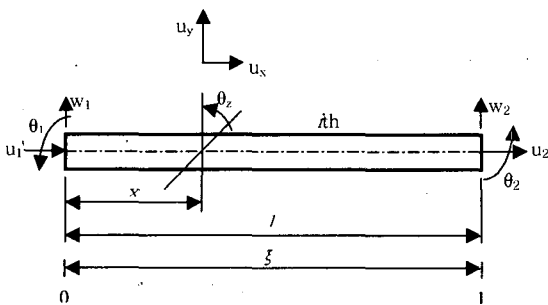


Fig. 2 The degree of freedom of a Timoshenko beam

물리좌표계(physical coordinate) x 와 자연좌표계(natural coordinate) ξ 에 대하여 보의 길이방향에 대한 자코비안 J 는 다음과 같다.

$$J = \frac{dx}{d\xi} = l \quad (20)$$

i 번째 요소 e 의 중립축 위치에서 변형은 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & \theta_z \end{bmatrix}^T = \mathbf{N}^e \mathbf{q}_f^e; \quad (21)$$

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^e & \mathbf{N}_2^e & \mathbf{N}_3^e \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

여기서 사용되는 형상함수들은 C^0 요소를 적용하기 위하여 모두 선형으로 하였다.

3.2 강성행렬

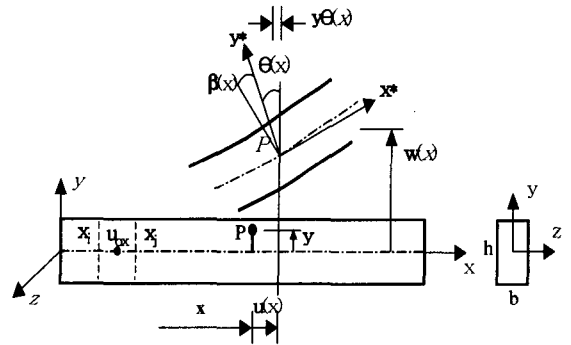


Fig. 3 The deformation of the beam element

Fig. 3은 단면이 균일한 보의 변형을 보여 주고 있다. 중립축 상의 위치 x 에서 보의 횡변형 u_y 는 2개의 효과를 포함하고 있는데, 하나는 굽힘에 의한 것과 전단에 의한 것이다. 중립축으로부터 y 방향의 임의의 점 P 에서 처짐곡선의 기울기는 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_{y_i}}{\partial x} = \theta(x) + \beta(x) \quad (23)$$

여기서 $\theta(x)$ 는 굽힘에 의한 변형 각이고, $\beta(x)$ 는 전단에 의한 변형각이다. 보에서의 위치 (x, y) 에서 축방향 변형 u_x 과 횡변형 u_y 는 다음과 같다.

$$u_x(x, y) \approx u(x) - y\theta(x) \quad (24)$$

$$u_y(x, y) = w(x, y) \approx w(x) \quad (25)$$

따라서 $u(x)$ 는 점 x 위치의 단면에서 동일한 축변형을 나타낸다. 식 (24)와 식 (25)를 다음의 행렬식으로 할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (26)$$

식 (21)을 식 (26)에 대입하고 정리하면 아래와 같은 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \end{bmatrix} q_f^e = Nq_f^e \quad (27)$$

고로 형상함수 N 은 다음과 같이 새로이 정의된다.

$$N = \begin{bmatrix} N_1^e - yN_3^e \\ N_2^e \end{bmatrix} \quad (28)$$

식 (3b)에 사용한 Green-Lagrange 변형률 벡터를 2차 원상에서 생각하면 요소 절점 i 와 j 에서 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\epsilon^e = [\epsilon_{xx}^i \quad \epsilon_{yy}^i \quad \epsilon_{xy}^i \quad \epsilon_{xx}^j \quad \epsilon_{yy}^j \quad \epsilon_{xy}^j]^T \quad (29)$$

상기의 식을 1개 절점에서 선형과 비선형 부분의 미분 연산자인 D_l 과 D_{nl} 로 표현할 수 있다.

$$\epsilon^e = Du_f = (D_l + D_{nl})Nq_f^e \quad (30a)$$

$$D_l^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (30b)$$

$$D_{nl}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{x,x} \frac{\partial}{\partial x} & u_{x,y} \frac{\partial}{\partial y} & 2u_{x,x} \frac{\partial}{\partial y} \\ u_{y,x} \frac{\partial}{\partial x} & u_{y,y} \frac{\partial}{\partial y} & 2u_{y,x} \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (30c)$$

여기서 $(\cdot)_{,x}$ 는 x 에 대한 미분이고, 변형에너지 V 는

식 (12)에 의해서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy}) dV^e \\ &= \frac{1}{2} \int_V (E \epsilon_x^2 + k G \gamma_{xy}^2) dV^e \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 E 는 탄성계수, G 는 전단계수, k 는 단면의 형상에 따른 전단계수(shear coefficient)이다. 식 (13)에서 강성 행렬 $K (= K_l + K_{nl})$ 는 식 (30)을 식 (12)에 대입한 후 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} K &= \sum_{e=1}^n \left\{ \int_V N^T D_l^T E D_l N dV^e \right. \\ &\quad \left. + \int_V N^T [D_{nl}^T E D_{nl} + 2D_l^T E D_{nl}] N dV^e \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

윗 식의 첫째 항은 선형탄성 강성행렬 K_l 이고 둘째 항은 대변위를 고려한 기하학적인 비선형 강성행렬 K_{nl} 이다.

또한 축방향 변형률 ϵ_x 와 전단 변형률 γ_{xy} 는 변형에너지를 계산하는데 있어서 다음의 공학 변형률을 이용한다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

식 (24)와 (25)을 (33)에 대입하고 식 (30)의 미분 연산자를 이용하여 정리하면 다음의 변형률이 얻어진다.

$$\epsilon_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (34a)$$

$$\gamma_{xy} = \left(-\theta + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) (-\theta) \quad (34b)$$

식 (34a)는 축방향 변형률 ϵ_a 와 굽힘 변형률 ϵ_b 가 함께 공존하고 있다.

$$\epsilon_a = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad (35a)$$

$$\epsilon_b = -y \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(-y \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \quad (35b) \quad + \frac{1}{2} kGA \int_V 4\theta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 dV^e$$

식 (34a,b)와 식 (35a)의 첫째 항은 선형이고 나머지 항들은 비선형이다. 식 (34a,b)를 식 (31)의 변형 에너지 식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} EA \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] dx \quad (36) \\ & + \frac{1}{2} EI_z \int_0^l \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + 3 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 \right] dx \\ & + \frac{1}{2} EI_5 \int_0^l \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^4 dx \\ & + \frac{1}{2} kGA \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta\right)^2 + \theta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 \right. \\ & \left. - 2\theta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \right\} dx \end{aligned}$$

여기서 I_z 는 z 축에 대한 2차 단면모멘트이고, I_5 는 z 축에 대한 5차 단면모멘트이다. 선형 변형에 대한 변형에너지를 정리하게 되면 식 (36)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} V_l = & \frac{1}{2} EA \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2} EI_z \int_0^l \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 dx \\ & + \frac{1}{2} kGA \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta\right)^2 dx \quad (37) \end{aligned}$$

비선형 변형에 대한 변형에너지는 변형에 큰 영향을 줄 일부 비선형항을 포함하여 다음과 같이 표현하였다.

$$\begin{aligned} V_{nl} = & \frac{1}{2} EA \int_0^l \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4 dx \\ & + \frac{1}{2} E \int_V \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 dV^e \quad (38) \end{aligned}$$

자코비안 J 와 함께 식 (21)을 이용하면 다음의 관계식 (39)가 얻어지고, 대표적인 예로서 굽힘강성은 식 (40)으로 표현된다.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{J} N_{,\xi}^e q_f^e \quad (39)$$

$$K_{bending} = EI \int_0^1 \frac{1}{J} N_{3,\xi}^T N_{3,\xi} d\xi \quad (40)$$

식 (39)를 식 (37)과 (38)에 대입하고 정리하면 축방향, 굽힘, 전단 강성행렬을 포함하는 전체 변형에너지를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} V = & V_l + V_{nl} \\ = & \frac{1}{2} q_f^T (K_{axial} + K_{bending} + K_{shear}) q_f \quad (41) \end{aligned}$$

상기의 식에서 강성행렬은 식 (32)에 나타난 강성행렬과 동일한 표현이다.

$$K_{axial} + K_{bending} + K_{shear} = K_l + K_{nl} \quad (42)$$

3.3 질량행렬

식 (11)에서 유도된 질량 행렬식에서의 H 행렬은 다음과 같다.

$$H = R_\varphi d = \frac{\partial R}{\partial \varphi} (u_0 + Nq_f) \quad (43)$$

i 와 j 절점을 갖는 요소에서 축방향 초기변위 u_0 는 식 (44)와 같이 자연좌표계 ξ 와 물리좌표계 x 로 표현한 후, 식 (43)에 대입하면 식 (45)를 얻는다.

$$u_0 = \begin{bmatrix} u_{0x} \\ u_{0y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \xi & \xi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\mathbf{H} = \begin{Bmatrix} \{-\sin\varphi[(1-\xi)(x_i+u_i-y\theta_i) \\ +\xi(x_j+u_j-y\theta_j)] - \cos\varphi[(1-\xi)u_i+\xi u_j]\} \\ \{\cos\varphi[(1-\xi)(x_i+u_i-y\theta_i) \\ +\xi(x_j+u_j-y\theta_j)] - \sin\varphi[(1-\xi)u_i+\xi u_j]\} \end{Bmatrix} \quad (45)$$

식 (11)에서 다른 행렬요소도 \mathbf{H} , \mathbf{R} , \mathbf{N} 을 이용하여 구할 수 있다.

3.4 힘 벡터

일반적인 힘 \mathbf{Q} 는 요소의 외력에 의해 물체의 무게 중심에 작용하여 운동을 발생시키는 힘 \mathbf{Q} 과 물체의 절점에서 변형을 발생시키는 힘 \mathbf{Q} 로 나눌 수 있다.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_x(t) \\ \mathbf{Q}_y(t) \\ \mathbf{Q}_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_r(t) \\ \mathbf{Q}_f(t) \end{bmatrix} \quad (46)$$

힘 \mathbf{Q} 에 의하여 수행한 일 W_f 는 다음과 같이 표현된다.

$$W_f = \int_0^1 \mathbf{f} u_x dx + \mathbf{h} [u_x]_{\xi=\xi_n} + \int_0^1 \mathbf{p} u_y dx + \mathbf{Q} [u_y, \theta_z]_{\xi=\xi_o} + \mathbf{M} [\theta_z]_{\xi=\xi_m} \quad (47)$$

여기서 \mathbf{f} 는 길이방향의 단위 길이당 힘이고, \mathbf{h} 는 ξ_n 에 작용한 길이방향의 집중력, \mathbf{p} 는 단위 길이당 횡력, \mathbf{Q} 는 ξ_o 에 작용한 횡방향 집중력, \mathbf{M} 은 ξ_m 에 작용한 집중 모멘트이다.

식 (21)을 이용하여 식 (47)의 첫째와 둘째 항의 가상일은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \delta \int_0^l (\mathbf{N}_1 - y\mathbf{N}_3) \mathbf{q}_f l d\xi + \mathbf{h} [(\mathbf{N}_1 - y\mathbf{N}_3) \mathbf{q}_f]_{\xi=1} \\ & = \left[\frac{1}{2} \mathbf{f} l \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \mathbf{f} l y \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{2} \mathbf{f} l + \mathbf{h} \quad 0 \quad -\left(\frac{1}{2} \mathbf{f} l + \mathbf{h}\right) y \right] \delta \mathbf{q}_f \end{aligned} \quad (48)$$

식 (47)의 나머지 항들의 가상일은 다음과 같다.

$$\delta \int \mathbf{p} \mathbf{N}_2 \mathbf{q}_f l d\xi + \mathbf{Q} [\mathbf{N}_2 \mathbf{q}_f]_{\xi=1} + \mathbf{M} [\mathbf{N}_3 \mathbf{q}_f]_{\xi=1}$$

$$= \left[0 \quad \frac{1}{2} \mathbf{p} l \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \mathbf{p} l + \mathbf{Q} \quad \mathbf{M} \right] \delta \mathbf{q}_f \quad (49)$$

요소의 절점에 대한 일반화된 힘 \mathbf{Q}_f 은 다음과 같다.

$$\mathbf{Q}_{f local}^T = [\mathbf{Q}_{f ui} \quad \mathbf{Q}_{f wi} \quad \mathbf{Q}_{f \theta i} \quad \mathbf{Q}_{f uj} \quad \mathbf{Q}_{f wj} \quad \mathbf{Q}_{f \theta j}] \quad (50)$$

유동좌표계로 표현된 힘 \mathbf{Q} 를 관성좌표계로 표현하려면 좌표변환 행렬 \mathbf{R} 을 곱함으로써 얻을 수 있다.

$$\mathbf{Q}_{f global} = \mathbf{R} \mathbf{Q}_{f local} \quad (51)$$

식 (19)의 운동방정식에서 코리올리(Corilois)와 회전자(gyroscopic)힘이 소개 되었고, 이 힘들을 각각 \mathbf{F}_1 과 \mathbf{F}_2 로 정의하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2; \quad (52)$$

$$\mathbf{F}_1 = -\dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}} \quad (53)$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}) \quad (54)$$

3.5 비선형 탄성효과

식 (19)의 운동방정식 $\gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t)$ 로 재정리하고, 식 (5c)에서 유연체가 변형한 후의 기하학적 구속방정식 $\Phi(\mathbf{q})$ 를 사용하여 해석할 동역학 시스템을 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{Q} - \mathbf{F} = 0 \quad (55)$$

$$\Phi(\mathbf{q}) = 0 \quad (56)$$

수치해석을 수행할 때 일반적으로 Newmark의 차분공식과 Newton-Raphson의 반복법을 사용한다고 가정하면 상기의 방정식을 라그랑지 상수 λ 를 이용하여 다음과 같이 비구속화시킬 수가 있다.¹²⁻¹³

$$\gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) - \Phi_q^T(\mathbf{q}, t) \lambda = 0 \quad (57)$$

운동방정식과 구속방정식에 대하여 테일러 1차 확장을 수행하여 선형방정식을 얻을 수 있으며, 증분량 $\Delta \mathbf{q}$ 와

$\Delta\lambda$ 를 변수로 하는 대수방정식을 얻을 수 있다.

$$-\gamma^* = \left(\frac{\partial M}{\partial q} \ddot{q} + K_T\right)\Delta q + B^T \Delta\lambda ; \quad (58)$$

$$K_T = \frac{M}{\beta h^2} + \frac{\partial K}{\partial q} + K - \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\gamma}{\beta h} - \left[\frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial q} \right]_i \lambda^* \quad (59)$$

여기서 행렬 B 는 다음과 같다.

$$-\Phi^* = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right]_i \Delta q = B \Delta q \quad (60)$$

이 때, 식 (59)에 표현된 접선강성행렬(tangent stiffness matrix) K_T 가 기하학적인 비선형 탄성효과를 포함하고 있음을 관찰할 수 있다.

4. 결론

본 논문은 대변위 운동시 병진 및 회전운동으로 인한 운동방정식에 유한요소 정식화를 수행하였다. 유연체에서 대변위의 동적 거동을 해석하고자 유한요소를 이용하여 다음과 같은 결과를 도출할 수 있었다.

- 1) 유연체로서 2차원 Timoshenko 보를 선택하여 C^0 요소를 사용하고 구속조건을 통합하는 운동방정식에 대하여 유한요소를 이용하여 정식화하는 과정에서 선형과 비선형 경우의 영향을 파악하였다.
- 2) 유한요소 방정식의 코리올리(Coriolis) 힘과 회전자(gyroscopic) 힘의 효과는 관성력과 감쇠력과는 달리 일반적인 외력으로 도출됨을 알 수 있었다.
- 3) 향후 비선형 문제를 다루고자 할 때, 기하학적 비선형에 대한 강성행렬 역할을 정식화 과정에서 확인하였다.
- 4) 해석의 정확성을 높이기 위해서는 강성행렬의 비선형 항을 더욱 추가하고 변형에 대한 고차원의 형상함수를 적용하여 그 영향을 관찰할 필요성이 있다.
- 5) 회전에 대한 적절한 유한회전 텐서와 모든 방향 변형에 대한 자유도를 고려함으로써 3차원

보에 대한 해석의 틀을 마련하였다.

후 기

저자는 2005~2006년 Georgia Institute of Technology에서 금오공과대학의 연구년 지원에 의하여 본 논문을 제출하게 됨을 감사드립니다.

참고문헌

1. Bathe, K. J., "Finite Element Procedures," Prentice-Hall Inc., pp.148~212 and pp.768~784, 1996.
2. Reddy, J. N., "Finite Element Method," 2nd ed., McGraw-Hill Inc., pp.143~166, 1993.
3. Meriam, J. L., Kraige, L. G., "Engineering Mechanics Dynamics," 4th ed., John Wiley & Sons Inc., p.395 and p.581, 1998.
4. Yoo, H. H., Ryan, R. R. and Scott, R. A., "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 181, No. 2, 1995, pp.261~278.
5. Geradin, M. and Cardona, A., "Flexible Multibody Dynamics," John Wiley & Sons Ltd., pp.44~65, and pp.67~88, 2000.
6. Kim, C. B. and Back, Y. G., "Dynamic Analysis of a Flexible Body in Multibody System Using DADS and MSC/NASTRAN," J. of the KSPE, Vol. 18, No. 2, pp.63-71, 2001.
7. Pal, P. F. and Palazotto, A. N., "Large Deformation analysis of flexible beams," International J. of Solids and Structures, Vol. 33, pp.1335~1353, 1996.
8. Liu, J. Y. and Hong, J. Z., "Geometric Stiffening of Flexible Link System with Large Overall Motion," J. of Computers & Structures, Vol. 81, pp.2829~2841, 2003.
9. Golo, G. V., Talasila, A. J. and Schaft V. D., "A Hamiltonian Formulation of the Timoshenko Beam Model," Proc. of Mechatronics 2002, University of Twente, The Netherlands, pp.24~

- 26, 2002.
10. Geradin, M. and Cardona, A., "Flexible Multibody Dynamics," John Wiley & Sons Ltd., pp.144~150, 2000.
 11. Baazant, Z. P., "Finite Strain Generalization of Small Strain Constitutive Relations for Any Finite Strain Tensor and Additive Volumetric-deviatoric split," International J. of Solids and Structures, Vol. 33, pp.2887~2897, 1996.
 12. Fung, R. F. and Chang, H. C., "Dynamics Modelling of a Non-linearly Constrained Flexible Manipulator with a Tip Mass by Hamilton's Principle," J. of Sound and Vibration, Vol. 216, pp.751~769, 1998.
 13. Kim, C., Kim, T. G., Shin, D. S. and Lee, S. B., "Numerical Methods for Engineers," Korean McGraw-Hill, pp.153~158, 2001.