韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2006. 2. 제 45권, 제 1호, 61-74.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2006, Vol. 45, No. 1, 61-74.

실수 연산의 기본 성질에 대한 고등학교 2학년 학생들의 이해와 적용 능력 분석

진 진 욱 (성서고등학교)
신 현 용 (한국교원대학교)

I. 서 론

대수는 고등수학은 물론 다른 학문을 학습하기 위한 출발점(Edwards, 2000)으로서 수학학습에서 수학적 사고와 문제해결력을 신장시키기 위한 중요한 영역 중 하나이다. 또한 대수는 수와 연산, 문자와 식, 그리고 방정식 등으로 학교 수학의 많은 부분을 차지한다. 사실, 학교수학에서 대수를 통하여 실생활에 관련된 문제를 해결하고 실제 현상을 모델링하고 추상적인 기호로 표현하면서 대수를 강조하고 있다.

수학에서 기본이 되는 수와 수 체계를 이해하고 성질을 파악하며, 수 체계를 조작하는 능력은 대수를 이해하기 위한 기초이다. 실수에서부터 복소수와 행렬에 걸쳐 수 체계와 연산에 초점을 두는 것은 학생들의 수학적 이해를 깊게 하는 데 도움이 된다는 점을 고려해 볼 때, 수 체계에 대한 빈약한 이해는 학교수학에서 대수를 학습하는 과정에서 학생들이 겪게 되는 어려움의 원인이 된다. 따라서 수학과교육과정에서 수와 연산 등 대수 영역을 중시해야 한다. 특히 중·고등학교의 모든 수준에서 수학을 학습하는데 수와 연산은 기초임은 물론이고 학교 안팎에서 학생들이 수에 익숙하거나 계산에 능숙한 경우 유익한 상황을 자주 접하게 되기 때문에 수와 연산 영역은 초등학교에서 뿐 만 아니라 중·고등학교에서도 지속적으로 관심을 가져야 할 영역이다.

대부분의 고등학교 교사들은 학생들이 수 개념과 수 체계를 정확하게 이해하고 있고 기초 연산에 매우 능숙할 것이라 생각한다. 그러나 실수의 집합까지 배운 중학교 3학년 학생들을 대상으로 학생들의 수 개념이 어느 정도 확립되어 있는가를 조사한 나귀수(2001)의 연구에 따르면, 대부분의 학생들에게 있어서 수 개념은 의미있게 형성되어 있지 않고 학생들은 다양한 수를 정확하게 분류하지 못하며, 수 개념의 정의를 언어적 수준에서 설명하지 못한다.

대수적 기본 개념을 올바로 이해하는 것은 산술에서 대수로의 이행을 위한 기초가 되며 수학적 아이디어를 이해하고 고등수학을 의미 있게 학습하기 위한 밑거름이 되는 것이라 주장한 Ericksen(1988)에 따르면, 효과적인 대수 학습을 위해서는 수 체계와 그 구조에 대한 기본개념을 강조하여 지도해야 한다. 따라서 고등학교 학생들이 보다 포괄적인 관점으로 수 체계를 볼 수 있도록 수와 연산 영역은 고등학교 과정에서도 계속 강조되어야 한다. 또 고등학교 학생들은 수 체계의 개념, 서로 다른 수 체계가 어떻게 관련이 되는지, 그리고 한 체계의 성질이 다른 체계에서도 유지되는지에 대하여 보다 깊이 이해해야 한다(NCTM, 2000). 수에 대한 확실한 이해를 통해 고등학교 학생들은 의미 있는 기호 조작을 하며, 수 집합 사이의 관계를 나타내고 수에 대한 성질을 찾기 위해 변수를 사용할 수 있게 되기 때문이다. 확장된 수 체계를 다룸으로써 연산에 대한 학생들의 직관은 숙련되어지고, 산술적으로 벡터와 행렬이 어떻게 결합되는지를 학습함으로써 학생들은 새로운 성질과 패턴이 나타나는 다른 종류의 체계를 경험하게 된다. 따라서 학생들은 새로운 수 체계의 연산에 대한 이해를 확장시킬 필요성을 자연스럽게 인식하게 되고, 이러한 과정에서 학생들은 수 체계의 확장에 내재된 대수적 구조를 파악할 수 있을 것이다.

---

* 2006년 1월 투고, 2006년 2월 심사완료
* ZDM분류 : H44
* MSC2000 classification : 97B50, 97D70
* 주제어 : 대수, 연산, 항등원, 역원

그러나 초등학교 이래로 사칙연산의 계산방법을 익히는데 주력해 온 학생들은 중학교에서 배운 실수의 개념을 바탕으로 실수 집합의 연산에 대한 기본 성질을 학습하는 <10-가 단계>의 '실수의 연산에 대한 성질' 단원을 실수의 사칙연산에 대한 당연한 성질을 새삼스럽게 정리하는 것으로 이해하고, 또 실수 연산의 기본 성질에서 새롭게 정의된 항등원, 역원과 같은 생소한 용어는 막연히 외어야 되는 것으로 받아들인다(홍진곤, 2000). 학생들은 새로운 개념과 법칙으로 실수 집합을 재구성한 '실수의 연산에 대한 성질' 단원을 왜 배워야 하는지를 알지 못한다. 특히 정의만 하지 않았을 뿐이지 초등학교 단계부터 계속 다루어 왔던 개념들이 닫혀있다, 항등원, 역원 등의 수학적 용어로 정의되는 과정이 추상적이고 형식적이어서, 학생들은 정의에 내재된 의미와 그들 사이에 상정되어 있는 관계를 파악하지 못한다. 그러나 실수 집합의 연산에 대한 기본 성질은 이후 다항식, 복소수, 행렬 등의 단원에서 계속 그 집합의 연산 체계와의 유사성과 차이점 등으로 나타나기 때문에 학생들은 수학 내용간의 연결성을 파악할 수 있는, 보다 효과적인 학습을 위하여 실수 연산의 기본 성질을 정확하게 이해하고 있어야 한다.

한편, 대수적 지식은 요즈음과 같은 정보화 사회에서 특히 유용하다. 정보보호를 위한 암호학(cryptology)이나 효율적 정보통신을 위한 부호이론(coding theory)에서 정수론, 선형대수학, 그리고 현대대수학은 결정적인 역할을 하기 때문이다(박승안, 2000; 신현용, 2006). 따라서 고등학생에게 대수는 수학적인 측면 외에 실용적인 측면에서도 그 중요성과 의의를 갖는다.

Ⅱ. 문헌연구

최근 학교수학에서 강조되는 대수는 수학의 '대수화' 즉, 대수적인 방법으로 수학을 연구하는 것이라는 현대수학의 특징을 반영한 것이라 할 수 있다. MacLane과 Birkhoff(1967)는 "대수는 수의 합과 곱, 거듭제곱을 조작하는 기술에서부터 시작한다. 이러한 조작 규칙은 모든 수에 대해 성립하고, 다양한 종류의 수를 대표하는 문제에서도 역시 유효하게 적용한다. 그리고 그 규칙은 반드시 수가 아니라 하더라도, 어떤 대상이든 적용이 가능하다. 따라서 대수 체계는 덧셈과 곱셈 같은 연산이 어떤 기본 규칙을 만족시킬 때, 조작 가능한 원소들의 집합이다." 라고 정의한다(Usiskin, 1988, p.7, 재인용). 이와 달리 최근의 대수교육 연구에서 제시된 대수의 정의는 대체로 방정식의 풀이를 중심으로 문제해결을 강조하는 정의, 기호의 사용에 초점을 맞추는 정의, 패턴과 관계를 강조하는 정의의 세 가지로 구분될 수 있다.

문자를 도입하고, 그 문자를 사용하여 대수식을 조작하고 방정식의 근을 찾는 활동은 학교 대수에서 중요한 위치를 차지하기 때문에 문자와 방정식에 관한 연구는 계속해서 많이 이루어지고 있다(류익승·신현용·한인기, 2006). 또 문자 기호의 사용은 실세계에 수학을 응용하는데 핵심적인 역할을 하기 때문에 대수적 이해의 핵심적인 요소의 하나로 문자를 다룬다(김남희, 1997). 그러나 많은 학생들은 중학교 대수에서 문자와 관련하여 기호적 표현과 의미 사이의 관계를 정확하게 파악하지 못하고, 구체적인 대상을 통해 이루어졌던 것들이 추상적인 대상을 통해 다시 고려되는 이유를 알지 못하기 때문에 고등학교에서 배우는 대수를 어려워한다. 특히 수 체계 사이의 관계에 대한 이해가 수업에서 관심의 대상이 되었던 산술에서의 경험을 토대로 대수를 시작하기 때문에 수의 개념과 수 체계에 대한 이해가 부족한 학생들에게 수치적 답이 아닌 대상들간의 관계를 통한 이해를 본격적으로 요구하는 대수는 어려운 것이다(김성준, 2004). 즉 수 체계에 대한 빈약한 이해는 학교수학에서 대수를 학습하는 과정에서 학생들이 겪게 되는 어려움의 원인이 된다.

따라서 학교수학의 기초가 되는 수와 연산을 학습함에 있어 유치원부터 12학년에 이르기까지 학생들은 '수가 무엇인지, 수가 대상 또는 식으로 어떻게 나타나는지, 수직선 위에서 어떻게 나타나는지, 수가 다른 어떤 것과 어떻게 관련되는지, 수들이 구조와 성질들을 갖는 체계에 어떻게 표현되는지, 문제를 해결하기 위해 수와 연산을 사용하는 방법' 등의 수에 대한 이해를 풍부히 해야 한다(NCTM, 2000). 즉 학년이 올라갈수록, 특히 고등학교에서는 수보다 다른 교육과정 영역이 강조된다고 해도, 학생들은 보다 포괄적인 관점으로 수 체계를 볼 수 있어야 하며, 실수를 사용하고 이차방정식의 해로서 복소수를 해석할 수 있도록 복소수에 관하여 충분히 학습

해야 한다. 또 학생들은 수 체계의 개념, 서로 다른 수 체계가 어떻게 관련이 되는지, 한 체계의 성질이 다른 체계에서도 유지되는지를 보다 충분히 이해할 수 있어야 한다. 이를 통해 향상된 학생들의 능력은 대수기호를 사용하기 위해 그들이 발견한 수의 성질에 관한 일반화를 할 수 있게 하기 때문이다. 이처럼 중·고등학교에서 수와 연산의 중요성은 분명하므로 학생들은 정수와 유리수에 대한 지식을 활용하여 점차로 실수 및 복소수와 같은 다른 수 체계를 이해해야 한다. 게다가 집합 표기나 행렬과 같이 수를 표현하는 새로운 방법을 배워서 수를 다루고 조작하는데 보다 융통성을 계발할 수 있어야 한다.

이에 실수 연산과 그 성질에 관하여 우리나라 7차 수학과 교육과정을 구체적으로 살펴보자. <7-가 단계>에서는 정수와 유리수의 필요성을 인식하게 하여 학생들은 수를 확장하는 과정을 이해하고 유리수를 정수인 것과 아닌 것으로 분류해 본다. 유리수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈은 정수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈과 같은 방법으로 함을 알게 됨으로써, 일관되게 유지되는 대수적 구조를 직관적으로 파악할 수 있다. <8-가 단계>에서는 유리수를 소수로 표현함으로써 학생들은 유리수 개념의 이해를 깊이 하고 실수로의 확장 가능성을 탐색하게 된다. <9-가 단계>에서 학생들은 무리수의 존재를 알고 이를 바탕으로 실수를 이해한다.

고등학교 1학년 과정인 <10-가 단계>에서 학생들은 실수의 연산에 관한 성질을 이해한다. 즉 학생들은 실수가 연산에 대하여 닫혀 있음을 알고 실수의 연산에서 학생들은 자연수, 정수, 유리수, 실수의 집합에서의 사칙연산을 차례로 다루어 봄으로써 연산이 지니고 있는 성질을 알아보고, 실수의 집합에서 뺄셈과 나눗셈은 각각 덧셈과 곱셈으로 바꾸어 생각할 수 있다. 그리고 학생들은 덧셈과 곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립함을 직관적으로 이해하고 실수에 관한 모든 계산은 그 연산법칙에 근거를 두고 있음을 인지한다. 또 실수의 연산에 대하여, 학생들은 항등원, 역원의 뜻을 이해하고 수의 집합에 따라 주어진 연산에 대하여 항등원과 역원이 존재할 수 있음을 알고, 연산에 따라 항등원과 역원이 서로 다르다는 점을 이해한다. '실수의 연산에 대한 성질' 단원에서 위와 같은 과정을 통해, 학생들에게 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해시켜서 수학의 체계를 명확하게 파악하고 논리적으로 사고하는 태도와 능력을 기르고, 수학의 용어와 기호 사용에 대한 뜻을 깊이 이해시켜서 학생들이 수학적인 사실을 간결하고 명확하게 표현할 수 있는 능력을 기를 수 있도록 함이 이 단원의 궁극적 목표이기 때문이다. 이처럼 수 체계의 확장을 통해 실수를 학습한 상태에서 실수 체계와 그 연산에 관한 성질을 일반화, 형식화하려면 이미 학습한 내용과의 관련성이 잘 유지되도록 내용을 조직해야 한다. 여기서 중요한 것은 학생들에게 당연한 사실을 새삼스럽게 정리하는 정도가 아니라 실수 체계와 그 연산에 관한 성질의 의미와 내재된 관계를 파악할 수 있도록 해야 한다는 것이다.

김홍기(2003)에 따르면, 우리나라의 경우는 초등학교 수학에서는 많은 양과 시간이 수의 지도에 할애되어 있지만, 수학적인 원리나 법칙에 대한 지도는 거의 없고 단순히 계산 방법과 기능만을 강조하여 지도함으로써 많은 문제점이 나타난다. 수를 확장해 가는 과정에서 일관성을 잃고 있으며, 연산법칙에 대한 지도도 초·중등을 통하여 잘 연계되어 있지 않다. 이에 홍진곤(2000)은 중학교에서 배운 실수 개념을 바탕으로 실수 연산의 기본 성질에 대해 학습하는 과정은 수 체계를 이해하기 위한 가장 중요한 단원으로, 실수 연산의 기본 성질 단원의 교육과정의 의도를 '대수적 구조를 학생들이 어느 정도 느낄 수 있게 가르치는 것이고 이는 군, 환, 체 등의 개념을 알고 있는 수학 교사라면 누구나 그 의도를 이해할 만한 것이다'라고 보았다. 학생들은 실수의 집합 이외도 다항식의 집합, 함수의 집합, 행렬의 집합 등에서 유사한 현상을 발견하지 못한 상태에서 실수 연산의 기본 성질이 제시된다면 극도로 빈약한 맥락을 갖는 뼈대뿐인 인지 구조가 될 위험이 존재할 수 있다고 경고하면서, '실수 연산에 대한 성질' 단원이 보통의 중학생이면 충분히 익숙해 있을 사칙연산에 대한 당연한 성질을 새삼스럽게 정리하는 정도로 이해되거나, 새롭게 정의된 항등원, 역원과 같은 생소한 용어는 막연히 외어야 하는 것으로 받아들여진다면, 이는 구조를 가르치려는 현재의 시도에 대한 근본적인 반성을 요구하는 문제로 제기되어야만 한다고 주장하였다. 그리고 형식적인 대수 구조를 고등학교 학생에게 가르치려는 상황에서 군 개념이 전형적인 구조이며, 자기 동형사상들의 체계로 군 개념에 접근하

는 것이 구조를 학습하는데 도움이 될 것이라고 하였다. 그러나 군의 개념은 체의 개념보다 더욱 일반적인 개념이고, 이러한 그의 주장은 실제로 어떻게 고등학교 학습 현장에서 활용할 수 있는지를 제시하지 않고 있다.

이에 대한 보다 구체적인 연구로 실수 연산의 성질에 대한 고등학교 1학년 학생들의 인지경향을 조사한 박임숙(2001)의 연구는 '기호화하여 나타낸 법칙 이름쓰기, 그에 대한 가역적 사고 살피기, 개념 설명하기, 연산 성질 증명하기'에 관한 문항을 통해 학생들이 개념이 기호로 형식화한 경우 그 의미를 정확히 알지 못하고, 개념을 이해하고 있으나 수학적 용어로 표현하는 것을 어려워하며 연산 성질을 증명해야 하는 이유를 생각하지 않음을 보였다. 이 연구는 수와 연산이 자연수, 정수의 사칙계산을 거쳐 실수의 연산으로 형식화되는 과정에서 많은 단절을 갖게 된다고 보고 이에 대한 보다 구체적인 연구의 필요성을 제기하였다.

Ⅲ. 연구 문제 및 연구 방법

수학에서 기본이 되는 수와 수 체계를 이해하고 수 체계의 성질을 파악하며, 수 체계를 조작하는 능력은 대수를 이해하기 위한 기초이므로 대수 학습에 관한 논의는 수 체계를 그 출발점으로 해야 한다. 중학교에서 취급되는 수는 실수이고, 그 실수의 구조에서 파생적으로 생기는 성질을 규명하는 것이 중학교 과정에서 대수의 가장 중요한 부분이라고 생각할 수 있으므로, 실수 체계의 구조를 규명하는 것은 대단히 중요한 일이라 생각된다. 그리고 복소수로 확장된 수 체계를 다루는 고등학교에도 실수가 가진 대수적 구조가 그대로 유지되는 것을 파악할 수 있기 때문에, 실수 체계의 구조를 규명하는 것은 고등수학을 하기 위한 기초로서 강조될 필요가 있다.

고등학교 1학년 과정인 <10-가 단계>에서 학생들은 실수의 연산에 관한 성질을 이해해야 한다. '실수의 연산에 대한 성질' 단원을 통해, 학생들은 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 수학의 체계를 명확하게 파악하고 논리적으로 사고하는 태도와 능력을 기르고, 수학의 용어와 기호 사용에 대한 뜻을 깊이 이해해야 한다. 그러나 학생들은 중학교에서 배운 실수의 개념을 바탕으로 실수 집합의 연산에 대한 기본 성질을 학습하는 <10-가 단계>의 '실수의 연산에 대한 성질' 단원을 실수의 사칙연산에 대한 당연한 성질을 새삼스럽게 정리하는 것으로 이해하고, 또 실수 연산의 기본 성질에서 새롭게 정의된 항등원, 역원과 같은 생소한 용어는 막연히 외어야 되는 것으로 받아들이는 등 '실수 연산에 대한 성질' 단원을 왜 배워야 하는지를 알지 못한다. 특히 새롭게 정의된 닫혀있다, 항등원, 역원 등의 수학적 용어에 내재된 의미와 그들 사이에 상정되어 있는 관계를 파악하지 못한다.

본 연구는 실수 연산의 기본 성질에 대한 학생들의 이해 상태를 조사한다. 또 '수와 연산'에 관한 학습에서 학생들이 실수 연산의 기본 성질에 대한 지식을 어떻게 적용하는지를 살펴보고, 그 과정에서 학생들이 겪는 어려움과 그 원인을 조사한다. 본 연구 문제를 해결하기 위하여 대도시에 소재하고 있는 인문계 남녀 공학인 고등학교 2학년 2개 학급 남녀학생 241명을 선정하여 연구 목적에 맞도록 연구자가 작성한 <이해 상태 검사지>와 <적용 능력 검사지>를 정규 수업시간에 수학교사의 도움을 받아 50분간 실시하였다. 또 필요한 경우 사후 면담을 실시하였다.

Ⅳ. 연구 결과 분석

먼저, 실수 연산의 기본 성질에 대한 학생들의 이해 상태를 조사할 <이해 상태 검사지>는 '닫혀 있다의 뜻을 알고 있는가, 항등원과 역원의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있는가, 실수 연산의 연산법칙을 이해하고 있는가, 실수의 집합에서 연산에 대한 기본 성질을 알고 있는가'에 관한 문항으로 작성되었다. 지필 검사와 면담 조사에서 얻은 자료를 바탕으로, 실수 연산의 기본 성질에 대한 고등학교 2학년 학생들의 이해 정도와 상태를 전체적으로 분석한 결과는 다음과 같다.

1) 대부분의 교과서에서 닫힘성을 조사할 때 다루는 대표적인 예가 자연수, 정수, 유리수, 실수 집합이므로 학생들은 이들 수 집합에서 사칙연산에 대한 닫힘성은 정확하게 알고 있었다. 그러나 그러나 <표 1>에서 알 수 있듯이, 무리수 집합에서 사칙연산에 대한 닫힘성의 여부를 조사하는 것은 상대적으로 잘 다루지 않기 때문

에 학생들은 무리수 집합에서 사칙연산에 대한 닫힘성은 쉽게 판별하지 못하였다. 또 ‘실수의 집합은 유리수와 무리수로 이루어지고, 유리수와 실수 집합은 사칙연산에 대하여 닫혀 있다’라는 사실에서 학생들은 무리수 집합도 사칙연산에 대하여 닫혀 있을 것이라는 잘못된 추론을 하는 경우가 많았다. 한편 닫혀 있지 않음을 증명하기 위하여 학생들이 제시한 반례를 통해 학생들이 수 개념과 수 체계를 확실하게 정립하지 못하고 있다는 것을 알 수 있었다.

<표 I> 문항 1과 문항 2-(3)의 지필 검사 응답 결과

문항 1	정답	오답	무응답	합계
학생수	180	56	5	241
백분율(%)	74.7	23.2	2.1	100

문항 2-(3)	정답	오답	무응답	합계
학생수	88	128	25	241
백분율(%)	36.5	53.1	10.4	100

2) 정수와 실수 집합에서 ‘덧셈에 대한 항등원은 0, 곱셈에 대한 항등원은 1’이라는 것은 알고 있었지만, 자연수 집합에서 덧셈에 대한 항등원은 올바르게 구하지 못하였다. 즉 두 실수 0과 1의 성질을 이용하여 정의한 항등원의 뜻에서 학생들은 항등원이 그 집합의 원소이어야 함을 파악하지 못하였을 뿐 만 아니라, 닫혀 있다의 의미에 대한 이해의 부족 때문에 이를 닫혀 있음과 관련지어 이해하지 못하였다. 특히 실수 집합에서 덧셈과 곱셈에 대한 항등원을 정확하게 구한 학생들 중 ‘실수 집합에서 덧셈과 곱셈에 대한 항등원이 항상 존재한다’라는 명제가 갖는 의미를 완전하게 이해하지 못한 학생들도 많았다. 항등원의 정의를 정확하게 이해하지 못하였기 때문이라고 할 수 있다.

3) 학생들은 실수 집합 $\mathbb{R}$에서 ‘$a\in\mathbb{R}$ 의 덧셈에 대한 역원은 $-a$, $a(\neq 0)\in\mathbb{R}$ 의 곱셈에 대한 역원은 $\frac{1}{a}$’임을 알고 있었다. 그러나 <표 II>에서 알 수 있듯이, 정수 집합 $\mathbf{Z}$에서 $a(\neq 0)\in\mathbf{Z}$ 의 곱셈에 대한 역원, 자연수 집합 $\mathbf{N}$에서 $a\in\mathbf{N}$ 의 덧셈과 곱셈에 대한 역원은 구하지 못하였다. 이는 역원의 정의를 정확하게 이해하지 못하고, 역원의 정의에 의해 역원이 그 집합의 원소이어야 한다는 것을 알지 못했기 때문이다. 또, 학생들은 역원을 이용하여 뺄셈과 나눗셈을 각각 덧셈과 곱셈으로 계산할 수 있었지만, 학생들이 역원의 정의를 정확하게 이해하고 있는 것은 아니었다. 학생들은 역원에 대하여 ‘덧셈에 대한 역원은 주어진 수에 $-$ 기호를 붙이고, 곱셈에 대한 역원은 주어진 수의 역수를 취하면 된다’라고 막연히 외우고 있는 경향을 보였다. 특히 실수 집합에서 주어진 수의 덧셈과 곱셈에 대한 역원을 정확하게 구한 학생들 중 ‘모든 실수에 대하여 덧셈에 대한 역원이 항상 존재한다’와 ‘0을 제외한 모든 실수에 대하여 곱셈에 대한 역원이 항상 존재한다’라는 명제가 갖는 의미를 완전하게 이해하지 못한 학생들도 많았다. 이 학생들은 구체적인 문제 상황에서 ‘0을 제외한 모든 실수에 대하여 곱셈에 대한 역원이 항상 존재한다’라는 명제를 이용하지 못하였다.

<표 II> 문항 4과 문항 7의 지필 검사 응답 결과

4-(1)	정답		오답	무응답	합계
	(+) 항등원	(*) 항등원			
학생수	203	203	10	28	241
백분율(%)	84.2	84.2	4.1	11.6	100
4-(2)	정답		오답	무응답	합계
	(+) 항등원	(*) 항등원			
학생수	201	201	9	31	241
백분율(%)	83.4	83.4	3.7	12.9	100
4-(3)	정답		오답	무응답	합계
	(+) 항등원	(*) 항등원			
학생수	64	202	5	34	241
백분율(%)	26.6	83.9	2.1	14.1	100

7-(1)	정답		오답	무응답	합계
	(+)의 역원	(*)의 역원			
학생수	180	180	12	49	241
백분율(%)	74.7	74.7	5.0	20.3	100
7-(2)	정답		오답	무응답	합계
	(+)의 역원	(*)의 역원			
학생수	176	62	8	57	241
백분율(%)	73.0	25.7	3.3	23.7	100
7-(3)	정답		오답	무응답	합계
	(+)의 역원	(*)의 역원			
학생수	79	79	109	53	241
백분율(%)	32.8	32.8	45.2	22.0	100

4) 학생들은 중학교에서 배운 유리수 집합의 덧셈과 곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 실수의 연산에서도 성립한다는 것을 정확하게 인지하고 있었다. 그러나 <표 Ⅲ>에서 알 수 있듯이, 자연수 집합의 연산에서부터 다루어 왔던 연산법칙의 기호화된 추상적인 표현만 외우고 있을 뿐 그 의미를 제대로 이해하지 못한 학생들이 많았다. 특히 '실수의 집합은 덧셈과 곱셈에서 교환법칙과 결합법칙이 성립함으로 순서를 적당히 바꾸어 더하거나 곱하여도 그 결과는 같다'와 같이, 학습과정에서 교환법칙과 결합법칙을 구별없이 동시에 적용하기 때문에 결합법칙과 교환법칙을 혼동하는 경우가 많았다. 또 분배법칙은 서로 다른 두 연산에 대한 연산법칙임을 알지 못하고 결합법칙과 분배법칙을 혼동하는 경우도 많았다.

<표 Ⅲ> 문항 3-(2)과 3-(3)의 지필 검사 응답 결과

	정답 (분배)	오 답			무응답	합계
		결합	교환	기타		
학생수	220	12	3	6	0	241
백분율(%)	91.3	5.0	1.2	2.5	0.0	100

	정답 (결합)	오답			무응답	합계
		교환	분배	기타		
학생수	216	15	7	2	1	241
백분율(%)	89.6	6.2	2.9	0.8	0.4	100

5) 간단한 실수의 성질을 증명하는 과정을 추론하는 문항에 대한 학생들의 정답률은 높았다. 그러나 올바르게 답한 학생들의 검사지를 살펴보면, 학생들은 실수 연산의 기본 성질을 이용한 것이 아니라 증명과정에 나타난 식의 단순한 조작을 통해 답을 찾았다. 학생들은 실수의 성질을 증명하는 과정에서 실수 연산의 연산법칙, 항등원, 역원의 성질이 어떻게 이용되는지를 알지 못하였다.

실수 연산의 기본 성질에 대한 이해 정도에 따른 학생들의 '수와 연산'에 관한 학습에서의 적용 능력을 조사할 <적용 능력 검사지>는 '실수 연산의 기본 성질에 대한 이해에 기초하여 임의의 집합에서 주어진 연산에 대하여 닫혀 있다의 의미를 알고 있는가, 실수 연산의 기본 성질에 대한 이해에 기초하여 임의의 집합에서 주어진 연산에 대한 항등원과 역원을 구할 수 있는가, 실수 연산의 기본 성질에 대한 이해에 기초하여 임의의 집합에서 주어진 연산에 대한 연산법칙과 연산의 기본 성질을 알고 있는가, 확장된 수 체계(복소수)와 새로운 수 체계(행렬)에 실수 연산의 기본 성질에 대한 내용을 적용할 수 있는가'에 관한 문항으로 작성되었다. 지필 검사와 면담 조사에서 얻은 자료를 바탕으로, '수와 연산'에 관한 학습에서 고등학교 2학년 학생들이 실수 연산의 기본 성질에 대한 지식을 어떻게 적용하는지를 전체적으로 분석한 결과는 다음과 같다.

1) <표 Ⅳ>에서 알 수 있듯이, 학생들은 임의의 수 집합에서 사칙연산에 대하여 닫혀 있는지를 조사하는 것을 어려워하였다. 특히 닫혀 있음을 보이기 위해서는 집합에 속하는 특정한 원소가 아닌 일반적인 임의의 두 원소를 택하여 연산의 결과가 그 집합의 원소인지를 알아보아야 한다는 사실을 알지 못하였다. 게다가 닫혀 있는지를 조사하기 위하여 택한 임의의 두 원소가 서로 같을 수 있다는 것도 알지 못하였다.

<표 Ⅳ> 문항 1의 지필 검사 응답 결과

	정답	오 답			무응답	합계
		(+)닫힘	(*)닫힘	닫혀있지 않다		
학생수	98	34	14	29	66	241
백분율(%)	40.7	14.1	5.8	12.0	27.4	100

학생들은 '주어진 수의 집합이 연산에 대하여 닫혀 있다면 연산한 결과가 그 집합의 원소이면 된다'라는 정의에서 닫혀 있다는 것이 연산의 성립 여부를 결정하는 기본 조건이라는 것을 파악하지 못하였다. 즉 학생들은 어떤 집합이 주어진 연산에 대하여 닫혀 있는지를 알아보는 것이 왜 중요한지를 이해하지 못하였다. 이것은 학생들이 '항등원과 역원이 그 집합의 원소이어야 한다'라는 것의 의미와 닫혀 있다의 정의 사이에 상정되어 있는 관계를 이해하는 것을 어렵게 만들었다. 한편 자연수, 정수, 유리수, 실수 집합의 닫힘성을 판별하는 문제만 풀어본 학생들은 연산을 자유롭게 하기 위하여 수 체계를 확

장한다는 것을 알지 못하였고 방정식의 해를 이용하여 수를 확장하는 과정을 닫혀 있다의 의미와 관련지어 이해하지 못하였다.

2) <표 V>에서 알 수 있듯이, 학생들은 항등원의 정의를 정확하게 이해하지 못하고 항등원의 정의에 내재된 성질들을 파악하지 못하였다. 즉 학생들은 항등원의 가환적 성질, 유일성, 그리고 항등원과 항등식 사이에 상정되어 있는 관련성을 인지하지 못하였을 뿐 만 아니라 집합과 연산에 따라 항등원이 다를 수 있다는 것도 알지 못하였다. 그 결과 학생들은 수 집합이 아닌 다른 집합에서, 또는 일반 연산에서 항등원을 구할 수 없었다.

<표 V> 문항 7의 지필 검사 응답 결과

	정답	오답	무응답	합계
학생수	68	78	90	241
백분율(%)	28.2	32.3	39.4	100

3) 역원의 정의에서 학생들은 역원과 항등원의 관계를 이해하고 역원을 구하기 위하여 항등원이 존재해야 한다는 것은 알고 있었다. 그러나 항등원이 존재한다고 해서 역원이 항상 존재하는 것이 아니라는 사실과 집합과 연산에 따라 역원이 다를 수 있다는 것을 알지 못하였다. 많은 학생들이 실수 집합에서 곱셈이나 덧셈에 대한 역원에 의해, 역원은 항상 주어진 수의 역수이거나 부호를 바꾼 수라는 오개념을 가지고 있었고, 이는 수 집합이 아닌 다른 집합에서, 또는 일반 연산에서 역원의 정의를 제대로 표현하지 못하는 원인이 되었다.

4) <표 VI>에서 알 수 있듯이, 학생들은 주어진 연산에 대한 계산 과정을 직접 전개하면서 그 과정에서 자신이 사용한 연산법칙이 무엇인지를 인지하지 못하였다. 즉 학생들은 연산법칙에 근거하여 실수의 덧셈과 곱셈에 대한 계산 뿐 만 아니라 일반 연산에 대한 계산까지 능숙하게 하지만, 계산 과정에서 이용되는 연산법칙의 의미에 대한 직관적인 이해는 부족한 상태였다. 특히 실수 집합에서 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙에 대한 학생들의 빈약한 이해는 일반 연산의 계산과정에서 오류를 발생시켰다.

[표 VI] 문항 5의 지필 검사 응답 결과

	정 답	오 답	무응답	합 계
학생수	110	115	16	241
백분율(%)	45.6	47.7	6.6	100.0

5) <표 VII>에서 알 수 있듯이, 실수 연산의 기본 성질을 이용한 증명과정에서 학생들은 그 성질을 이용하여 증명과정을 논리적으로 추론하는 것을 어려워하였다. 특히 학생들은 지금까지 당연하게 생각한 실수 집합을 새로운 개념과 법칙으로 재구성한 '실수의 연산에 대한 성질' 단원을 왜 배우는지 모르고 개념과 법칙을 외우고 있는 경향을 나타냈다. 증명과정에서 적용된 실수 연산의 기본 성질들 사이에 내재된 관련성을 파악하지 못하였기 때문이다. 한편, 방정식의 해를 구하는 과정에서 방정식 풀이를 지배하는 원리가 실수 연산의 기본 성질과 같은 원리라는 것을 알지 못하였고 이항, 소거의 의미와 항등원, 역원의 관계를 이해하지 못하였다. 또 실수 연산의 기본 성질에서 학습한 내용을 일반 연산이나 수 이외의 다른 집합에 적용하지 못하였다.

<표 VII> 문항 10의 지필 검사 응답 결과

	역원	역원		결합법칙	역원		항등원	
		역원	(*)역원		역원	(*)역원	항등원	(*)항등원
학생수	180	32	13	122	22	14	31	12
백분율	74.7	13.3	5.4	50.6	9.1	5.8	12.9	5.0

6) <표 VIII>에서 알 수 있듯이, 학생들은 실수의 계산규칙에 따라 복소수의 사칙연산을 바르게 할 수 있었고 복소수의 집합에서도 실수 집합처럼 연산에 대한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립하고 항등원과 역원이 존재함을 알게 됨으로써, 학생들은 실수의 집합과 비슷한 대수적 구조가 있음을 직관적으로 이해하고 있었다. 그리고 학생들은 같은 꼴의 행렬 집합은 덧셈에 대하여 닫혀 있고 실수의 덧셈에서처럼 행렬의 덧셈에서도 교환법칙과 결합법칙이 성립하며, 행렬에서도 덧셈에 대한 항등원과 역원이 존재한다는 것을 알고 있었다. 즉 같은 꼴의 행렬 집합도 실수의 집합과 같은 대수적 구조를 가진다는 것을 인지하고 있었다. 이에 기초하여 학생들은 복소수의 집합과 같은 꼴의 행렬 집합은 실수의 집합과

같은 대수적 구조를 가지므로 복소수 집합의 덧셈과 곱셈, 그리고 같은 꼴의 행렬 집합의 덧셈에 대하여 이항이 가능하고 연산법칙을 사용하여 식을 간단히 하는 등 실수 연산의 기본 성질들을 모두 이용할 수 있음을 인지하고 있었다.

<표 Ⅷ> 문항 11의 지필 검사 응답 결과

	역원	결합	역원	항등원	역원	결합	역원
학생수	27(16)	136	21(10)	26(13)	40(19)	122	52(35)
백분율(%)	17.8	56.4	12.8	16.2	24.5	50.6	36.1

※ 괄호 안의 수는 '덧셈에 대한 항등원' 등으로 정확하게 응답한 학생수이다.

V. 결 론

실수 연산의 기본 성질에 대한 고등학교 2학년 학생들의 이해 정도와 적용 능력은 다음과 같다.

첫째, 여러 가지 구체적인 예를 통해 학생들은 집합 S가 어떤 연산에 대하여 닫혀 있다는 것의 의미를 학습하지만 이러한 학습만으로 학생들은 닫혀 있다의 뜻을 분명하게 이해하지 못하였다. 또 집합 S가 어떤 연산에 대하여 닫혀 있는지를 판별하는 학습만으로는 학생들에게 집합 S가 어떤 연산에 대하여 닫혀 있다는 것이 왜 중요한지를 설명할 수 없었다.

일반적으로 뺄셈에 대하여 닫혀 있지 않는 자연수 집합 안에서는 뺄셈에 관한 문제를 해결할 수 없다. 이러한 상황은 수 체계를 확장시키는 동기를 유발시킨다. 연산을 자유롭게 하기 위하여 수 체계를 확장하는 과정을 "닫혀 있다" 의 의미에서 학생들이 인지할 수 있도록 강조하여 지도할 필요가 있다.

둘째, 두 실수 0 과 1 의 성질을 이용하여 덧셈과 곱셈에 대한 항등원의 뜻을 학습한 학생들은 실수 집합에서 덧셈과 곱셈에 대한 항등원은 각각 0 과 1 로 막연하게 외우는 경향을 보였다. 또 '덧셈에 대한 역원은 주어진 수에 $-$ 기호를 붙이고, 0 이 아닌 수의 곱셈에 대한 역원은 그 수의 역수를 취하면 구할 수 있다'라고 외우고 있을 뿐, 역원의 정의를 정확하게 이해하지 못하고 있었다. 이런 인지경향으로 인해 학생들은 역원을 구하기 위해서는 연산에 대한 항등원이 존재해야 하는 것은 알고 있었지만, 집합에 상관없이 덧셈과 곱셈에 대한 항등원은 각각 0 과 1 로 고정된 것으로 외우고 있어서 학생들은 역원을 제대로 구할 수 없었다. 또 역원은 그 집합의 원소이어야 하며, 연산에 따라 주어진 수의 역원이 서로 다르다는 것을 알지 못하였다. 따라서 학생들에게 항등원과 역원의 일반적 정의에 대한 대수적 구조를 공리적 방법으로 지나치게 강조하여 지도할 필요는 없지만, 항등원과 역원의 정의에 내재된 의미를 학생들이 이해할 수 있도록 하려면 구체적인 예를 통해 항등원과 역원의 개념을 도입하면서, 자연스럽게 일반적인 정의를 해 줄 필요성이 있을 것이다.

Mamona-Downs 와 Downs(2002)는 수학에서 정의를 직관에 의해 인식된, 그러나 수학적으로 정확하고 사용할 가치가 있는 탈맥락화된 법칙으로, 직관을 넘어선 모든 경우에 적용되는 것이라 하였다. 따라서 정의는 수학 학습의 출발점으로, 수학적 구조를 형성할 때 반드시 필요한 것이므로 '실수의 연산에 대한 성질'단원에서 새롭게 정의되는 항등원과 역원의 정의와 그 정의가 의미하는 것을 학생들에게 정확하게 이해시킬 필요가 있다.

셋째, 학생들은 중학교에서 배운 유리수 집합의 덧셈과 곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 실수 집합의 덧셈과 곱셈에 대해서도 성립한다는 것은 알고 있었지만, 이와 같이 성립하는 이유가 유리수 집합이 실수 집합과 마찬가지로 사칙연산에 대하여 닫혀 있기 때문이라는 것은 인지하지 못하고 있었다. 그리고 지금까지 사용하여 온 실수의 덧셈과 곱셈에 대한 계산이 그 연산법칙에 근거하고 있음을 이해하고 있었지만, 수와 관련된 연산에 익숙한 것처럼 보이는 학생들이 가진 연산법칙 그 자체의 의미에 대한 직관적 이해는 부족한 상태였다. 연산법칙의 의미에 대한 이해의 부족은 학생들이 일반 연산에 대한 계산과정에서 어려움을 겪게 되는 원인이 된다. 따라서 구체적인 상황에서 연산을 고려할 때는 연산법칙에 대한 보다 명확한 개념적 이해가 필요하다고 판단된다. 개념을 이해했다는 것은 이러한 개념의 생성 원리를 파악하고 이를 표현할 수 있으며, 문제상황에서 사용할 수 있는 상태를 말하기 때문이다(Watson, 2002).

넷째, 학생들은 실수와 관련된 성질을 증명하는 과정이나 방정식의 풀이과정에서 실수의 연산법칙, 항등원과 역원의 성질이 어떻게 적용되는지를 파악하지 못하고 있

었다. 항등원과 역원을 구하는 문제에 올바르게 반응한 학생들도 실수의 여러 가지 계산 법칙에 대한 논리적 근거를 설명하는 것을 어려워하였다. 이는 실수 연산의 기본 성질들 사이에 상정되어 있는 관련성을 파악하지 못하였기 때문이다. 연산에 대한 기본 성질을 이용하여 지금까지 사용하여 온 실수의 덧셈과 곱셈에 대한 계산 법칙의 근거를 밝혀준다면, 학생들이 항등원과 역원 등의 의미를 이해하는데 도움을 줄 수 있을 것이다.

한편, 학생들은 방정식의 해는 쉽게 구할 수 있었지만 실수 연산의 기본 성질이 방정식의 풀이의 기초가 됨을 이해하지 못하고 있었다. 즉 학생들은 방정식 풀이를 지배하는 원리가 수 체계의 구조적 성질과 같은 원리라는 것을 알지 못하였다. 따라서 방정식을 풀이에 이용한 등식의 성질, 이항과 소거의 개념과 항등원, 역원의 관계를 학생들에게 주지시켜 줄 필요가 있다. 방정식 풀이에 대한 논리적 근거를 실수 연산의 기본 성질과 관련지어 학습하면서 학생들은 실수 연산의 기본 성질이 가진 대수적 구조를 파악할 수 있을 것이다. 이를 통해 학생들은 한 가지 수학 내용을 여러 가지 현상과 관련지어 이해할 수 있는 힘을 기를 수 있게 될 것이다.

다섯째, 학생들은 복소수의 연산에 관한 성질은 실수의 연산에 관한 성질과 같다는 것을 이용하여, 복소수 집합에서도 실수 집합처럼 연산에 대한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립하고 항등원과 역원이 존재함을 알고 있었다. 또 학생들은 같은 꼴의 행렬 집합은 덧셈에 대하여 닫혀 있고, 행렬의 덧셈에서도 교환법칙과 결합법칙이 성립함을 알고 있을 뿐 만 아니라 실수의 덧셈에서와 같이 항등원과 역원이 존재한다는 것도 파악하고 있었다. 즉 학생들은 복소수 집합과 행렬 집합은 실수 집합과 똑같은 대수적 구조가 있다는 것을 직관적으로 이해하고 있었다. 이에 기초하여 학생들은 복소수 집합의 덧셈과 곱셈, 그리고 같은 꼴의 행렬 집합의 덧셈에 대하여 이항이 가능하고 연산법칙을 사용하여 식을 간단히 하는 등 실수 연산의 기본 성질들을 모두 이용할 수 있음을 인지하고 있었다. 이를 통해 학생들은 수 체계의 확장과정에서 일관되게 유지되는 대수적 구조를 직관적으로 파악할 수 있을 것이다. 즉, 실수 연산의 기본 성질이 이후 다항식, 복소수, 행렬 등의 단원에서 계속 그 집합의 연산 체계와의 유사성과 차이점 등으로 나타나는 상황에서, 학생들은 실수 연산의 기본 성질에 대한 정확한 이해에 기초하여 다항식, 복소수, 행렬 등의 단원에 내재된 대수적 구조를 쉽게 파악할 수 있을 것이다.

최근의 한 연구는 수학교사들이 가지고 있는 대수영역의 교육내용지식(pedagogical content knowledge)이 일반적으로 기대되는 수준에 미치지 못한다고 보고하며 중등 수학교사 양성대학의 교육과정의 개선을 주장한다(신현용 · 이강섭 · 한인기 · 류익승, 2005). 그 연구에 의하면 교사자격 취득을 위한 교육과정이 중등학교 현장에서의 수학교육에 별로 도움이 되지 못했다고 응답한 경우가 전체의 절반을 넘었고 교사들은 교육내용 지식을 대학에서 배우는 전공수학과 연관하여 생각하고 있지 않고, 단지 교육과정 또는 교과서에 제시된 수학 내용으로 생각하고 있음을 알 수 있다. 이러한 현실은 고등학생들의 대수적 개념의 이해와 응용능력과 무관하지 않을 것이다.

참 고 문 헌

김남희 (1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

김성준 (2004). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

김홍기 (2003). 제 7차 수학과 교육과정과 교과서에 제시된 수 체계 도입에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **42(3)**, pp.265-274.

나귀수 (2001). 중학교 학생들의 수 개념 조사. 대한수학교육학회지 〈수학교육〉, **3(2)**, pp.267-279.

류익승 · 신현용 · 한인기 (2006). 사차 이하 다항식의 풀이와 수학교육적 의의. 작성 중.

박승안 (2000). 대수학과 그 응용, 서울: 경문사.

박임숙 (2001). 실수 연산의 성질에 대한 고등학생의 인지 경향. 한국수학교육학회지 시리즈 A 〈수학교육〉, **40(2)**, pp.335-343.

신현용 (2006). 수학교사를 위한 현대대수학, 서울: 교우사.

신현용 · 이강섭 · 한인기 · 류익승 (2005). 중등학교 수학교사 양성을 위한 현대대수학 교재 개발 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A 〈수학교육〉, **44(3)**, pp.337-360.

홍진곤 (2000). 어떻게 '구조'를 가르칠 것인가-군 개념을 중심으로. 대한수학교육학회 수학교육학 연구, **10(1)**, pp.73-84.

Chick, D. H. (2000) Discussion document for the twelfth ICMI study: The future of the teaching and learning of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, **42**, pp.215-224.

Edwards, T. G. (2000). Some big ideas of algebra in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **6(1)**, pp.26.

Ericksen, D. E. B. (1988). *Students' conceptions of variables and their uses for generalization of mathematical patterns*. UMI, AAC 8824840, Michigan State University.

Kieran, C (1992). The learning and teaching of school algebra. In Grouws, D.(Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). NY: Macmillan Publishing Company.

Mamona-Downs, J. & Downs, M. (2002). Advanced mathematical thinking with a special reference to reflection on mathematical structure. L. D. English(Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp.163-192). NY: Macmillan Publishing Company.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford(Ed.), *The ideas of algebra, K-12* (1988 Yearbook, pp.8~19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Wagner, S. & Parker, S. (1993). Advancing algebra, *Research ideas in the classroom high school mathematics* (pp.119-139). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Watson, A. (2002). Teaching for understanding. In L. Haggarty(Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics : Perspectives on Practice*, (pp.152-165). London: RoutledgeFalmer.

Zaslavsky, O. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education*, **27(1)**, pp.67-78.

A Study on Understanding and Application Ability of Eleventh Graders for Basic Properties of Operations with Real Numbers

Jin, Jin Wook
Sungseo High School, Daegu, KOREA ; E-mail: jw9628@hanmail.net

Shin, Hyunyong
Korea National University of Education, Chung-Buk, KOREA ; E-mail: shin@knue.ac.kr

The ability of understanding the number and number systems, grasping the properties of number systems, and manipulating number systems is the foundation to understand algebra. It is useful to deepen students' mathematical understanding of number systems and operations. The authentic understanding of numbers and operations can make it possible for the students to manipulate algebraic symbols, to represent relationship among sets of numbers, and to use variables to investigate the properties of sets of numbers. The high school students need to understand the number systems from more abstract perspective. The purpose of this study is to study on understanding and application ability of eleventh graders of basic properties of operations with real numbers.

* ZDM classification : H44
* MSC2000 classification : 97B50, 97D70
* Key Word : algebra, operation, identity element, inverse element

【부록1】 이해 상태 검사 문항

1. 정수 집합 $\mathbf{Z}$ 는 사칙연산 중 어느 연산에 대하여 닫혀 있는지를 조사하여라.

2. 다음 명제의 참, 거짓을 판별하여라. 거짓이라면 반례를 들어라.
(1) 자연수의 집합 $\mathbf{N}$ 은 뺄셈 계산에 대하여 닫혀있다.
(2) 유리수의 집합 $\mathbb{Q}$ 은 사칙연산에 대하여 닫혀있다.
(3) 무리수의 집합은 사칙연산 중에서 어느 연산에 대해서도 닫혀있지 않다.

3. 다음의 계산 과정에서 사용된 연산법칙을 말하여라.

$$\begin{aligned} 2(1+2\sqrt{2})+4 &= 4+2(1+2\sqrt{2}) \quad \cdots\cdots [\quad] \\ &= 4+(2+4\sqrt{2}) \quad \cdots\cdots [\quad] \\ &= (4+2)+4\sqrt{2} \quad \cdots\cdots [\quad] \\ &= 6+4\sqrt{2} \end{aligned}$$

4. 다음 물음에 답하여라.
(1) 실수 집합 $\mathbb{R}$에서 덧셈과 곱셈에 대한 항등원을 각각 구하여라.
(2) 정수 집합 $\mathbf{Z}$에서 덧셈과 곱셈에 대한 항등원을 각각 구하여라.
(3) 자연수 집합 $\mathbf{N}$에서 덧셈과 곱셈에 대한 항등원을 각각 구하
여라.

5. 실수 a, b 의 뺄셈과 나눗셈은 각각 [ ]를(을) 이용하여 $a-b=a+(-b)$, $a\div b=a\times\frac{1}{b}$ $(b\neq 0)$와 같이 덧셈과 곱셈으로 나타낼 수 있다.

6. 실수의 집합 $\mathbb{R}$에 대한 다음의 설명 중 옳은 것을 모두 찾아라.
① 뺄셈에 대한 교환법칙이 성립한다.
② 뺄셈에 대한 결합법칙이 성립한다.
③ 덧셈과 곱셈에 대한 항등원이 항상 존재한다.
④ 모든 실수에 대하여 덧셈에 대한 역원이 항상 존재한다
⑤ 0 을 제외한 모든 실수에 대하여 곱셈에 대한 역원이 항상 존재한다.

7. 다음 물음에 답하여라.
(1) 실수 집합 $\mathbb{R}$에서 $a\in\mathbb{R}$ 의 덧셈에 대한 역원과 $a(\neq 0)\in\mathbb{R}$ 의 곱셈에 대한 역원을 각각 구하여라.
(2) 정수 집합 $\mathbf{Z}$에서 $a\in\mathbf{Z}$ 의 덧셈에 대한 역원과 $a(\neq 0)\in\mathbf{Z}$ 의 곱셈에 대한 역원을 각각 구하여라.
(3) 자연수 집합 $\mathbf{N}$에서 $a\in\mathbf{N}$ 의 덧셈과 곱셈에 대한 역원을 각각 구하여라.
(4) 다음 수의 덧셈과 곱셈에 대한 역원을 각각 구하여라.
① 3 ② -2.5
③ $\sqrt{2}$ ④ $1+\sqrt{2}$

8. 실수 집합 $\mathbb{R}$ 에서 $2(a+2)+a$ 의 곱셈에 대한 역원이 존재하지 않도록 실수 a 의 값을 정하여라.

9. 다음 식은 실수의 연산에 대한 어떤 성질을 나타내는지를 말하여라. (단, a, b, c 는 실수)
(1) $a+b+0=a+b$ …… [ ]
(2) $(a+b)+\{-(a+b)\}=0$ …… [ ]
(3) $ab+ac=a(b+c)$ …… [ ]

10. 임의의 실수 a 에 대하여, 다음 [ ]에 알맞은 실수 연산의 기본 성질을 써라.
$-(-a)=a$ 를 증명하는 과정이다.
: $-(-a)$ 는 [ ]의 덧셈에 대한 역원이므로 [ ] $+x=0$ 이 되는 x 를 찾으면 된다.
$\therefore x=a$

【부록2】 적용 능력 검사 문항

1. 집합 C $= \{a + bi \mid a,\ b$는 실수$\}$ 가 덧셈 및 곱셈에 대하여 닫혀있는지를 조사하여라.

2. 실수 집합 $\mathbb{R}$ 에 대하여 원소가 한 개이면서 곱셈에 대하여 닫혀있는 실수의 부분집합은 모두 몇 개인가?

3. $a,\ b,\ c$ 가 유리수일 때,
일차방정식 $ax + b = c\ (a \neq 0)$의 근
$x = \dfrac{c - b}{a}$ 은 [ ]수이다.

4. 집합 $A = \{x \mid x$ 는 유한소수$\}$ 에 대하여 이차방정식 $3x^2 - 17x + 10 = 0$ 를 풀어라.

5. 집합 $X = \{a,\ b,\ c\}$ 가 이항연산 $\circ$와 $*$에 대하여 닫혀 있을 때, 다음은 그 연산의 결과의 일부를 나타낸 것이다.

$$\boxed{b \circ b = a\ ,\quad a \circ c = b\ ,\quad a * c = c}$$

위의 두 연산에 대하여 다음 중 어떤 연산법칙이 성립하면 $c * \{(b \circ c) \circ a\}$ 의 값을 계산할 수 있는지 모두 찾아라.
① 교환법칙 ② 결합법칙
③ 분배법칙 ④ 위의 조건만으로 충분하다.

6. 집합 $S = \{0,\ 1,\ 2\}$ 에 대하여 연산 $\circ$ 를 오른쪽 표와 같이 정의할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

$\circ$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

① 집합 S 는 연산 $\circ$에 대하여 닫혀있다.
② 연산 $\circ$에 대한 교환법칙이 성립한다.
③ 연산 $\circ$에 대한 항등원은 1이다.
④ 연산 $\circ$에 대한 1의 역원은 2이다.

7. 집합 사이에서 정의된 연산 $\triangle$ 에 대하여 교환법칙과 결합법칙이 성립하고, 이 연산에 대한 A 의 역원이 A 일 때, $(A \triangle B) \triangle A$ 를 간단히 하여라.

8. 실수 $a,\ b$ 에 대하여 연산 $*$ 를
$a * b = ab - 3a - 3b + k$ 라 정의할 때,
연산 $*$ 에 대한 항등원이 존재하기 위한 k 값은 [ ]이고, 이 때, 연산 $*$ 에 대한 [ ]의 역원은 존재하지 않는다.

9. 임의의 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 연산 $\circ$와 $*$ 를 다음과 같이 정의할 때, 연산 $\circ$와 $*$ 에 대한 항등원을 구하여라.
① $a \circ b = a + b - 2$
② $a * b = ab + a + 2b$

10. 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여
「$ab = 0$ 이면 $a = 0$ 또는 $b = 0$」을 증명하는 과정이다. [ ]에 알맞은 실수 연산의 기본 성질을 써라.
i) $a = 0$ 이면 증명하려는 결과가 성립한다.
ii) $a \neq 0$ 이라면 [ ]임을 보이면 된다.
$a \neq 0$ 이므로 a 의 곱셈에 대한 [ ] $\dfrac{1}{a}$ 가 존재한다.

등식 $ab = 0$ 에서 양변에 $\dfrac{1}{a}$ 을 곱하면

$\dfrac{1}{a}(ab) = \dfrac{1}{a}\,0$ …… [ ]

$\left(\dfrac{1}{a}\,a\right)b = \dfrac{1}{a}\,0$ …… [ ]

$1\,b = 0$ …… [ ]

$b = 0$ …… [ ]

11. 일차방정식 $2x + 4 = 10$ 의 해를 구하는 과정이다. 다음의 증명과정 중에서 각 단계에 이용된 연산법칙 또는 실수 연산의 기본 성질을 써라.

$$
\begin{aligned}
2x+4 &= 10 \\
(2x+4)+(-4) &= 10+(-4) &&\cdots\cdots [\quad] \\
2x+\{4+(-4)\} &= 6 &&\cdots\cdots [\quad] \\
2x+0 &= 6 &&\cdots\cdots [\quad] \\
2x &= 6 &&\cdots\cdots [\quad] \\
\frac{1}{2}(2x) &= \frac{1}{2}\,6 &&\cdots\cdots [\quad] \\
\left(\frac{1}{2}\;2\right)x &= 3 &&\cdots\cdots [\quad] \\
1\,x &= 3 &&\cdots\cdots [\quad] \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

위의 풀이과정과 아래의 풀이과정을 비교하여 중학교에서 배운 '이항한다'와 '소거한다'의 의미를 항등원과 역원을 이용해서 설명하여라.

$$
\begin{aligned}
2x+4=10 \iff 2x &= 10-4 \\
2x &= 6 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

12. 복소수 $\frac{1-i}{1+i}$ 의 덧셈과 곱셈에 대한 역원을 각각 구하여라.

13. 임의의 행렬 A와 영행렬 0에 대하여

(1) $A+0=0+A=A$ 이므로 행렬의 덧셈에서 영행렬은 [ ] 이다.

(2) $A+(-A)=(-A)+A=0$ 이므로 행렬의 덧셈에서 $-A$ 는 [ ]이다.