

論文

무딘 물체 주위 고마하수 유동해석의 문제점과 해결책

원수희*, 정인석**, 신재렬***, 최정열****

Issues and Solutions for the Numerical Analysis of High Mach Number Flow over a Blunt-Body

Su-Hee Won*, In-Seuck Jeung**, Jae-Ryul Shin*** and Jeong-Yeol Choi****

ABSTRACT

Numerical analysis of high Mach number flow over a blunt-body poses many difficulties and various numerical schemes have been suggested to overcome the problems. However, the new schemes were used in the limited fields of applications because of the lack of field experience compared to more than 20 years old numerical schemes and the intricacies of modifying the existing code for the special application. In this study, some tips to overcome the numerical difficulties in solving the 3D high-Mach number flows by using Roe's scheme, the most widely used for the past 25 years and adopted in many commercial codes, were examined without a correction of the algorithm or a modification of the CFD code. The well-known carbuncle phenomena of Riemann solvers could be remedied even for an extremely high Mach number by applying the entropy fixing function and a unphysical solution could be overcome by applying a simply modified initial condition regardless of the entropy fixing and grid configuration.

초 록

무딘 물체 주위의 고마하수 유동의 수치해석은 여러 문제점을 지니고 있으며, 이러한 문제점을 해결하기 위한 다양한 해석 기법이 제시되어왔다. 그러나 20년 이상된 수치 기법과 비교할 때 현장 경험의 부족, 그리고 특별한 응용을 위하여 기존의 코드를 수정하는 번거로움 등으로 인해 새로운 기법들은 한정된 응용 분야에서만 이용되고 있다. 본 연구에서는 지난 25년간 가장 널리 이용되고 있고 여러 상용코드에도 적용된 Roe의 FDS 수치해법을 이용하여 알고리즘이나 전산유체해석 코드의 수정 없이 3차원 고마하수 유동 해석의 문제점을 극복하는 방안을 살펴보았다. 매우 큰 마하수에서도 엔트로피 수정을 통하여 Riemann 해법들의 문제점으로 잘 알려진 carbuncle 현상이 해결 가능성을 보였으며, 비물리적 해의 문제도 초기조건의 간단한 수정으로 엔트로피 수정이나 격자 형상에 관계없이 해결할 수 있었다.

Key Words : High Mach Number Flow(고마하수 유동), Blunt-Body(무딘물체), Roe's FDS (Roe의 FDS기법), Surface Discontinuity(벽면 불연속)

† 2006년 3월 9일 접수 ~ 2006년 5월 11일 심사완료

* 정회원, 서울대학교 대학원 항공우주공학과

** 정회원, 서울대학교 항공우주공학과

*** 정회원, 부산대학교 대학원 항공우주공학과

**** 정회원, 부산대학교 항공우주공학과

연락처, E-mail : aérochoi@pusan.ac.kr

부산시 금정구 장전동 산 30번지

1. 서 론

극초음속 유동은 매우 큰 마하수에서 복잡한 기체반응을 수반한 높은 엔탈피 유동으로서, 이를 해석하기 위해서는 물리적 현상의 모델링은 물론, 강한 충격파를 포착하기 위하여 높은 수준

의 정확도와 강건성, 그리고 효율성이 요구되는 수치기법의 선택 역시 중요하다. 풍상 차분법 기반의 TVD(Total Variation Diminishing) 해법이 개발된 이후, 극초음속 유동 해석은 지난 20년간 전산유체역학을 이용한 많은 발전이 이루어졌다.

수학적으로 초음속 유동은 비선형 쌍곡형 연립 미분 방정식인 Euler 또는 Navier-Stokes 방정식에 의하여 지배되며, 이를 풀기 위해 초기에는 Lax-Wendroff 해법에 기초한 인공점성 해법이나, MacCormack 기법이 이용되었다. 이후, Boris의 FCT(Flux Corrected Transport) 기법에서 인공점성을 가감하고 극값을 방지하는 제한자(limiter)의 개념이 도입되었으며, 단조성(monotonicity)을 유지하는 방법은 일차 정확도 차분만이 가능하다는 사실이 알려진 후, 특성치의 방향을 고려하는 일차 정확도의 풍상차분법(upwind scheme)에 대한 연구와, 불연속면 이외에서는 고차 정확도를 유지할 수 있는 고해상도(high resolution) 기법에 대한 연구로 진행되어 왔다[1].

초기의 풍상 차분법은 Steger-Warming[2]이나 van Leer[3]의 방법과 같은 FVS(Flux Vector Splitting)와 Roe[4]의 방법과 같은 FDS(Flux Difference Splitting)로 구분되었으며, 풍상 차분법이란 용어대신 일반적으로 플럭스 분할 기법(Flux Splitting schemes)이란 용어로 불린다. FVS 기법은 강건성과 효율성 면에서 장점을 가지며 강한 충격파나 팽창 현상 등의 초음속 유동을 해석하는데 중요한 positivity 조건을 만족시키지만[5], 과도한 수치점성 때문에 점성 유동의 계산 시 정확성이 떨어지는 문제점이 있어 많이 이용되지 않는다. Roe의 방법과 같은 FDS 기법은 국소 Riemann 문제의 결과를 이용하여 파의 진행을 제어면에서 모사함으로써 일반적으로 정확한 결과를 보여준다. Roe의 방법은 접촉면과 음속 천이점에서 플럭스가 영이 되는 성질로 전단층이나 충격파의 정확한 포착이 가능하며, 수학적 완결성으로 인하여 가장 널리 이용되고 있는 해석 방법으로 여겨진다. 그러나 엔트로피 조건을 만족시키지 못해 비물리적인 해를 보여준다는 점과, 매우 급격하게 팽창하는 영역과 같은 국소 선형화가 타당하지 않은 영역에서 강건성 및 carbuncle 현상 등의 문제점이 있다. 그러나 Roe 해법은 엔트로피 수정 등을 통하여 이상의 문제를 간단히 회피하는 방법이 알려져 있으며, 이를 바탕으로 현재까지 가장 널리 이용되는 해법으로 여겨진다.

지난 20여 년간 이러한 초기 풍상 차분 방법들의 문제점을 해결하기 위해 수많은 연구들이 진

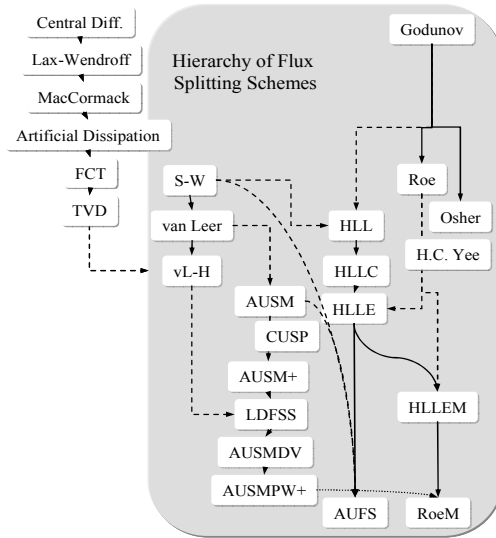


Fig. 1. Hierarchy of flux splitting schemes

행 되었으며, 새로운 대안으로 제시된 방법들이 AUSM 계열의 플럭스 분할기법이나, HLL 계열의 Riemann 해법이다. Fig. 1은 그동안 개발된 플럭스 분할 기법들의 영향관계를 분류한 그림이다. 지난시간 동안 많은 노력으로 현재는 플럭스 분할 기법이 가져야 할 수학적 성질과 검증 절차가 체계화 되었으며, 이러한 과정을 거쳐 최근에 개발된 Kim 등의 RoeM[6] 기법이나 Sun 등의 AUFS[7]은 매우 안정되고 우수한 성능을 보여주고 있다. 또한, 기존의 플럭스 분할 기법과는 별개로 기체 운동론에 기반한 BGK 해법[8], 또는 기존의 FEM이나 FVM과는 달리 시간과 공간을 동일한 수학적 체계에서 접근한 CE/SE 방법[9]이나, 격자계에서 Lagrangian 개념의 분자 운동을 통하여 유체의 운동을 모사하는 Lattice-Boltzmann 기법[10] 등 다양하고 새로운 해석 방법들이 개발되어 이용되고 있다. 이상의 새로운 수치 기법들은 충분한 검증을 거쳐 좋은 결과를 보이고 있으며 연구 집단을 이루어 영역을 넓혀가고 있으나, 해법의 다양성, 수학적 복잡성이나 기존 해석 코드를 변환하여야 하는 번거로움으로 인하여 연구 목적 이외에 일반적으로 널리 이용되고 있다고 보기는 어려운 상황이다.

한편, Roe의 해법은 새로운 해법의 개발과정에 기본적인 비교대상으로 이용되면서, 문제점이 지나치게 부각된 면이 있지만, 지난 20여 년의 오랜 시간 동안 많은 검증과정을 거치면서 비압축성 유동, 다상 유동 및 화학반응 유동 등, 다양한 문제에서 확장되어 적용되었으며 상당부분 충분한 결과를 보여주었다고 여겨진다. 아울러, TVD

기법을 대신하는 고해상도 해석 기법인 ENO/WENO[11,12] 기법이나 저마하수 예조건화 기법 [13] 등 새로운 해법들도 많은 경우 Roe의 해법에 기초하고 있으며, Fluent[14]나 Fastran[15] 등 여러 상용코드에도 적용이 되어 있고, Table 1의 조사 결과에서도 보듯이 가장 널리 이용되는 기본적인 압축성 유체 해석 방법으로 여겨진다.

Table 1. Citation frequencies of flux splitting schemes

논문 수	Roe	AUSM	HLL
JCP	57	13	6
Journal of Computational Physics 의 초록에서 'Roe AUSM or HLL' 을 Keyword 로 조사			
AIAA	100	22	2
미항공우주학회(AIAA) 발행 학술지 전체의 본문에 대하여 'Roe AUSM or HLL scheme' 을 Keyword 로 조사			
NDSL	839	45	109
국가과학기술전자도서관의 학술지 초록 데이터베이스에서 'Roe AUSM or HLL' 을 Keyword 로 조사			
Google	13,800	212	152
www.google.com에서 'Roe AUSM or HLL scheme' 을 Keyword 로 조사			

본 연구에서는 기존에 가장 널리 이용되고 있다고 여겨지는 TVD-MUSCL 기반의 Roe의 해법을 이용하는 경우, 전산 유체 해석에서 여러 가지 문제점이 존재하여 여전히 어려운 문제로 여겨지고 있는 무딘 물체 주위의 고마하수 유동을 계산 격자나 초기 조건 등 해석 기법 외적인 접근 방법으로 해결할 수 있는 가이드라인을 제시하고자 한다. 해석의 예로서는 행성 대기권 재돌입 물체가 가질 수 있는 충분히 큰 속도인 마하수 30의 유동이 반구형 무딘 물체 주위에 붙어오는 것을 가정하였으며, Roe의 FDS 수치해법에서 발생하는 정체점 부근의 carbuncle 현상 및 충격파가 물체 표면에 부착되는 비물리적인 현상 등 3차원 해석을 통해 나타나는 문제들의 해결 방안 연구의 주안점을 두었다.

II. 지배방정식과 수치해법

2.1 지배방정식

3차원 Navier-Stokes 방정식을 벡터 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial z} \quad (1)$$

유동과 플럭스 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e+p)u \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vw \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (e+p)w \end{bmatrix}, \mathbf{E}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \beta_x \end{bmatrix}, \mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \beta_y \end{bmatrix}, \mathbf{G}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ \beta_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

열량적 완전기체 상태방정식을 이용하였으며, 경계조건으로 유입류는 물리적 경계조건으로 주어지고, 유출류는 외압을 통한 수치적 경계조건으로 구해진다. 벽면 경계조건은 점착조건을 사용하였고 온도에 대한 경계조건으로 단열벽면 조건을 사용하였다.

2.2 수치해법

수치적인 해석을 위하여 지배방정식은 cell-vertex 기반의 유한체적법을 이용하여 이산화하였으며, 대류 플럭스는 minmod 제한자를 이용하는 TVD-MUSCL 기반의 Roe의 FDS 기법을 사용하여 차분하였다. 격자 경계에서 수치 플럭스는 다음과 같이 구해지며, 편의상 $\widetilde{\mathbf{F}}_{i+1/2,j}$ 만을 정리하였으며 나머지도 같은 방법으로 유도된다.

$$\widetilde{\mathbf{F}}_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{Q}_R) + \mathbf{F}(\mathbf{Q}_L) - |\mathbf{A}(\mathbf{Q}_R, \mathbf{Q}_L)| (\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L)] \quad (3)$$

여기서, R 은 격자면의 오른쪽 격자에서 외삽된 값을 의미하며, L 은 왼쪽 격자에서 외삽된 값을 의미한다. $\mathbf{A}(\mathbf{Q}_R, \mathbf{Q}_L)$ 은 선형화 행렬 \mathbf{A} 가 \mathbf{Q}_R 과 \mathbf{Q}_L 의 적절한 평균으로 구해짐을 의미한다. 한편, Roe의 해법은 구간 양단에서 jump condition만을 고려하였을 뿐 방향성을 고려하지 않아 고유값이 작은 경우 carbuncle 현상이나, 팽창 충격파 또는 수직 충격파가 일그러지는 등의 비물리적 해를 야기하는 경우가 있다. 이를 보정하기 위하여 고유치가 작은 경우 고유치를 수정하는 엔트로피 보정 함수로서 Montagne[16] 등이 제안한 형태를 사용하였으며, 아래식의 $\psi(\lambda)$ 는 엔트로피 보정 함수를 이용하여 수정된 고유치를 의미한다.

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} |\lambda| & |\lambda| \geq \epsilon \\ \frac{\lambda^2 + \epsilon^2}{2\epsilon} & |\lambda| \leq \epsilon \end{cases} \quad (4)$$

$$\epsilon = \tilde{\epsilon}(|U| + a) = \tilde{\epsilon}|\lambda|_{\max}$$

여기서, ϵ 는 작은 수로 인공 소산의 크기에 영향을 미쳐 수렴성과 충격파의 두께 등에 영향을 미칠 수 있는 것으로 알려져 있다. 그 외, 점성항의 차분에는 중심 차분법을 이용하였고, LU-SGS 기법을 이용하여 완전 내재적인 시간적분 기법을 수행하였다. 구체적인 해석 방법은 Choi[17] 등의 것과 동일하다.

III. 비물리적 해

3.1 비물리적 해의 발생

Roe의 FDS 기법을 이용한 초음속 유동해석에서 무딘 물체 정체점 부근에 발생하는 carbuncle 현상은 잘 알려져 있으며, 엔트로피 보정을 통해 해결할 수 있다고 알려져 있다. 한편, 정체점 부근에서 유동이 존재하지 않고 경사 충격파가 물체 표면에 부착되는 형태로 빠르게 수렴하는 비물리적 벽면 불연속(Surface Discontinuity, SD) 현상이 해법에 관계없이 자주 나타나는데, 이 문제는 엔트로피 보정 등을 통해서도 쉽게 해결되지 않은 경향을 보여준다. Fig. 2는 마하수 4 및 마하수 30의 유동에서 나타나는 carbuncle 및 비물리적 벽면 불연속 현상의 예이다.

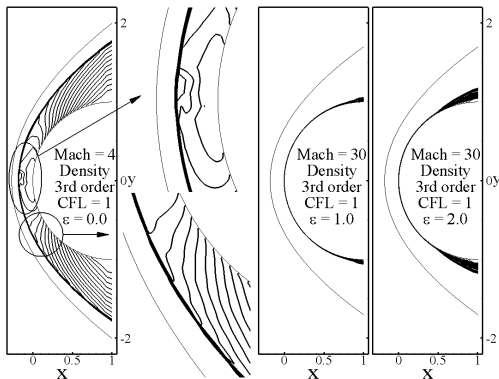


Fig. 2. Carbuncle and unphysical surface discontinuity of high Mach No. flow over a blunt-body

3.2 엔트로피 보정을 통한 문제해결

3.2.1 Carbuncle 현상의 제거

Carbuncle 문제점은 엔트로피 보정을 통한 강건성 증가로 해결할 수 있다. Fig. 3은 엔트로피 보정변수 ϵ 값을 변화시켜 carbuncle 현상을 제거하는 과정이다. $\epsilon=0$ 일 경우 정체점 부근에서 등밀도선의 심각한 일그러짐 현상을 볼 수 있다.

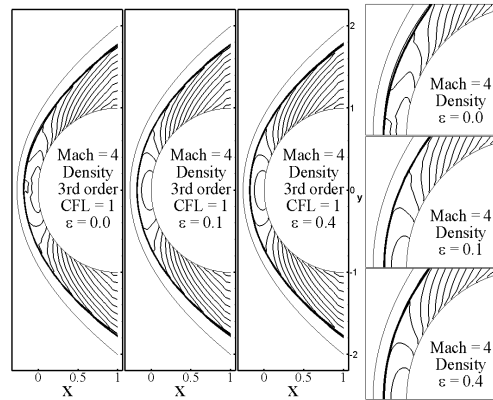


Fig. 3. Carbuncle according to entropy fixing parameter at Mach No.=4

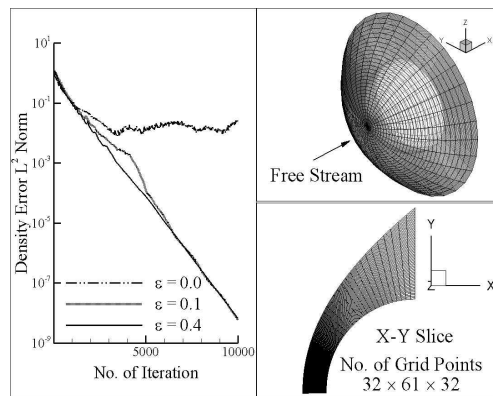


Fig. 4. Convergence history and 3D grid system of blunt-body at Mach No.=4

그러나 $\epsilon=0.1$ 의 경우 정체점에서 벗어난 충격파 주위에서만 등밀도선의 일그러짐 현상을 볼 수 있으며, $\epsilon=0.4$ 이상에서는 보이지 않고 있다. Fig. 4는 계산에 사용된 격자계와 수렴과정을 나타낸 그림이다. 무딘 물체에 대해 $32 \times 61 \times 32$ 의 3차원 격자계가 사용되었으며, ϵ 값이 증가함에 따라 수렴특성 또한 개선되고 있다. 따라서 무딘 물체의 정체점 부근에 발생하는 carbuncle 현상은 엔트로피 보정을 통해 쉽게 해결됨을 확인하였다.

3.2.2 비물리적 벽면 불연속 현상의 제거

고마하수의 초음속 유동해석에서 무딘 물체의 정체점 부근에 유동이 존재하지 않고 경사 충격파가 물체 표면에 부착되는 비물리적 벽면 불연속 현상이 발생하는 문제의 해결을 위해 일차적으로 앞서 이용한 엔트로피 보정을 통한 접근을 시도하였다. 보다 체계적인 접근을 위해 마하수 30의 유동에 대해 공간정확도에 따라 엔트로피

보정변수를 변화시켜가면서 계산을 수행하였다. 계산에서 이용된 CFL 값은 1이며, 고마하수로 인해 그 이상의 CFL 수의 사용은 어려웠다. 마하수 30의 고마하수 무딘 물체 주변 유동을 해석할 경우 엔트로피 보정변수가 감소할수록, 고차공간정확도로 갈수록 수렴하는 물리적인 해를 구하기가 쉽지 않았다. 구체적인 수치실험 내용은 Table 2에 정리하였다. 여기서, PS는 물리적으로 타당하다고 여겨지는 해, SD는 충격파가 물체 표면에 부착되는 비물리적 벽면 불연속, EAD는 과도한 점성소산, NaN는 계산이 수행되지 못하였음을 각각 의미한다.

Fig. 5는 Table 2에서 수행된 계산결과의 일부로서, 3차의 공간 정확도에서 엔트로피 보정변수

Table 2. Numerical experiments according to entropy fixing parameter and spatial accuracy at Mach No.=30 (CFL=1.0)

Mach No.=30	1 st order	2 nd order	3 rd order
$\epsilon=0.4$	SD	SD	SD
$\epsilon=0.6$	PS	SD	SD
$\epsilon=0.8$	PS	SD	SD
$\epsilon=1.0$	PS	SD	SD
$\epsilon=2.0$	EAD	PS	SD
$\epsilon=3.0$	EAD	PS	PS
$\epsilon=4.0$	EAD	EAD	PS
$\epsilon=5.0$	EAD	EAD	EAD
$\epsilon=6.0$	NaN	NaN	NaN

PS: Physical Solution, SD: Surface Discontinuity, EAD: Excessive Artificial Dissipation, NaN: Not a Number

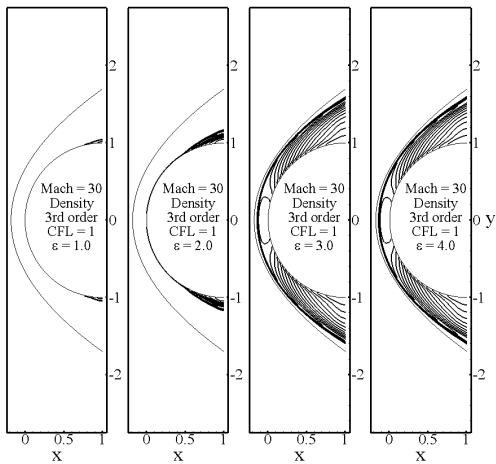


Fig. 5. Unphysical surface discontinuity and physical solution according to entropy fixing parameter at Mach No.=30

증가에 따른 결과를 나타내었다. 무딘 물체의 정체점 부근에서 경사 충격파가 물체 표면에 부착되는 비물리적 벽면 불연속 문제는 엔트로피 보정변수 ϵ 값이 3 이상에서 어느 정도 해결됨을 확인할 수 있었다. 그러나 과도한 엔트로피 보정변수 값은 해의 정확성에 악영향을 미치는 것으로 알려져 있다. 따라서 엔트로피 보정변수에 따른 해의 정확도를 평가하는 과정이 필요하며, 그 결과는 4.2절에 나타내었다.

3.3 비물리적 벽면 불연속의 발생기구

3.3.1 격자계 형상에 따른 효과

Fig. 6은 격자계 형상에 따른 계산결과이다. 충격파 이격거리를 고려해 x_0 을 고정한 상태에서, y_1 을 변화시켜 가면서 수치실험을 수행하였다(x_0 과 y_1 의 정의는 Fig. 12 참고). 해의 정확성을 위해 계산은 3차 공간정확도로 한정하였으며, 이로 인해 CFL 수는 1, 엔트로피 보정변수는 비교적 큰 값인 2.5가 사용되었다. 그림에서 보이는 바와 같이 y_1 을 증가시키기에 따라서 비물리적 벽면 불연속 현상이 나타나고 있다. 이러한 현상은 마하수가 커질수록, 2차원보다 3차원 유동해석에서 자주 발생하는 경향이 있다. 이 결과로부터 충격파 형상과 비교적 평행하게 진행하는 잘 작성된 격자계를 이용하는 경우, 보다 낮은 엔트로피 보정변수를 이용하여 비물리적 벽면 불연속 현상을 제거할 수 있었지만, 그 효과는 만족스럽지 못하다. 또한 충격파 형상에 따라 매번 격자계를 바꾸어 주는 것(특히, 3차원 계산에 있어서 AOA나 YAW 각이 존재하는 경우)은 번거로운 일이며,

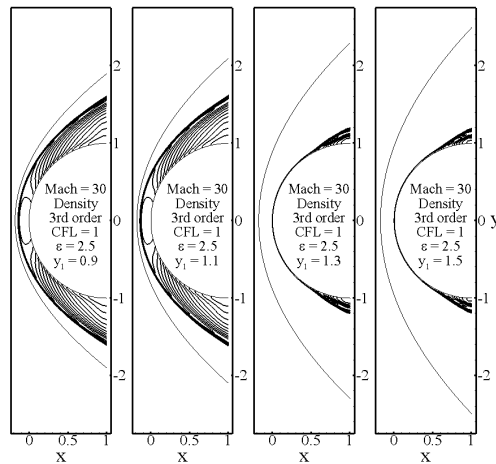


Fig. 6. Physical and unphysical surface discontinuity according to grid configuration

비물리적 벽면 불연속 현상을 제거하는 해결방법으로 한계가 있다.

3.3.2 Cell-Vertex v.s. Cell-Centered 기법

격자계 형상에 따른 영향을 살펴볼 때, 비물리적 벽면 불연속 현상은 벽면 경계 조건과 관련이 있음을 알 수 있다. Fig. 7은 Cell-Vertex(CV) 및 Cell-Centered(CC) 기법에서 벽면 경계조건과 플럭스를 나타낸 개략도이다. 본 연구에서 고려하는 CV 기법의 경우, 제어체적과 물리적 경계가 일치하지 않기 때문에, 물리적 경계에서는 벽면 조건을 만족하도록 경계조건을 주더라도, 제어체적의 경계에서는 벽면 수직 방향 플럭스가 0이 되지 않는다. 따라서 벽면을 통과하여 손실되는 질량 플럭스 등이 발생하게 되며, 이러한 문제는 궁극적으로 제어체적의 경계와 물리적 경계가 일치하는 방법, 즉 CC 기법을 이용하여야 해결될 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 8은 CV 방법과 CC 방법에 의한 해를 비교한 그림이다. 벽면 경계에서 일차외삽에 의한 경계조건을 비교한 결과, CV 방법에서는 비물리적 벽면 불연속 현상이 발생한 반면, CC 방법에서는 이러한 문제가 나타나지 않는다. 그러나 CC의 경우에도 벽면에서 고차 정확도의 경계조

건을 주는 경우 벽면 수직 방향 플럭스가 0이 되는 조건을 만족 시키지 못하여 비물리적 벽면 불연속 현상이 발생하는 것을 볼 수 있다. 따라서 이 문제의 해결은 제어체적이 물리적 경계와 일치하는 CC 기법과 벽면 수직 방향 플럭스가 0이 되는 경계조건 설정방법을 연구하여 해결할 수 있다고 생각된다. 그러나 CV 기법도 가상 격자를 이용하지 않고 물리적 경계에서 직접 경계조건을 설정할 수 있는 등의 장점으로 인하여 CC 방법 못지않게 널리 이용되고 있다. 아울러 CC 방법과 CV 기법의 선택은 오랜 시간 논의 되어 온 화두로서, 차분의 정확도와 경계조건의 처리에서 각각의 장단점이 있기 때문에, 본 논문에서 나타난 문제만으로 어느 한쪽이 우월하다고 말할 수는 없으며, 대상에 따른 선호도의 문제로 여겨진다[18-20]. 본 연구는 기존에 확립되어 이용되고 있는 전산유체 해석 코드의 활용성을 증대할 수 있는 수치기법 외적인 부분에 목적을 두고 있으므로, 수치 기법 외적인 방법으로 문제를 해결하는 방법을 찾고자 한다.

IV. 고품위 해의 획득

4.1 수정된 초기조건을 통한 비물리적 벽면 불연속 현상의 제거

비물리적 벽면 불연속 현상이 발생하는 또 다른 원인으로, 초음속 균일 유동 초기 조건으로부터 무한대의 가속도로 시간 전진하여 정상상태 초음속 유동으로 수렴 시키는 시간전진 기법을 들 수 있다. 그러나 물리적으로 타당한 초기조건을 설정하기는 쉽지 않으므로, 간단한 대안으로

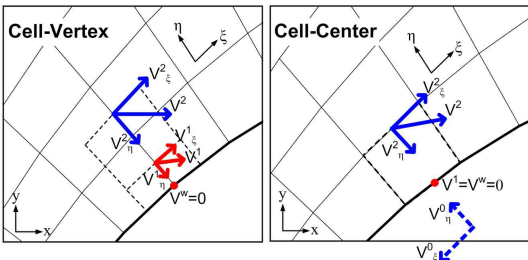


Fig. 7. Schematic comparison of numerical fluxes of CV and CC schemes with wall boundary conditions

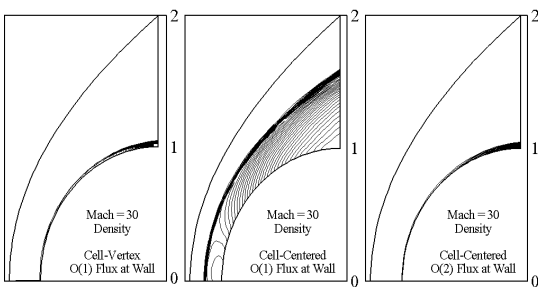


Fig. 8. Physical and unphysical solutions with CV and CC scheme

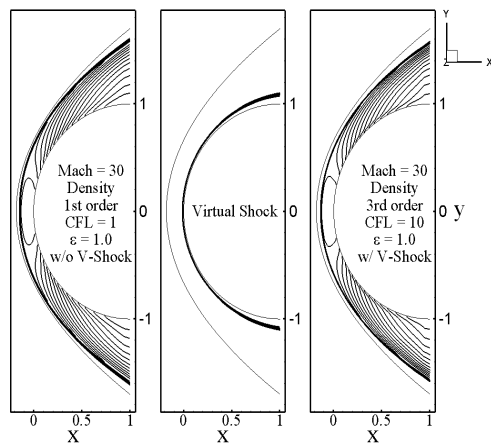


Fig. 9. Calculation results without Virtual Shock and with Virtual Shock

균일 유동의 조건으로부터 벽면 조건을 적용하여 얻은 결과를 물체 전방의 일부 영역에 적용하여 가상의 초기 충격파를 형성시켜 초기 조건으로 이용하는 방법을 제시한다. Fig. 9의 좌측 그림은 가상의 충격파를 이용하지 않은 경우로 해의 정확성을 위해 $\epsilon=1$ 로 한정하였으며, 이에 따라 공간정확도는 1차 이상으로 확장이 불가능 하였고, CFL 수 역시 1이상에서는 계산수행이 불가능 하였다. 반면 Fig. 9의 가운데 그림은 언급된 방법으로 초기 유동으로 가상의 충격파를 생성한 그림이며, 이를 이용하여 오른쪽 그림과 같이 3차의 공간정확도를 가진 해를 얻을 수 있었으며, CFL 수도 10 이상으로 증가시킬 수 있었다.

구체적인 수치실험 과정은 Table 3에 정리되어 있으며, 정확한 해를 구하기 위해서 3차 공간정확도에 대해서만 수치실험을 수행하였다. 초기의 가상 충격파 생성을 위해 엔트로피 보정변수에

따라 CFL 수는 0.02-0.1까지 주어졌으며 이에 따른 반복계산 횟수는 200-1,000회가 사용되었다. 가상 충격파 생성한 후 계산에서는 CFL=10에서 약 4,000-5,000회 정도의 반복계산을 통해 기계오차까지 수렴하는 결과를 보여주었다.

Fig. 10은 Table 3의 결과를 바탕으로 가상의 충격파를 이용하지 않은 계산과 이용한 계산 사이의 수렴 과정을 비교한 그림이다. 가상의 충격파를 이용하지 않는 경우, $\epsilon=1.0$ 이하에서 계산을 수행하기 위해서는 1차 이상 공간정확도로의 확장 및 1이상의 CFL 수의 사용이 불가능 하였다. 또한, $\epsilon=0.8$ 이하에서는 계산의 수행이 불가능 하였을 뿐만 아니라, 계산이 가능했던 $\epsilon=0.8$ 과 $\epsilon=1.0$ 에서도 10,000회의 반복계산을 통해 기계오차까지의 수렴을 보여주지 못하고 있다. 그러나 가상의 충격파를 이용하는 경우, 같은 엔트

Table 3. Numerical experiments with Virtual Shock

Mach No.=30	3 rd order: Initial Cond.	3 rd order: Restart Cond.
$\epsilon=0.4$	NaN	NaN
$\epsilon=0.6$	CFL=0.02 lter=1,000	CFL=10 lter \approx 5,000
$\epsilon=0.8$	CFL=0.05 lter=400	CFL=10 lter \approx 4,000
$\epsilon=1.0$	CFL=0.1 lter=200	CFL=10 lter \approx 4,000

NaN : Not a Number

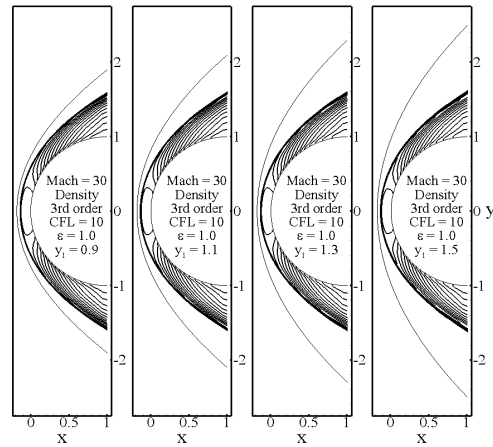


Fig. 11. Physical solutions with Virtual Shock

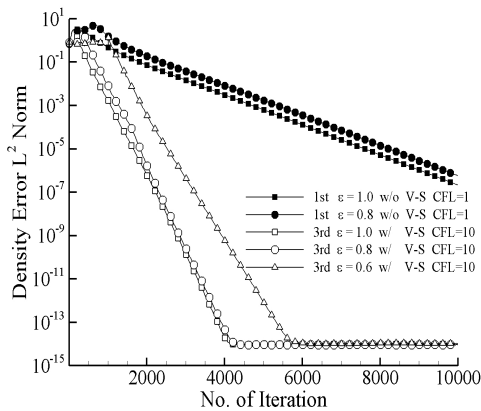


Fig. 10. Convergence history without Virtual Shock and with Virtual Shock

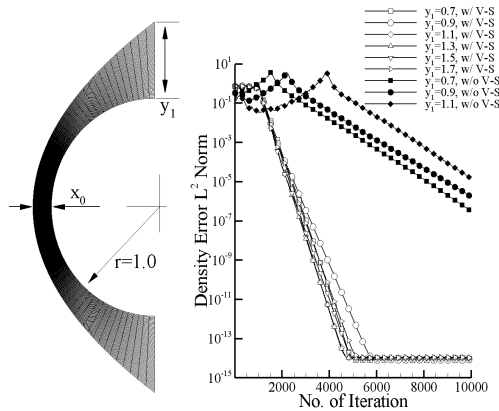


Fig. 12. x_0 - y_1 definition and convergence history according to grid configuration

로피 보정 조건에서 3차의 공간정확도 사용이 가능하며, 가상 충격파 생성에 필요한 반복계산을 포함해 약 4,000-6,000회 정도의 반복계산만으로 기계오차까지 수렴하는 것을 보여주고 있다.

Fig. 11은 앞서 수행된 격자계 형상에 따른 수치실험에 가상 충격파를 적용한 결과이다. Fig. 6은 가상의 충격파 없이 $\epsilon=2.5$, CFL=1의 조건에서 계산된 반면, Fig. 11은 가상 충격파를 이용한 결과로서 $\epsilon=1.0$, CFL=10의 더욱 엄격한 조건을 사용하였음에도 불구하고 모든 격자계에서 수렴된 물리적인 해를 보여준다. Fig. 12는 Fig. 6과 11에서 수행된 수치실험에 대해 x_0 과 y_1 의 정의 및 수렴과정을 나타내었다. 가상의 충격파를 사용하지 않을 경우, 격자계가 충격파 형상에서 멀어질수록 수렴특성이 저하되는 반면에 가상의 충격파를 사용하는 경우, 격자계에 크게 관계없이 거의 동일한 수렴과정을 보여주고 있다. 또한 기계오차까지 수렴하기 위한 반복계산 회수에 있어서도 가상의 충격파를 적용하기 전에 비해 크게 향상되었음을 확인할 수 있었다.

이와 같이 가상의 충격파를 이용할 경우, 작은 엔트로피 보정을 통해 고차의 공간정확도로 확장이 가능하기 때문에 계산의 정확성이 확보될 수 있었으며, 보다 큰 CFL 수의 이용이 가능하기 때문에 계산의 효율성 면에서 이점이 있었다. 또한 격자 형상에 관계없이 계산이 가능한 강건성을 얻을 수 있었다.

4.2 엔트로피 보정의 영향

앞서 3.2.2 절에서 언급한 바와 같이 과도한 엔트로피 보정은 해의 정확성에 악영향을 미치는 것으로 알려져 있다. 여기서는 해의 정확도를 평가하기 위해 공간정확도 및 엔트로피 보정에 따라 정체점 유선을 따른 밀도값의 변화로 엔트로피 보정의 영향을 살펴보았다.

Fig. 13은 Table 2의 1차 공간정확도 결과를 바탕으로 엔트로피 보정에 따른 불연속면의 퍼짐 현상과 밀도값의 과소측정을 나타내었다. 밀도값은 자유류로부터 정체점에 이르는 유선을 따라 측정되었다. 엔트로피 보정변수의 증가로 인한 과도한 점성소산은 불연속면의 퍼짐현상과 함께 충격파 이후 밀도값의 과소측정을 초래한다. $\epsilon=1$ 이하에서는 비교적 정확한 충격파 포착과 밀도값의 측정을 보여주고 있으나 그 이상에서는 해의 정확성이 크게 저하되는 것을 볼 수 있다. 즉, 1차 공간정확도에서는 비교적 넓은 엔트로피 보정 변수 범위에서 계산의 수행이 가능하지만 과도한 엔트로피 보정변수 값은 해의 정확성에 악영향을

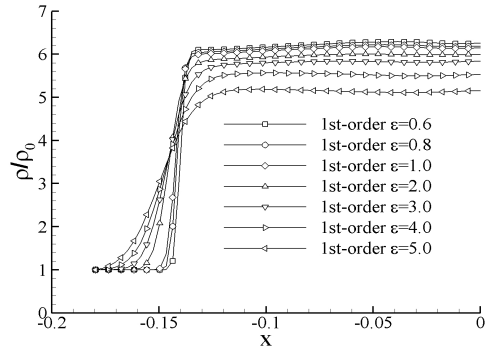


Fig. 13. Density along stagnation-line with 1st-order spatial accuracy at Mach No.=30

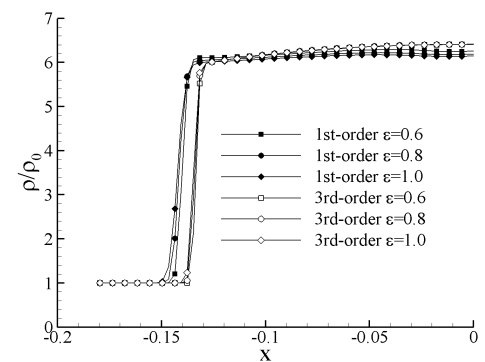


Fig. 14. Density along stagnation-line with 1st and 3rd-order spatial accuracy at Mach No.=30

미쳐 전 엔탈피의 감소 및 이로 인한 물성치의 과소측정을 초래하게 된다. Fig. 14는 공간정확도에 따른 영향을 살펴보기 위해 같은 엔트로피 보정변수조건 하에서 공간정확도만을 변화시켜 가면서 비교해 보았다. 엔트로피 보정변수는 앞서 Fig. 13에서 확인한 바와 같이 비교적 해의 정확성이 확보되고 있는 $\epsilon=1$ 이하로 한정하였으며, 이로 인해 3차 공간정확도 계산은 가상 충격파를 이용하였다. 엔트로피 보정변수가 $\epsilon=1$ 이하로 한정되었기 때문에 공간정확도에 관계없이 불연속면의 퍼짐 현상 및 충격파 이후 밀도값의 크기는 상대적으로 큰 영향을 받지 않으나 충격파 위치의 이동은 명확히 확인할 수 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이 해의 정확도를 위해서는 가능한 낮은 엔트로피 보정변수와 높은 공간정확도가 필요하며, 이를 위해서는 가상의 충격파를 이용하는 것이 간단하고 효과적임을 확인할 수 있었다.

4.3 비대칭 3차원 유동의 해석

가상 충격파의 장점을 확인하기 위하여 우선 단순한 비대칭 3차원 유동에 적용하여 보았다. AOA와 YAW 각이 없는 3차원 대칭유동을 기준으로 AOA와 YAW 각을 각각 5°씩 증가시켜 가면서 비대칭 3차원 유동에 대한 계산을 수행하여 그 결과를 비교하였다. AOA나 YAW 각이 존재하는 경우에도 충격파 형상에 따라 격자계를 변경시키지 않고 모든 경우에서 좋은 결과를 얻을 수 있었다. Fig. 15는 무딘 물체 표면에서의 압력 분포로서, AOA와 YAW 각에 의해 정체점의 위치가 물체 중심에서 우측 하단의 대각선 방향으로 이동되었음을 확인할 수 있다. Fig. 16은 대칭 축을 지나는 x-y 단면에서의 압력분포이며, AOA와 YAW 각의 값이 증가함에 따라 중심에서의 최대압력의 감소를 통해 정체점의 이동을 확인할 수 있다. 또한 AOA와 YAW 각의 크기에 관계없

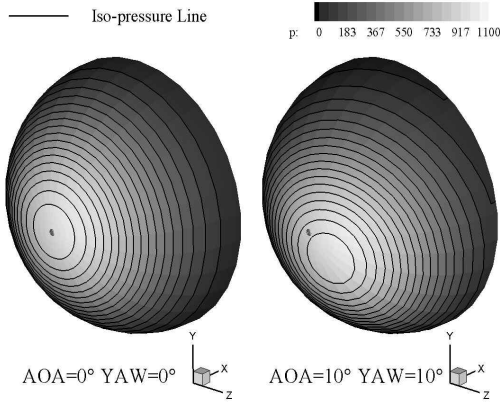


Fig. 15. Surface pressure of blunt-body at Mach No.=30

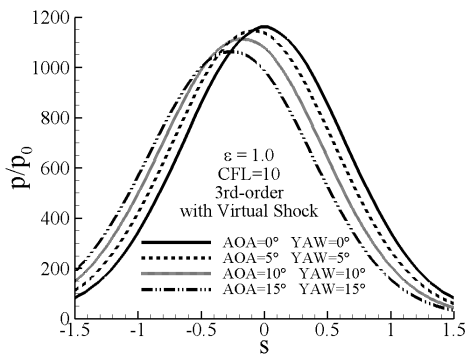


Fig. 16. Center-line pressure of blunt-body at Mach No.=30

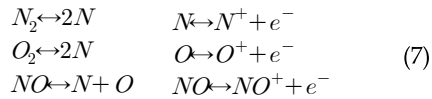
이 거의 동일한 수렴과정을 보여주었으며, 기계 오차까지 수렴하는데 약 5,000회의 반복계산이 필요하였다.

4.4 화학반응 유동에의 적용

가상의 충격파 초기조건을 극초음속 화학평형 유동과 같은 극한적인 예에 적용하여 그 효용성을 확인하였다. 극초음속 화학평형 유동으로는 고도 20km 지점에서 마하수 20으로 대기에 진입하는 지구 재돌입체 주변의 유동장을 선택하였다 [21,22]. 고고도에서 고속으로 대기에 진입하는 지구 재돌입체의 경우, 진입 속도, 진입 각도, 진입물체 형상 등에 따라 다르지만 일반적으로 고속으로 인한 수천도 이상의 공력가열 현상이 발생하는 것으로 알려져 있다. 이러한 유동장을 해석하기 위해서는 고온 공기의 해리 및 이온화를 포함하는 화학반응이 고려되어야 하며, 본 연구에서는 계산의 편의성과 경제성을 고려하여 화학평형 해석을 수행하였다. 대기의 성분은 $3.76N_2$ 와 O_2 로 가정하였으며, 고온에서 N_2 , N , N^+ , O_2 , O , O^+ , NO , NO^+ , e^- 등 9개의 성분을 고려하였다. 공기에 대한 총괄 화학반응식 및 총괄 화학반응식의 미지수를 구하기 위한 조건식을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$3.76N_2 + O_2 \rightarrow n(x_1N_2 + x_2N + x_3N^+ + x_4O_2 + x_5O + x_6O^+ + x_7NO + x_8NO^+ + x_9e^-) \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{NS} k_k = 1, \quad \begin{matrix} R_{O/N} = 1/3.76 \\ R_{e^-/O^+} = 1 \end{matrix} \quad (6)$$



$$\prod_{k=1}^{NS} x_k^{(\nu''_{r,k} - \nu'_{r,k})} = K_p^r(T) \cdot p^{-\Delta \sum_{k=1}^{NS} (\nu''_{r,k} - \nu'_{r,k})} \quad (8)$$

$r = 1 \dots 6$

여기에서 전체 몰수 n 은 질량보존으로부터 결정되며, 9개의 미지수를 구하기 위한 조건은 각 원소의 성분 보존의 원리로부터 몰분율 정의식과 몰분율에 대한 일차함수의 비인 2개의 성분비 식 등 3개의 선형대수 방정식이 (6)와 같이 얻어지며, 부족한 방정식은 (7)과 같이 6개 성분에 대한 평형반응식으로부터 구할 수 있다. 식 (8)에서 $\nu'_{r,k}$, $\nu''_{r,k}$ 는 각 반응에서 전방 및 후방반응 성분계수이며, 각 반응의 평형상수 K_p^r 는 온도만의 함수로서 몰분율에 대한 6개의 비선형 연립방정식을 형성한다. 이를 통해 닫힌 형태의 대수적

연립방정식을 이루며, Newton 반복해법을 이용하여 해를 구한다. 계산의 초기 조건으로 대기의 구성, 온도, 압력은 아래 Table 4와 같다.

Table 4. Simulation condition

Altitude = 20 km, Mach No.= 20			
p [MPa]	T [K]	N_2	O_2
5.529×10^{-3}	216.7	0.78992	0.21008

고도 20 km 지점에서 마하수 20으로 대기에 진입하는 지구 재돌입체 주변 유동장에 대한 이상기체 유동 및 화학평형 유동 결과를 Fig. 17에 나타내었다. 예상했던 바와 같이 화학평형 유동의 충격파 이격거리의 약 53%에 해당하고 있으며, 온도분포 또한 큰 차이를 보이고 있다. 이상기체 유동의 경우 운동에너지가 정체점 부근에서 모두 열에너지로 변환되어 온도가 18,000 K 근방까지 상승하나 화학반응 유동의 경우 공기의 해리 및 이온화에 에너지를 사용하게 되므로 정체점 부근의 온도가 이상기체 결과에 비해 10,000 K 이상 낮아진다. 또한 이러한 공력가열의 결과로 인해 초기 N_2 와 O_2 로만 구성된 공기의 성분은 N_2 , N , O_2 , O , NO , e^- 등과 같은 다수의 화학종으로 구성되어진다. 정체점 부근에서의 구체적인 공기 성분비를 포함한 이전의 연구결과와의 비교를 아래의 Table 5에 나타내었다.

Table 5. Comparison of equilibrium results (Altitude = 20 km, Mach No.= 20)

p [MPa]	2.9347		2.9492	
T [K]	7589.6		7283	
Species	CEA-II	Present	CEA-II	Palmer
O	0.28881	0.28881	0.29574	0.2951
O_2	0.00072	0.00072	0.00108	0.00109
N	0.23981	0.23982	0.17985	0.1967
N_2	0.45147	0.45147	0.50052	0.4851
NO	0.01812	0.01812	0.02200	0.02133
e^-	0.00053	0.00053	0.00040	0.00039

정체점 부근의 주요 공기 성분비에서 이전 연구결과와 대체적인 일치를 보이고 있으나, 구체적인 물분율에서는 약간의 차이를 보이고 있다. 이는 계산에 사용된 열역학적 물성치 차이에 기인하는 것으로 생각된다. 1987년 계산된 Palmer

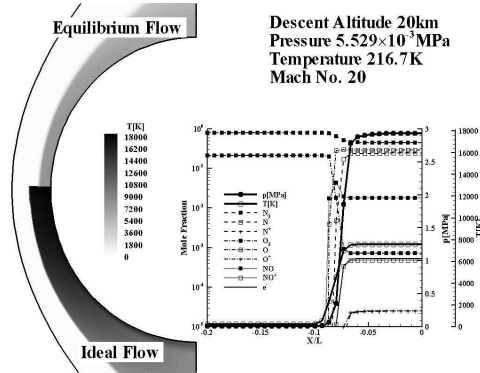


Fig. 17. Temperature distribution and species mole composition in equilibrium and ideal flow

의 결과는 1971년부터 1984년까지 사용된 CEC (Chemical Equilibrium Code)에 근거하였으며, 반면 본 연구에서 사용하고 있는 CEA(Chemical Equilibrium and Applications)[23]는 1994년부터 현재까지 사용되고 있는 프로그램으로 지속적인 열역학적 물성치의 수정/보완이 이루어지고 있기 때문에 구체적인 열역학적 물성치의 차이가 존재한다. 본 연구에서는 2002년 버전의 CEA-II를 사용하였다. 이상의 결과는 가상의 충격파 초기조건을 극초음속 화학평형 유동에 적용한 예로서 간단히 변화된 초기조건을 이용하여 보다 강한 고차 정확도 해법의 적용이 가능하였다.

V. 결 론

본 연구는 기존에 널리 이용되고 있는 Roe의 FDS 기반 수치해법에서 여러 문제점들이 발생하는 것으로 알려진 고마하수 무단 물체 주위유동의 3차원 해석에서, 수치적 문제점을 수치기법 외적인 처방을 통하여 간단히 해결할 수 있는 방법과 극한적 해석 예를 제시하였다. 잘 알려진 carbuncle 현상은 높은 마하수에서도 엔트로피 보정을 통하여 쉽게 해결할 수 있음을 확인 하였다. 정체점 부근에서 충격파가 물체 표면에 부착되는 형태로 수렴하는 비물리적 벽면 불연속 현상의 경우는 격자 형상 및 CV 또는 CC 기법 등에 영향을 받지만, 간단히 수정된 초기 조건을 이용하여 낮은 엔트로피 보정조건 하에서 격자 형상에 관계없이 고차 정확도 해법을 적용할 수 있었다. 또한 이 과정에서 강건성이 향상되어 충분히 큰 CFL 수를 이용하여 효과적인 계산을 수행할 수 있었다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소 고에너지물질 특화 연구센터의 HM-22과제와 과학기술부의 국가지정연구실 사업 M10500000072-05J000007210의 지원으로 수행되었으며, 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- 1) Hirsch, C., *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vol. 1/2, Wiley, New York, 1990.
- 2) Steger, J. L., and Warming, R. F., "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite-Difference Method", *Journal of Computational Physics*, Vol. 40, 1981, pp. 263-293.
- 3) Van Leer, B., "Flux-vector Splitting for the Euler Equation", *Lecture Notes in physics*, Vol. 170, 1982, pp. 507-512.
- 4) Roe, P. L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes", *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, 1981, pp. 357-372.
- 5) Gressier, J., Villedieu, P. and Moshetta, J.-M., "Positivity of Flux Vector Splitting Schemes", *Journal of Computational Physics*, Vol. 155, 1999, pp.199-220.
- 6) Kim, S., Kim, C, Rho, O.-H. and Hong, S.-K., "Cures for the Shock Instability: Development of a Shock-Stable Roe Scheme", *Journal Computational Physics*, Vol. 185, 2003, pp. 342-374.
- 7) Sun, M. and Takayama, K., "An Artificially Upstream Flux Vector Splitting Scheme for the Euler Equations", *Journal Computational Physics*, Vol. 189, 2003, pp. 305-329.
- 8) Xu, K., Martinelli, L. and Jameson, A., "Gas-Kinetic Finite Volume Methods, Flux-Vector Splitting and Artificial Diffusion", *Journal Computational Physics*, Vol. 110, 1995, pp. 48-65.
- 9) Chang, S.-C., "The Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element-A New Approach for Solving the Navier-Stokes and Euler Equations", *Journal Computational Physics*, Vol. 119, 1995, pp. 295-324.
- 10) Frisch, U., Hasslacher, B., Pomeau, Y., "Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation", *Physics Review Letters*, Vol. 56, 1986, pp. 1505 - 1508.
- 11) Harten, A., Engquist, B., Osher, B., Chakravarthy, S. R., "Uniformly High-Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes, III", *Journal Computational Physics*, Vol. 131, 1997, pp. 3-47.
- 12) Jiang, G. S., Shu, C. W., "Efficient implementation of weighted ENO schemes", *Journal Computational Physics*, Vol. 126, 1996, pp. 202 - 228.
- 13) Choi, Y.-H., Merkle, C. L., "The Application of Preconditioning in Viscous Flows", *Journal of Computational Physics*, Vol 105, 1993, pp. 207~223.
- 14) <http://www.fluent.com>
- 15) <http://www.cfdrc.com>
- 16) Montagne, J. L., Yee, H. C., Klopfer, G. H. and Vinokur, M., "Hypersonic Blunt Body Computation Including Real Gas Effects", NASA TM 10074, Mar. 1998.
- 17) Choi, J.-Y., Jeung, I.-S. and Yoon, Y., "Computational Fluid Dynamics Algorithms for Unsteady Shock-Induced Combustion, Part 1: Validation", *AIAA J.*, Vol 38, No. 7, 2000, pp. 1179-1187.
- 18) Wesseling, P., *Principles of Computational Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, 2000.
- 19) Blazek, J., *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*, Elsevier, 2001.
- 20) Chung, T, J., *Computational Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2002.
- 21) Palmer, G., "An Implicit Flux-Split Algorithm to Calculate Hypersonic Flowfields in Chemical Equilibrium", AIAA paper 87-1580, 1987.
- 22) Palmer, G., "An Improved Flux-Split Algorithm Applied to Hypersonic Flows in Chemical Equilibrium", AIAA paper 88-2693, 1988.
- 23) <http://www.grc.nasa.gov/WWW/CEAWeb/>