

Performance Analysis of VaR and ES Based on Extreme Value Theory¹⁾

Sung Chil Yeo²⁾

Abstract

Extreme value theory has been used widely in many areas of science and engineering to deal with the assessment of extreme events which are rare but have catastrophic consequences. The potential of extreme value theory has only been recognized recently in finance area. In this paper, we provide an overview of extreme value theory for estimating and assessing value at risk and expected shortfall which are the methods for modelling and measuring the extreme financial risks. We illustrate that the approach based on extreme value theory is very useful for estimating tail related risk measures through backtesting of an empirical data.

Keywords : Extreme Vaue Theory; Value at Risk; Expected Shortfall; Backtesting.

1. 서론

금융의 자율화, 국제화 및 개방화가 본격적으로 이루어지면서 금융기관간의 통합화 및 경쟁심화 등으로 인해 최근 금융시장에서 불확실성과 변동성이 크게 증가하고 있다. 특히 파생상품거래 등의 확대에 따른 레버리지(leverage)효과의 증대로 인해 금융기관들은 대규모의 손실을 입을 가능성에 노출되고 있다. 널리 알려진 실례로, 국내의 경우에 SK증권의 다이아몬드펀드(Diamond Fund)사건 (1998년)과 국외의 경우에 미국 오렌지카운티(Oragne County)의 파산사건(1994년), 영국 베어링(Barings)그룹의 파산사건 (1995년), 일본 다이와(Daiwa)은행의 거액손실사건 (1995년) 등에서 보듯이 위험을 적절히 관리하고 통제하지 못할 경우 얼마나 큰 금융손실을 초래하는지를 보여 주고 있다. 따라서 세계의 많은 금융기관들은 위험을 체계적으로 관리할 수 있는 시스템을 구축하기위해서 노력하고 있으며, 그 중 가장 각광을 받고 있는 위험관리 시스템이 VaR(Value at Risk)모형이다. 특히 국제결제은행(Bank for International Settlements: BIS)에 의해 1998년부터 시행된 은행에 대한 신자기자본 규제방안에서 금융기관의 내부모형(internal model)사용이 허용된 이후 위험을 보다 정확하게 측정하기위한 수단으로 VaR에 대한 연구가 선진국뿐만 아니라 국내에서도 활발히 진행되

1) This research was supported by Konkuk University.

2) Professor, Department of Applied Statistics, Konkuk University, Seoul 143-701, Korea.
E-mail: scyeo@konkuk.ac.kr

고 있으며 금융감독원에서도 금융기관건전성을 감독하기 위한 자기자본규제방안으로 VaR를 널리 활용하고 있다.

VaR란 금리, 주가, 환율 등 기초적 시장가격들에 대한 미래확률분포를 예측하여, 향후 불리한 시장가격변동에 기인하여 일정기간동안 보유한 자산포트폴리오에 대해서 주어진 신뢰수준내에서 최대손실액을 의미한다. VaR의 큰 장점은 일반적으로 널리 알려진 통계적인 개념을 사용하므로 이해하기가 쉽고 또한 여러 금융자산으로 구성된 포트폴리오 전체의 위험을 최대 손실액이라는 하나의 수치로 나타내므로 해당 금융자산의 위험의 크기를 한눈에 알아 볼 수가 있으며 또한 통일된 방법으로 위험을 측정하여 서로 다른 금융자산 사이의 위험크기를 비교할 수가 있다는 것이다. 그러나 VaR는 통계적인 방법으로 측정되므로 자료, 가정, 방법론에 따라 동일한 금융자산에 대해서도 서로 다른 VaR가 산출될 수 있음에 유의할 필요가 있다. 따라서 보다 정확한 VaR를 산출하기 위해서는 해당 금융자산 수익률의 확률분포를 정확하게 파악하는 것이 중요한 과제가 된다.

일반적으로 VaR를 측정하기 위해 금융자산 수익률의 확률분포로 정규분포의 가정을 많이 사용하는데 이는 정규분포의 경우 평균과 분산만 알면 분포의 특성이 완전히 파악될 수 있으므로 주어진 신뢰수준 내에서 VaR를 쉽게 구할 수 있기 때문이다. 정규분포를 가정한 대표적으로 잘 알려진 VaR측정모형으로 J.P. Morgan에서 개발한 RiskMetrics모형을 들 수 있다. 그러나 Duffie와 Pan (1997)과 Jorion (2001) 등에서도 언급하고 있듯이 금융시장의 수익률의 분포는 꼬리부분이 정규분포에 비해 훨씬 두터운 형태를 띠고 있기 때문에 정규분포를 가정한 VaR의 측정은 실제의 VaR를 과소평가하는 경향이 있다. 이를 보완하기 위해 BIS에서는 승수 3을 곱하는 것을 제시하는데 이는 실제의 VaR에 비해 너무 보수적으로 정한다는 비판이 있을 뿐 아니라 실제의 VaR 측정과는 다소 거리가 먼 개념이다.

위에서 언급한 정규분포에 근거한 기존의 VaR 측정방법들이 가지고 있는 문제점들을 극복하고 통계적으로 보다 정확한 VaR를 측정하기 위해서 최근 관심을 끌고 있는 방법이 소위 극단치 이론(extreme value theory:EVT)에 의한 VaR 측정방법이다. 이 이론은 원래 수자원분야나 보험분야 등에서 재앙적사건을 연구하는데 주로 이용되어 왔으나 최근에는 재무분야에도 많이 활용되고 있다. EVT에 관한 책으로는 Embrechts, Kluppelberg와 Mikosh (1997), Reiss와 Thomas (2001), Coles (2001) 등이 있고, 특히 VaR와 관련한 주요한 논문으로 Danielsson과 deVries (1997a, 1997b), Longin (1996, 2000), McNeil과 Frey(2000) 등이 있다.

EVT에 의한 방법은 VaR를 측정하기 위해서 전체 수익률 데이터의 분포를 모형화한 결과로서 꼬리부분의 확률을 얻는 것 대신에 분포의 꼬리부분에 속하는 데이터들을 다른 영역의 데이터들과 분리하여 이들만의 점근적 분포형태를 제공하는 통계적 이론을 이용하는 것이다. 이 접근 방법의 장점은 꼬리부분의 확률을 추정하는데 중심부의 자료가 미치는 영향을 줄일 수 있으며 또한 자산 수익률에 대해 어떠한 특정 분포의 가정 없이 VaR를 측정함으로써 특정분포를 가정할 경우 실제분포와의 차이에서 발생하는 오차를 줄일 수 있다. 그리고 자산 수익률분포의 비대칭성과 두터운 꼬리형태를 반영할 뿐만 아니라 실증분포의 꼬리를 부드럽게 만들어서 과거에 발생한

손실을 초과하는 극단적 사건의 발생 가능성을 반영하도록 하여준다.

한편, 최근 들어 위험측정치로서 VaR의 한계에 대해 많이 지적되고 있다. 먼저 VaR는 단지 확률분포의 분위수로만 측정되므로 VaR를 초과하는 손실 즉, 꼬리위험을 무시한다는 점이다. 또한 Artzner 등 (1997, 1999)에 의하면 VaR는 일반적으로 하위가법성(subadditivity)을 만족하지 못하므로 일관성(coherency)을 가진 위험척도(risk measure)가 되지 못한다는 것이다. 이러한 VaR의 문제점들을 보완해주는 위험척도로서 ES(expected shortfall)가 종종 사용되고 있다. ES란 손실이 VaR를 초과한다는 조건하에서 손실의 조건부기대값을 의미한다. 즉, ES란 VaR를 초과하는 손실의 예상규모가 얼마나 되는 지를 나타낸다.

자산 수익률의 분포가 정규분포를 따른다면 꼬리위험은 그다지 심각하지 않을 수 있다. 그러나 위에서 언급하였듯이 실제의 분포는 대개 비대칭적이면서 두터운 꼬리형태를 보이므로 꼬리위험은 자칫 심각한 손실을 야기할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 분포의 비대칭성과 꼬리부분의 두터움을 잘 반영할 수 있는 극단치이론을 이용하여 VaR와 함께 ES를 측정하고 이들 측정치들에 대한 사후검증을 실시하기로 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같이 이루어진다. 먼저 1절의 서론에 이어 제 2절에서는 수익률과 위험척도를 정의하고 위험척도의 예로서 VaR와 ES를 구체적으로 표현한다. 제 3절에서는 RiskMetrics모형과 극단치이론을 적용한 경우에 VaR와 ES의 추정방법에 대해 논의한다. 제 4절에서는 VaR와 ES의 추정에 대한 사후검증(backtesting)방법을 논의하고, 제 5절에서는 원/달러 환율변화율자료에 대해 VaR와 ES의 추정과 사후검증을 실시한 실증분석 결과를 보인다. 마지막으로 제 6절에서는 본 논문의 요약과 함께 결론을 맺는다.

2. 수익률과 위험척도로서 VaR와 ES

어떤 금융자산의 가치에 대해 일정한 기간동안 포지션의 변동에 따른 위험을 나타내기 위해서 흔히 수익률을 사용한다. 일반적으로 수익률을 정의하는 방식으로 이산복리수익률과 연속복리수익률의 두 가지 타입이 있는데 본 논문에서는 논의의 편의를 위해서 연속복리수익률로 수익률을 나타내기로 한다. 임의의 t 시점에서 금융자산의 가치를 P_t 라 할 때 t 시점에서 해당 금융자산의 연속복리수익률은 다음과 같이 정의된다.

$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (2.1)$$

한편, 어떤 기간동안 수익률의 하락에 따른 금융자산의 가치손실액을 X 라하고, 이 X 가 취할 수 있는 모든 가능한 손실액의 집합을 V 라고 할 때 $\rho: V \rightarrow R$ (실수집합)인 함수를 위험척도라고 말한다. Artzner 등 (1999)은 위험척도의 바람직한 성질로서 다음의 네 가지 조건들을 제시하고 위험척도 ρ 가 이 조건들을 모두 만족할 때 일관성 있는 위험척도(coherent risk measure)라고 불렀다.

(i) 단조성(monotonicity) : $X, Y \in V, X \leq Y$ 이면 $\rho(Y) \leq \rho(X)$,

- (ii) 하위가법성(subadditivity) : $X, Y, X + Y \in V$ 이면 $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$,
- (iii) 양동질성(positive homogeneity): $X \in V, h > 0, hX \in V$ 이면 $\rho(hX) = h\rho(X)$
- (iv) 전이불변성(translation invariance): $X \in V, a \in R$ 이면 $\rho(X + a) = \rho(X) + a$.

이제 위험척도의 예로서 VaR와 ES를 구체적인 식으로 표현하기로 한다. 일정한 기간동안 발생한 금융자산의 손실액 X 의 분포함수를 F 라 하면 100p% 신뢰수준에서 VaR와 ES는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$VaR_p(X) = F^{-1}(p), \tag{2.2}$$

$$ES_p(X) = E(X | X > VaR_p(X)) \tag{2.3}$$

여기서 $F^{-1}(p) = \inf\{x | F(x) \geq p\}$ 이다. 즉, $VaR_p(X)$ 는 손실액 X 의 분포에서 p 번째 분위수(quantile)를 가리킨다. 예를 들어, 손실 X 의 분포가 평균이 μ 이고 분산이 σ^2 인 정규분포인 경우에 신뢰수준 p 에서 VaR와 ES는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$VaR_p(X) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(p) \tag{2.4}$$

$$ES_p(X) = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(p))}{1-p} \tag{2.5}$$

여기서 Φ 는 표준정규분포함수, $\Phi^{-1}(p)$ 는 Φ 의 p 번째 분위수, ϕ 는 표준정규분포의 확률밀도함수를 각각 나타낸다. 그리고 VaR와 ES는 다음의 관계가 성립한다.

$$ES_p(X) = VaR_p(X) + E(X - VaR_p(X) | X > VaR_p(X)). \tag{2.6}$$

Artzner 등 (1999)에 의하면 일반적으로 ES는 일관성 있는 위험척도가 되지만 VaR는 일관성 있는 위험척도가 되지 못한다. 그러나 Embrechts 등 (2002)에서 보인바와 같이 손실 X 의 분포가 정규분포와 같은 타원형의 분포일 경우에는 VaR 또한 일관성 있는 위험척도가 된다.

3. RiskMetrics모형과 극단치이론을 이용한 VaR와 ES의 추정

3.1 RiskMetrics모형하에서 VaR와 ES의 추정

RiskMetrics모형은 J. P. Morgan사에서 개발한 대표적인 VaR추정모형으로서 지수가중이동평균(exponentially weighted moving average: EWMA)법을 사용하여 수익률의 변동성을 산출한다. 구체적으로 $t-1$ 시점까지 가능한 모든 정보의 집합을 H_t 이라 표시하고 수익률 $r_t | H_{t-1}$ 의 분포가 정규분포 $N(\mu_t, \sigma_t^2)$ 를 따른다고 할 때 RiskMetrics모형은 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_{t-1}^2, \quad 0 < \lambda < 1 \tag{3.1}$$

식 (3.1)을 순환적으로 나타내면 $\sigma_t^2 = \lambda^t \sigma_0^2 + (1-\lambda) \sum_{j=0}^{t-1} \lambda^j r_{t-j}^2$ 이 된다. 따라서 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $\lambda^t \sigma_0^2 \rightarrow 0$ 이므로 $j=0$ 에서 $t-1$ 에 이르기 까지 r_{t-j}^2 의 가중치는 각각 $(1-\lambda)$,

$(1-\lambda)\lambda, \dots, (1-\lambda)\lambda^{t-1}$ 로서 지수적으로 감소한다.

따라서 금융자산의 초기포지션가치를 P_0 라 하고 식 (3.1)로부터 EWMA방식으로 추정된 수익률의 변동성을 $\hat{\sigma}_t$ 라고 하면 RiskMetrics모형하에서 $100p\%$ 신뢰수준에서 t 시점의 VaR와 ES는 식 (2.3)과 식 (2.4)로부터 각각 다음과 같이 추정된다.

$$\widehat{VaR}_{p,t} = P_0 \cdot z_{1-p} \hat{\sigma}_t, \tag{3.2}$$

$$\widehat{ES}_{p,t} = P_0 \cdot \hat{\sigma}_t \frac{\phi(-z_{1-p})}{1-p}, \tag{3.3}$$

여기서 z_{1-p} 는 표준정규분포의 상위 $(1-p)$ 번째 분위수를 나타낸다.

3.2 극단치이론을 이용한 VaR와 ES의 추정

일반적으로 EVT의 결과로 얻어지는 확률분포의 모형에는 일반화극단치분포 (generalized extreme value distribution:GEV)모형과 일반화파레토분포(generalized Pareto distribution: GPD)모형의 두가지 타입이 있다. 먼저 GEV모형에 관해 논의하기로 한다.

확률변수들 X_1, X_2, \dots, X_n 이 독립이고 항등적(IIID)이며 분포함수 F 를 가진다고 하자. 그리고 이 확률변수들 중 최대확률변수를 M_n , 즉 $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ 이라고 하자. Fisher-Tippett (1928)정리에 의하면 어떤 상수들 $a_n \in R^+, b_n \in R$ 에 의해 표준화된 최대확률변수 $\tilde{M}_n = (M_n - b_n)/a_n$ 은 $n \rightarrow \infty$ 일 때 비퇴화분포(non-degenerate distribution)로 수렴한다면 아래의 표준극단치분포들(standard extreme value distributions)이라고 부르는 세가지 유형의 분포들 중 하나로 수렴한다.

$$\text{Fréchet: } \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0, \tag{3.4}$$

$$\text{Weibull: } \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0, \tag{3.5}$$

$$\text{Gumbell: } \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}, x \in R. \tag{3.6}$$

한편, Jenkinson (1955)과 von Mises (1936)는 $n \rightarrow \infty$ 일 때 \tilde{M}_n 의 수렴분포로 위의 세가지 유형의 표준극단치분포들로 나타내는 대신 일반화극단치분포(generalized extreme value distribution: GEV)라고 부르는 분포함수를 제시하였다. 즉

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\tilde{M}_n \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H_\xi(x) \tag{3.7}$$

가 된다. 혹은 식 (3.7)과 동등하게 다음이 성립한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \{1 - F(a_n x + b_n)\} = -\log H_\xi(x), \tag{3.8}$$

여기서 $H_\xi(x)$ 는 GEV분포함수로서 다음과 같이 주어진다.

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left\{- (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\right\}, & 1 + \xi x > 0, \xi \neq 0 \\ \exp(-e^{-x}), & x \in R, \xi = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

여기서 ξ 는 GEV의 형태를 결정짓는 모수로서 형태모수(shape parameter)또는 꼬리지수(tail index)라고 부르는데, $\xi = \alpha^{-1} > 0$, $\xi = -\alpha^{-1} > 0$, $\xi = 0$ 을 취할 때 H_ξ 는 각각 Fréchet 분포족, Weibull 분포족, Gumbell 분포족에 속하게 된다. 특히 $\xi = 0$ 인 경우는 $\xi \rightarrow 0$ 일 때의 H_ξ 의 극한분포함수 H_0 로 볼 수 있다.

위의 식(3.4)에서 $n \rightarrow \infty$ 일 때 M_n 의 위치모수(location parameter)와 척도모수(scale parameter)를 각각 μ 와 σ 라고 하면 n 이 충분히 클 때 M_n 의 분포함수는 근사적으로 다음과 같이 주어진다.

$$P(M_n \leq x) \approx H_\xi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = H_{\xi, \mu, \sigma}(x) \quad (3.10)$$

한편, 표준화된 최대확률변수 \tilde{M}_n 이 일반화 극단치분포함수 H_ξ 로 수렴할 때 F 는 H_ξ 의 최대매력영역(maximum of attraction: MDA)에 속한다고 말하고 $F \in MDA(H_\xi)$ 라고 표기한다. Gnedenko (1943)에 의하면 분포함수 F 가 Fréchet 분포족에 속하는(즉, $F \in MDA(H_\xi)$, $\xi > 0$)경우에는 분포함수 F 가 어떤 천천히 변하는 함수 L 에 대해서 아래의 식이 성립한다.

$$1 - F(x) = x^{-\frac{1}{\xi}} L(x) \quad (3.11)$$

이 경우에 $F(x)$ 의 꼬리부분은 멱함수처럼 감소하면서 두터운 꼬리형태를 보인다. 따라서 Fréchet 분포족은 금융시계열 자료의 분석에 적합하다고 볼 수 있다. Fréchet 분포족에 속하는 분포로는 Pareto 분포, Burr 분포, loggamma 분포, Cauchy 분포, t -분포, α -stable 분포 등이 있다.

분포함수 F 가 Weibull 분포족에 속하는 (즉, $F \in MDA(H_\xi)$, $\xi < 0$)경우는 $F(x)$ 의 꼬리부분이 짧고 유한한 형태를 보이는데 균등분포, beta분포 등이 이에 해당한다. 그리고 분포함수 F 가 Gumbell 분포족에 속하는 (즉, $F \in MDA(G_\xi)$, $\xi = 0$)경우는 $F(x)$ 의 꼬리부분이 지수적으로 감소하면서 가느다란 꼬리형태를 보인다. Gumbell 분포족에 속하는 분포에는 정규분포, 지수분포, 로그정규분포 등이 있다.

한편, GEV분포에 내포되어있는 미지의 모수들 μ , σ , ξ 을 추정하기 위해서는 일정 기간 관찰된 전체 데이터로부터 근사적으로 GEV분포를 따르는 극단치 데이터를 추출하는 것이 요구된다.

어떤 기간동안 관찰된 T 개의 표본 데이터를 X_1, X_2, \dots, X_T 라고 하자. 이들 전체표본 데이터를 관찰기간에 따라 m 개의 블록(block)으로 나누어서 각 블록마다 $n (= T/m)$ 개씩의 하위표본(subsample) 데이터가 들어있도록 한다. 이때 하위표본의 크기 n 은 Fisher-Tippett정리가 적용될 수 있을 만큼 충분히 크게 잡는다. 이제 j 번째 블록에 있는 하위표본 관찰치들 중에 최대관측표본을 $M_n^{(j)}$, 즉 $M_n^{(j)} = \max\{X_{(j-1)n+1}, \dots, X_{(j-1)n+n}\}$ 이라고 하면 근사적으로 GEV분포를 따르는 극단치 데이터 $M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \dots$

..., $M_n^{(m)}$ 을 얻어진다.

위에서와 같이 극단치 데이터를 구하는 방법을 블록최대(block maxima: BM)방법이라고 부른다. 이 방법은 데이터를 효율적으로 이용할 수 있는 장점이 있는 반면에 전체 데이터를 몇 개의 블록으로 나눌 것인가에 따라 분산과 편위의 상반관계가 나타난다. 즉 각 블록의 크기를 증가시키면 추정량의 편위가 감소하는 반면에 블록의 개수가 적어져서 추정량의 분산이 커지게 되고, 반대로 블록의 개수를 증가시키면 분산이 작아지는 대신에 편위가 증가하게 된다. 또한 극단치 데이터가 각 블록마다 고르게 분포한다는 보장이 없으므로 어떤 블록에서 선택된 극단치는 전체 데이터의 관점에서는 진정한 극단치로 볼 수 없는 경우가 발생할 수 있다. 따라서 이러한 문제점을 해소하면서 BM방법에 비해 좀더 효율적으로 극단치 데이터를 구하는 방안으로 다음절에서 논의하는 순서통계량의 개념에 기초한 방법이 있다. 이 방법은 임계치초과봉(peaks over threshold: POT)방법이라고 부르는 것으로 전체 데이터를 크기순으로 배열하였을 때 어떤 임계치를 초과하는 관측치들을 극단치 데이터로 정의한다.

POT방법에 의해 정의되는 극단치들의 점근분포는 GPD함수가 되는데 이제부터 GPD모형에 관해 논의하기로 한다.

확률변수 X 의 분포함수를 F 라 하고 F 의 오른쪽 끝점을 x_F (즉, $x_F = \sup\{x \in R: F(x) \leq 1\} < \infty$)라고 하자. 이 때 임의의 높은 임계치 u 에 대해서 임계치 초과분포함수(excess distribution over the threshold)를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} F_u(x) &= P(X-u \leq x | X > u) \\ &= \frac{F(u+x) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad 0 \leq x < x_F - u \end{aligned} \quad (3.12)$$

즉 임계치초과분포함수 F_u 는 확률변수 X 가 주어진 임계치 u 를 초과할 때 초과크기에 대한 조건분포함수를 나타낸다. Balkema와 de Haan (1974)과 Pickands (1975)에 의하면 X 의 분포함수 F 가 GEV분포의 MDA에 속하는 경우(즉, $F \in MDA(H_\xi)$, $\xi \in R$)가 되면 $u \rightarrow x_F$ 일 때 $F_u(x)$ 는 일반화파레토분포(generalized Pareto distribution: GPD)함수 $G_{\xi, \sigma_u}(x)$ 로 수렴한다고 알려져 있다. 여기서

$$G_{\xi, \sigma_u}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma_u}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & x \geq 0, 1 + \frac{\xi x}{\sigma_u} > 0, \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\sigma_u}\right), & x \geq 0, \quad \xi = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

$\sigma_u = \sigma + \xi u$ 이다. 따라서 실제 응용의 경우 n 이 충분히 클 때 최대확률변수 M_n 의 분포가 Fisher-Tippett정리에 의해 근사적으로 GEV분포함수 $H_{\xi, \mu, \sigma}$ 를 따르고 이 때 x_F 에 충분히 가까운 높은 임계치 u 를 잡으면 임계치 초과분포함수 F_u 는 근사적으로 GPD함수에 접근한다.

GPD함수에 내포된 두 개의 모수 중 $\sigma_u (> 0)$ 는 임계치 u 에 따라 변하는 척도모수이며 ξ 는 임계치 u 와 무관한 모수로서 GEV분포에서 ξ 와 같이 GPD의 형태를 결정짓는 형태모수(shape parameter)또는 꼬리지수(tail index)라고 부른다. 그런데 $\xi > 0$ 이면

G_{ξ, σ_u} 는 파레토 타입분포가 되고, $\xi=0$ 이면 G_{ξ, σ_u} 는 지수분포가 되며 $\xi < 0$ 인 경우에는 G_{ξ, σ_u} 는 제 II 파레토 타입분포가 된다. 특히 $\xi > 0$ 일 때 GPD함수 G_{ξ, σ_u} 는 두터운 꼬리모양을 가지므로 금융시계열 데이터의 분석에 적합한 분포라고 할 수 있다.

일반적으로 GEV분포함수는 세 개의 모수 ξ, μ, σ 를 내포하는데 비해 GPD함수는 두 개의 모수 ξ, σ_u 를 가지므로 일반적으로 GPD함수를 이용한 VaR의 추정이 좀더 효율적이라고 볼 수 있다. 또한 대부분의 금융시계열의 경우 BM방법에서 정의하듯이 극단치가 일정한 주기를 가지고 발생하지 않는다. 따라서 본 논문에서는 극단치 분포의 두가지 타입 중에서 GPD모형에 대해서만 VaR와 ES의 추정과 사후검증을 논의하기로 한다.

어떤 기간동안 관찰된 n 개의 표본데이터 x_1, x_2, \dots, x_n 이 분포함수 F 를 따르고 F 의 오른쪽 끝점을 x_F 라고 하자. POT방법은 x_F 에 충분히 가까운 임계치 u 가 주어졌을 때 n 개의 표본데이터들 중 임계치 u 를 초과하는 관측치들을 극단치 데이터로 정의한다.

이제 임계치 u 를 초과하는 관측치들을 $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n_u}$ ($n_u = \sum_{i=1}^n I_{\{x_i > u\}}$)라 하고 임계치 초과값들(threshold excesses)을 $y_i = x'_i - u, i = 1, \dots, n_u$ 라고 표기하자. 이때 임계치 u 가 x_F 에 충분히 가까운 값이면 Balkema와 de Haan 과 Pickands 정리에 의해 임계치초과데이터 y_1, y_2, \dots, y_{n_u} 는 근사적으로 GPD를 따르는 데이터라고 볼 수 있다.

일반적으로 GEV모형이나 GPD모형에 내포된 모수들을 추정하는 방법으로는 최우추정법, 확률가중추정법(method of probability weighted moments) 그리고 비모수적 추정법 등이 있다. 그런데 Hosking과 Wallis (1987)에 의하면 꼬리지수가 $\xi > -0.5$ 이면 최우추정법에 의해 구한 모수들의 추정량은 점근적으로 정규분포를 따른다고 알려져 있다. 즉, $\xi > -0.5$ 일 때 모수 ξ 와 σ_u 에 대한 최우추정량 $(\hat{\xi}, \hat{\sigma}_u)$ 는 다음과 같이 점근적으로 이변량정규분포를 따른다.

$$\sqrt{n_u} \begin{pmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\sigma}_u \end{pmatrix} \rightarrow N \left(\begin{pmatrix} \xi \\ \sigma_u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (1+\xi)^2 & \sigma(1+\xi) \\ \sigma(1+\xi) & 2\sigma^2(1+\xi) \end{pmatrix} \right) \quad (3.14)$$

따라서 분포가 두터운 꼬리모양을 가질 경우에 모수들에 대해 최우추정법으로 구한 추정치들이 다른 방법으로 구한 추정치들보다 효율적이라고 볼 수 있다. 본 논문에서는 GPD함수에 내포된 모수들의 추정을 위해 최우추정법을 사용하기로 한다.

GPD 함수에 내포된 모수 ξ 와 σ_u 에 대한 우도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$L(\xi, \sigma_u) = \prod_{j=1}^{n_u} g_{\xi} \left(\frac{x}{\sigma_u} \right), \quad (3.15)$$

여기서

$$g_{\xi}(x) = \begin{cases} (1+\xi x)^{-(1+\frac{1}{\xi})}, & \xi \neq 0 \\ e^{-x}, & \xi = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

이다. 단, $\xi > 0$ 일 때 $\xi \geq 0$, $\xi < 0$ 일 때 $0 \leq x \leftarrow 1/\xi$ 임. 따라서 모수 ξ, σ_u 에 대한 로그우도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$l(\xi, \sigma_u) = \begin{cases} -n_u \log \sigma_u - \left(1 + \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^{n_u} \log \left(1 + \xi \frac{y_i}{\sigma_u}\right)\right), & \xi \neq 0 \\ -n_u \log \sigma_u - \frac{1}{\sigma_u} \sum_{i=1}^{n_u} y_i, & \xi = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

단, $\xi > 0$ 일 때 $y_i > 0$, $\xi < 0$ 일 때 $0 \leq y_i \leq -\sigma_u/\xi$, $i = 1, \dots, n_u$ 임. 따라서 식 (3.17)에서 주어진 로그우도함수로부터 모수 ξ, σ_u 에 대한 최우추정치들을 구할 수 있다.

한편, 위의 식(3.13)에서 보는 것처럼 모수 ξ, σ_u 에 대한 최우추정치들은 임계치 u 에 따라 값이 달라진다. 이와 같이 POT방법은 앞에서 언급한 BM방법이 갖는 문제점을 피할 수 있는 장점이 있으나, 이 경우에도 임계치 u 를 어디서 잡느냐에 따라 분산과 편위의 상반관계가 나타날 수 있다. 즉, 임계치를 너무 낮게 잡으면 극단치 데이터의 수가 많아져서 추정치의 분산은 작아지지만 분포의 점근성이 떨어져서 편위가 커지게 되고 반면에 임계치를 너무 높게 잡으면 그 반대의 현상이 나타날 수 있다.

일반적으로 임계치를 잡는 방법에는 여러 가지 방법들이 있으나 본 논문에서는 대표적으로 많이 이용하는 ME플롯(mean excess plot) 방식과 Hill플롯 방식을 사용하기로 한다. 먼저 ME플롯 방식은 평균초과함수(mean excess function)의 그래프를 이용하는 방법이다. 평균초과함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} e_X(u) &= E(X - u | X > u) \\ &= \int_0^{x_F - u} x dF_u(x), \quad u < x_F \end{aligned} \quad (3.18)$$

그런데 $F_u(x)$ 가 GPD함수 $G_{\xi, \sigma_u}(x)$ 이면 평균초과함수는 $\xi < 1$ 일 때 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} e_X(u) &= \frac{\sigma_u}{1 - \xi} \\ &= \frac{\sigma + \xi u}{1 - \xi}, \quad \sigma + \xi u > 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

위의 식 (3.19)로부터 평균초과함수의 그래프는 u 에 관해서 선형임을 알 수 있다. 따라서 ME플롯 방식은 $\{(u, \hat{e}_X(u)) : x_{1:n} \leq u \leq x_{n:n}\}$ 으로 이루어진 플롯에서 u 의 값을 변화시킴에 따라 양의 기울기를 가진 직선형태의 영역이 시작되는 점을 임계값으로 정한다. 여기서 $\hat{e}_X(u)$ 는 평균초과함수의 표본추정치로서 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{e}_X(u) = \frac{1}{n_u} \sum_{i=1}^{n_u} y_i \quad (3.20)$$

다음으로 Hill플롯 방식은 $\{(k, H_{k,n}) : k = 2, \dots, n\}$ 으로 이루어진 플롯에서 k 의 값에 따라 변화시켜갈 때 $H_{k,n}$ 가 안정화되기 시작하는 값을 임계치 u 로 선택한다. 여기서 $H_{k,n}$ 은 Hill (1975)에 의해 제시된 형태모수 ξ 에 대한 추정치로서 다음과 같이 주어진다.

$$H_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln X_{i,n} - \ln X_{k,n}, \quad (3.21)$$

여기서 $X_{i,n}$ 은 n 개의 관찰치들을 크기에 따라 내림차순으로 배열하였을 때 i 번째에 위치한 관찰치를 의미한다. 즉, $X_{1,n} \geq X_{2,n} \geq \dots \geq X_{n,n}$ 이다.

이제 GPD와 추정된 모수들을 이용하여 자산수익률의 VaR와 ES를 구해보자. Balkema-de Haan-Pickands 정리로부터 임계치 u 가 x_F 에 충분히 가까우면 $F_u \sim G_{\xi, \sigma_u}(y)$ 가 된다. 이 결과를 식 (3.12)에 대입하고 $x = u + y$ 라 두면 $x > u$ 일 때 자산수익률분포의 꼬리부분은 근사적으로 다음과 같이 주어진다.

$$F(x) \approx (1 - F(u))G_{\xi, \sigma_u}(y) + F(u) \quad (3.22)$$

여기서 GPD함수에 내포된 모수 ξ, σ_u 에 대해 최우추정치 $\hat{\xi}, \hat{\sigma}_u$ 를 대입하고 $F(u)$ 의 추정치로 경험적분포함수 $\hat{F}(u) = 1 - n_u/n$ 를 적용하면 식 (3.22)에 주어진 $F(x)$ 는 다음과 같이 추정된다.

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{n_u}{n} \left(1 + \hat{\xi} \frac{x-u}{\hat{\sigma}_u} \right) \quad (3.23)$$

따라서 신뢰수준 p 에서 자산수익률의 VaR는 수익률 분포함수 $F(x)$ 의 $(1-p)$ 번째 분위수를 나타내므로 다음과 같이 추정된다.

$$\begin{aligned} \widehat{VaR}_p &= \hat{F}^{-1}(1-p) \\ &= u + \frac{\hat{\sigma}_u}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{n_u} p \right)^{\hat{\xi}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

한편, 식 (2.6)과 식 (3.18)로부터 ES는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$ES_p(X) = VaR_p(X) + e_X(VaR_p(X)) \quad (3.25)$$

그런데 임계치초과분포함수 $F_u(x)$ 가 근사적으로 GPD함수 $G_{\xi, \sigma_u}(x)$ 이면 식 (3.19)와 식 (3.24)로부터 ES는 다음과 같이 추정된다.

$$\begin{aligned} \widehat{ES}_p &= \widehat{VaR}_p + \frac{\hat{\sigma} + \hat{\xi}(\widehat{VaR}_p - u)}{1 - \hat{\xi}} \\ &= \frac{\widehat{VaR}_p}{1 - \hat{\xi}} + \frac{\hat{\sigma} - \hat{\xi}_u}{1 - \hat{\xi}} \\ &= u + \frac{\hat{\sigma}}{1 - \hat{\xi}} \left\{ 1 + \frac{1}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{n_u} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

4. VaR와 ES의 사후검증

본 논문에서 VaR의 사후검증은 Berkowitz와 O'Brien (2002)에서 제시한 방법을 사용하기로 한다. 이 방법은 초과빈도, 초과규모, 평균초과규모 등을 통해 상호 비교한다. 여기서 초과빈도란 검증기간동안 실제 금융자산의 손실액이 VaR 추정값을 초과

하는 회수를 말한다. 그리고 초과규모는 검증기간동안 발생한 실제 손실액과 VaR 추정값 간의 차이를 말하고 평균초과규모는 초과규모를 초과빈도로 나눈 값을 의미한다. 즉, 신뢰수준 p 에서 초과빈도, 초과규모 그리고 평균초과규모는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\text{초과빈도: } V_p^{freq} = \sum I_{\{X_{t+1} > \widehat{VaR}_{p,t}\}}, \quad (4.1)$$

$$\text{초과규모: } V_p^{size} = \sum (X_{t+1} - \widehat{VaR}_{p,t}) I_{\{X_{t+1} > \widehat{VaR}_{p,t}\}} \quad (4.2)$$

$$\text{평균초과규모: } V_p^{mean} = V_p^{size} / V_p^{freq}, \quad (4.3)$$

여기서 X_{t+1} : $t+1$ 시점의 실제 손실액, $\widehat{VaR}_{p,t}$ 는 t 시점에서 예측한 $t+1$ 시점의 신뢰수준 p 에서 VaR 추정값이다. 만일 VaR 추정값이 금융자산의 실제 손실위험에 잘 적합된다면 초과빈도는 목표실패율에 근접하게 발생할 것이고, 평균초과규모는 그다지 크지 않을 것으로 기대된다.

한편, 본 논문에서 ES의 사후검증은 Embrechts 등 (2005)에서 제시된 방법을 사용하기로 한다. 이 방법은 신뢰수준 p 에서 ES의 추정치 \widehat{ES}_p 에 대한 사후검증을 위해 다음과 같은 척도를 이용한다.

$$D_p^{(1)} = \frac{1}{N(K_p)} \sum_{t \in K_p} (X_{t+1} - \widehat{ES}_{p,t}), \quad (4.4)$$

여기서 K_p 는 신뢰수준 p 에서 실제 손실액 X_{t+1} 이 VaR의 추정값 $\widehat{VaR}_{p,t}$ 보다 큰 경우에 해당하는 시점들의 집합을 의미하고, $N(K_p)$ 는 집합 K_p 에 속하는 시점들의 개수를 나타낸다.

$D_p^{(1)}$ 은 ES의 예측값에 대한 사후검증을 위한 표준적인 척도로 사용될 수 있다. 그러나 이 척도의 단점은 $D_p^{(1)}$ 값이 VaR의 추정값에 따라 달라지므로 예측값의 정확도를 잘 반영한다고 볼 수 없다는 점이다. 이러한 단점을 보완하기 위해서 VaR의 추정값에 의존하지 않는 아래의 척도를 고려한다.

$$D_p^{(2)} = \frac{1}{N(Q_p)} \sum_{t \in Q_p} (X_{t+1} - \widehat{ES}_{p,t}), \quad (4.5)$$

여기서 Q_p 는 $X_{t+1} - \widehat{ES}_{p,t}$ 의 값이 이들 값들에 대한 p 번째의 분위수를 초과하는 경우에 해당하는 시점들의 집합을 나타내고, $N(Q_p)$ 는 집합 Q_p 에 속하는 시점들의 개수를 나타낸다.

본 논문에서는 ES에 대한 사후검증을 위한 척도로 위의 $D_p^{(1)}$ 과 $D_p^{(2)}$ 를 결합한 척도인 아래의 D_p 를 사용한다.

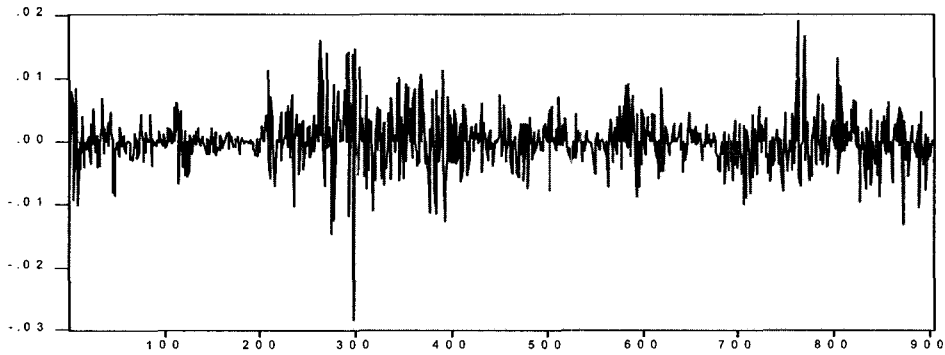
$$D_p = \frac{1}{2} \{|D_p^{(1)}| + |D_p^{(2)}|\}, \quad (4.6)$$

여기서 D_p 의 값이 0에 가까울수록 ES에 대한 좋은 추정을 의미한다.

5. 실증분석

5.1 기초통계량

IMF 외환위기와 같은 금융위기 상황하에서는 정량적인 위험회피보다는 유동성문제를 해결할 수 있는 생존전략이 우선시 되므로 본 연구에서는 일별 원/달러 환율의 변화율에 대해 분석기간을 IMF외환위기 이후 정상적 상황하에서 EVT모형이 전통적 방식인 RiskMetrics모형보다 우수한지를 살펴보고자 한다. 이를 위해 추정기간은 2000년 1월 1일부터 2000년 12월 31일까지로 하고 예측기간은 2001년 1월 1일부터 2002년 12월 31일까지로 하였다.



<그림 1> 일별 원/달러 환율의 변화율(2000년~2002년)

<그림 1>은 이들 추정기간 및 예측기간에서 일별 원/달러 환율변화율에 대한 시계열을 보여주고 있다. <그림 1>에서 음영으로 표시되지 않은 구간은 추정구간이고, 음영으로 표시된 구간은 예측구간을 나타낸다. <그림 1>을 통해 알 수 있듯이 추정기간 및 예측기간 사이에 ± 0.02 를 초과하는 극단적 사건은 거의 발생하지 않음을 알 수 있다. 그리고 <표 1>은 일별 원/달러 환율변화율에 대한 기초통계량을 보여주고 있다. 특히, <표 1>에서 외환시장의 변동성을 살펴보면 추정기간과 예측기간의 표준편차는 0.003, 0.004로 큰 폭의 변화가 없으며 외환변화율은 비대칭적이면서 두꺼운 꼬리분포를 가지고 있음을 알 수 있다. 즉, 조사기간내 원/달러 환율의 변화율이 정규분포를 충족시키지 못하는데 이는 정규성 검정을 위해 자주 사용하는 Jarque와 Berra (1987)에 의한 검정통계량의 p -값이 매우 작음을 통해서도 확인할 수 있다. 따라서 이 경우에 정규분포를 가정한 전통적 VaR모형인 RiskMetrics모형은 실제 위험량을 과소평가할 수 있다.

<표 1> 일별 원/달러 환율변화율의 기초통계량

기초통계량	전체기간	추정기간	예측기간
	2000/1/1-2002/12/31	2000/1/1-2000/12/31	2001/1/1-2002/12/31
평균	0.004%	0.036%	-0.011%
표준편차	0.004	0.003	0.004
왜도	0.012	0.381	-0.123
첨도	7.930	6.832	8.356
Jarque-Berra	914.536 (0.000)*	187.065 (0.000)*	741.680 (0.000)*

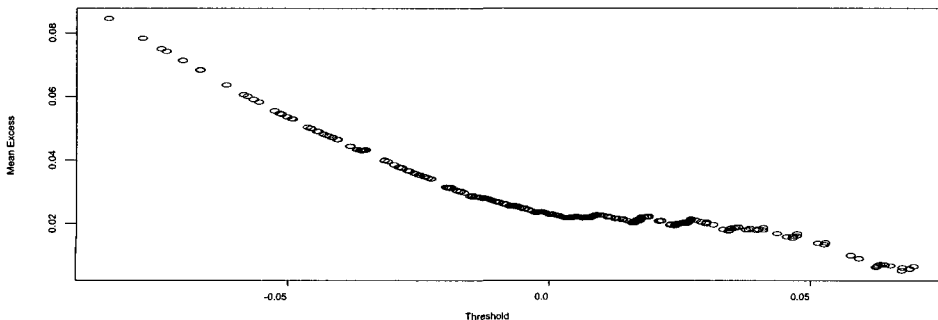
* 괄호안의 값은 검정통계량의 p값임.

5.2 GPD모형의 모수추정

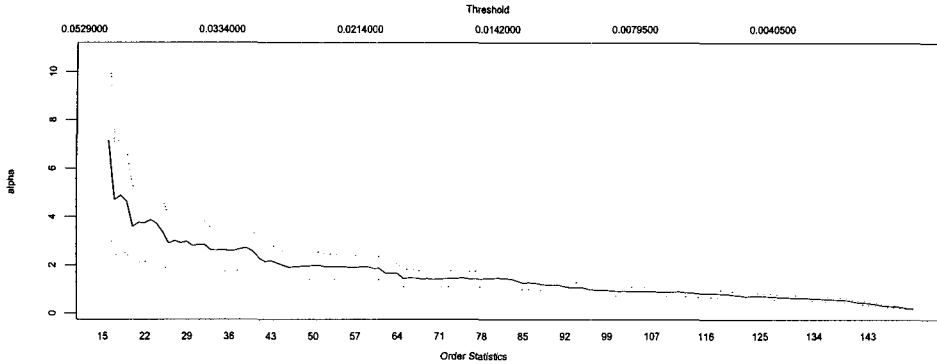
본 연구에서는 극단적인 원/달러 환율변화율을 극단치로 정의한 GPD모형을 적용하여 모수를 추정하고 이를 바탕으로 VaR와 ES를 산출하기로 한다. 그런데 GPD모형의 모수를 추정하기 위해서는 먼저 임계값을 선정해야 한다. 임계값을 선정하는 기준으로 흔히 사용하는 방법은 앞에서 언급한 바와 같이 ME플롯방식과 Hill 플롯방식 등이 있는데 본 연구에서는 ME 플롯방식과 Hill 플롯방식을 병행하여 사용하기로 한다.

예컨대 원/달러 환율변화율의 경우 2000년 1월 1일부터 2000년 12월 31일까지의 294개의 추정자료에 대해 오른쪽 꼬리부분에서 ME 플롯방식을 적용한 결과가 <그림 2>에 나와 있다. 그런데 ME플롯방식으로 임계값의 설정이 다소 모호하여 Hill플롯방식을 함께 적용한 결과가 <그림 3>에 나와 있다. 이들 두 그림으로부터 임계값이 0.0031일 때 꼬리지수의 값이 안정적이 됨을 보게 된다.

임계값 $u = 0.0031$ 을 선정한 후 이 값을 초과하는 관측치들의 수를 구하면 $n_u = 34$ 가 됨을 알 수 있고, 이를 바탕으로 GPD모형의 모수들 예컨대, 형태모수 ξ 와 척도 모수 σ_u 에 대한 최우추정치를 구하면 $\hat{\xi} = -0.13$, $\hat{\sigma}_u = 0.004$ 가 된다. 따라서 이들 결과를 바탕으로 GPD모형하에서 오른쪽 꼬리의 경우 신뢰수준 $p = 0.95$ 에서 VaR와ES의 추정값을 각각 구하면 식 (3.23)과 식 (3.25)로부터 $\widehat{VaR}_{0.95} = 0.0070$,



<그림 2> ME 플롯



<그림 3> Hill 플롯

$\widehat{ES}_{0.95} = 0.0096$ 을 얻는다. 왼쪽꼬리의 경우와 그 밖의 신뢰수준, 예컨대 $p = 0.99$, $p = 0.995$ 에 대한 VaR와 ES의 추정값들도 위에서의와 같이 구할 수 있는데 이들 추정값들에 대한 결과가 <표 2>와 <표 3>에서 사후검증 결과와 함께 각각 나와 있다.

5.3 VaR와 ES의 추정 및 사후검증 결과

RiskMetrics모형에 의해 산출한 VaR의 성과를 Berkowitz와 O'Brien (2002)의 방법에 의해 EVT모형에 의한 VaR의 성과와 비교 분석한 결과는 <표 2>와 같다.

<표 2>에서 실패율은 주어진 표본에서 VaR를 초과하는 손실이 발생하는 비율로서 Kupiec (1995)에 의한 방법으로 산출되었는데 먼저 신뢰수준이 95%에서 왼쪽 꼬리의 경우 EVT모형의 실패율은 6.462%이고, 오른쪽 꼬리의 경우 EVT모형의 실패율은 4.361%로 정규분포를 가정한 RiskMetrics모형에 의한 VaR보다 목표실패율 5%에 근접하고 있음을 볼 수 있다.

특히, 신뢰수준 99%에서 양쪽 꼬리 모두 목표실패율 1%에 근접하였으며, 신뢰수준 99.5%에서 오른쪽 꼬리의 경우도 목표실패율 0.05%에 근접하였다. 이에 반하여 RiskMetrics모형은 목표실패율에 근접하지 못함을 알 수 있다. 이는 정규분포를 가정한 RiskMetrics모형이 실제 위험량을 적절히 평가하지 못하고 있음을 의미한다.

이처럼 꼬리의 두터움을 반영한 EVT모형의 성과가 우수한 이유는 외환시장에서 발생하는 극단적인 사건들에 의해 나타나는 꼬리위험을 적절히 잘 반영할 수 있기 때문이다. 그러므로 VaR의 성과측면에서 볼 때 정규분포를 가정한 RiskMetrics모형은 실제 꼬리위험을 과소평가할 가능성이 있으며 금융시계열 자산이 두터운 꼬리분포의 특성을 가질 경우 이를 고려할 수 있는 EVT모형이 위험척도로 적합할 것으로 판단된다.

<표 2>의 VaR는 하위가법성(subadditivity)특성을 충족시키지 못하기 때문에 위험척도로서 일관적이지 못하고 꼬리위험을 과소평가하는 경향이 있다. 이러한 문제점을 극복하기 위해 VaR의 대안인 ES의 추정 결과를 Embrechts 등 (2005)에서 논의한 방법을 활용하여 살펴본 결과가 <표 3>에 나와 있다. 먼저 <표 2>와 <표 3>에서 ES와 VaR 값의 차이를 살펴보면 신뢰구간이 95%에서 왼쪽 꼬리 및 오른쪽 꼬리의 경우 VaR의

<표 2> VaR의 추정 및 사후검증

VaR모형	왼쪽 꼬리				오른쪽 꼬리			
	\widehat{VaR}_p	초과 빈도 (V_p^{freq})	평균 초과규모 (V_p^{mean})	실패율 (p값)	\widehat{VaR}_p	초과 빈도 (V_p^{freq})	평균 초과규모 (V_p^{mean})	실패율 (p값)
$p=0.95$								
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.94$)	0.0064	79	0.0029	12.762% (0.000)	0.0064	71	0.0027	11.470% (0.000)
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.97$)	0.0066	77	0.0031	12.439% (0.000)	0.0066	67	0.0029	10.823% (0.000)
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.99$)	0.0067	77	0.0032	12.439% (0.000)	0.0067	67	0.0030	10.823% (0.000)
EVT모형	0.0060	40	0.0020	6.462% (0.109)	0.0070	27	0.0020	4.361% (0.456)
$p=0.99$								
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.94$)	0.0096	33	0.0029	5.331% (0.000)	0.0091	30	0.0022	4.846% (0.000)
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.97$)	0.0094	37	0.0026	5.977% (0.000)	0.0094	29	0.0025	4.684% (0.000)
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.99$)	0.0096	32	0.0033	5.169% (0.000)	0.0096	27	0.0031	4.361% (0.000)
EVT모형	0.0110	9	0.0030	1.453% (0.287)	0.0110	6	0.0040	0.969% (0.938)
$p=0.995$								
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.94$)	0.0100	28	0.0024	4.529% (0.000)	0.0100	23	0.0018	3.715% (0.000)
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.97$)	0.0103	28	0.0025	4.523% (0.000)	0.0103	18	0.0026	2.907% (0.000)
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.99$)	0.0106	28	0.0028	4.523% (0.000)	0.0106	21	0.0028	3.392% (0.000)
EVT모형	0.013	7	0.003	1.113% (0.056)	0.129	3	0.005	0.484% (0.956)

평균값이 ES의 평균값보다 전반적으로 낮게 측정되고 있음을 알 수 있다. 그렇다면 EVT모형이 VaR 뿐만 아니라 ES에서도 우수함을 <표 3>을 통해 살펴보기로 한다.

<표 3>을 보면 $D_p^{(1)}$ 의 경우 EVT모형의 $D_p^{(1)}$ 값이 RiskMetrics모형보다 낮아 상대적으로 우수함을 알 수 있다. 그러나 VaR추정치에 영향을 받지 않는 성과지표인 $D_p^{(2)}$ 을 추가적으로 반영한 D_p 를 살펴보면 EVT모형은 다른 모형보다 낮은 D_p 를 보여 ES성과

가 다른 모형보다 우수함을 알 수 있다.

<표 3> ES의 추정 및 사후검증

포트폴리오 VaR모형	왼쪽 꼬리				오른쪽 꼬리			
	\widehat{ES}_p	$D_p^{(1)}$	$D_p^{(2)}$	D_p	\widehat{ES}_p	$D_p^{(1)}$	$D_p^{(2)}$	D_p
$p = 0.95$								
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.94$)	0.0079	-0.0039	0.0007	0.0023	0.0079	0.0045	-0.0007	0.0027
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.97$)	0.0082	-0.0041	0.0057	0.0023	0.0082	0.0056	-0.0007	0.0032
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.99$)	0.0084	-0.0045	0.00006	0.0023	0.0084	0.0056	0.0002	0.0032
EVT모형	0.0094	-0.00001	0.0025	0.0013	0.0096	0.00007	0.0002	0.0001
$p = 0.99$								
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.94$)	0.0085	-0.0047	0.0028	0.0037	0.0085	0.0070	0.0106	0.0088
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.97$)	0.0106	-0.0048	0.0024	0.0036	0.0106	0.0079	0.0121	0.0100
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.99$)	0.0109	-0.0051	0.0017	0.0034	0.0109	0.0077	0.0137	0.0107
EVT모형	0.0152	0.00025	-0.0023	0.0024	0.0135	0.0018	0.0019	0.0019
$p = 0.995$								
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.94$)	0.0112	-0.0051	0.0056	0.0053	0.0112	0.0082	0.0067	0.0074
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.97$)	0.0115	-0.0055	0.0047	0.0051	0.0115	0.0087	0.0070	0.0078
RiskMetrics모형 ($\lambda = 0.99$)	0.0118	-0.0045	0.0032	0.0038	0.0118	0.0086	0.0078	0.0082
EVT모형	0.0181	0.0026	-0.0022	0.0024	0.0150	0.0035	0.0016	0.0026

6. 요약 및 결론

기존의 선행연구에 의하면 대부분의 금융시계열은 정규분포보다 두터운 꼬리부분의 형태를 보이고 있다. 이 경우 꼬리의 두터움을 고려하지 못한 기존의 VaR모형은 위험도로서 적절하지 못할 가능성이 있다. 그래서 본 연구는 꼬리의 두터움을 고려할 수 있는 EVT모형이 기존 모형보다 높은 성과를 나타내는지 사후검증을 통해 살펴본 것이다. 주요한 실증분석결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 원/달러 외환변화율은 정규분포보다는 꼬리부분이 두터운 형태를 보인다. 이

경우 정규분포하에서 산출된 VaR는 실제 손실금액을 과소평가할 위험성이 있어 꼬리 부분의 두터움을 고려할 수 있는 모형의 도입이 필요함을 알 수 있다.

둘째, VaR의 성과를 살펴보면 신뢰수준 95%에서 왼쪽 꼬리의 경우 EVT모형의 실패율은 6.462%로 정규분포를 가정한 RiskMetrics모형에 의한 VaR보다 목표실패율 5%에 근접하고 있음을 볼 수 있다. 특히 신뢰수준 99%에서 EVT모형의 실패율은 왼쪽 꼬리의 경우 1.453%, 오른쪽 꼬리의 경우 0.969%로 목표실패율에 거의 근사하고 있음을 알 수 있다. 이처럼 꼬리의 두터움을 반영한 EVT모형의 성과가 우수한 이유는 외환시장의 꼬리 위험을 잘 반영할 수 있기 때문이다.

셋째, ES의 성과를 살펴보면 $D_p^{(1)}$ 의 경우 EVT모형의 $D_p^{(1)}$ 값이 RiskMetrics모형보다 낮아 상대적으로 우수함을 알 수 있다. 그러나 VaR추정치에 영향을 받지 않는 성과지표인 $D_p^{(2)}$ 을 반영한 D_p 을 살펴본 결과 EVT모형은 RiskMetrics모형보다 약간 높은 D_p 를 보였다.

결론적으로 꼬리의 두터움을 동시에 반영한 EVT모형하에서 VaR가 금융기관의 위험관리의 유용한 도구가 될 수 있음을 알 수 있었다. 비록 상대적으로 높은 성과를 보이지는 않지만 ES는 VaR함께 위험척도를 같이 사용할 때 보수적인 위험관리 차원에 부합될 것이다.

본 논문의 경우 한 개의 금융자산에 대해 단변량 EVT를 적용하여 VaR와 ES에 대한 추정 및 사후검증을 살펴보았는데 이를 여러 개의 금융자산으로 구성된 포트폴리오에 대해 적용하기 위해 다변량 EVT로 확장하는 것이 필요하다고 본다. 그런데 정규분포가 아닌 경우에 단변량 분포의 다변량 분포로의 확장은 다루기가 용이하지 않은 면이 있는데, 최근에 Joe(1997)와 Nelsen(1999)을 비롯하여 코플러(copula)를 이용한 다변량 분포에 대한 문헌이 많이 나오고 있음에 비추어 이를 잘 활용하면 의미 있는 연구 성과가 나올 것으로 기대된다.

감사의 글

본 논문의 심사와 편집을 위해 애써주신 심사위원들과 편집위원께 감사드립니다. 또한 본 논문의 실증분석을 위해 도움을 준 건국대학교 경영학과 문성주 박사에게도 고마움을 전합니다.

참고문헌

- [1] Artzner, P., Delbaen, J.M., Eber, J.M. and Heath, D. (1997). Thing coherently. *Risk*, Vol. 10, 68-71.
- [2] Artzner, P., Delbaen, J.M., Eber, J.M. and Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, Vol. 9, 203-228.
- [3] Balkema, A.A. and de Haan, L. (1974). Residual lifetime at great age. *Annals of Probability*, Vol. 2, 792-804.

- [4] Berkowitz, J. and O'Brien, J. (2002). How accurate are Value-at-Risk models at commercial banks? *Journal of Finance*, Vol. 57, 1093-1112.
- [5] Coles, S. (2001). *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer, London.
- [6] Danielsson, J. and de Vries, C.G. (1997a). Tail index and quantile estimation with very high frequency data. *Journal of Empirical Finance*, Vol. 4, 241-257.
- [7] Danielsson, J. and de Vries, C.G. (1997b). Value at Risk and extreme returns. In *Extremes and Integrated Risk Management* (ed. Embrechts, P.), 85-106. Risk Waters Group, London.
- [8] Duffie, D. and Pan, J. (1997). An overview of Value at Risk. *Journal of Derivatives*, Vol. 4, 7-49.
- [9] Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Mikosh, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin.
- [10] Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Straumann, D. (2002). Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls. In *Risk Management: Value at Risk and Beyond* (ed. Dempster, M.). 176-223, Cambridge University Press.
- [11] Embrechts, P., Kaufmann, R. and Patie, P. (2005). Strategic long-term financial risks: single risk factors, *Computational Optimization and Applications*, Vol. 32, 61-90.
- [12] Fisher, R.A. and Tippett, L.H.C. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 24, 180-190.
- [13] Gnedenko, B.V. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire. *Annals of Mathematics*, Vol. 44, 423-453.
- [14] Hosking, J.R.M. and Wallis, J.R. (1987). Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution. *Technometrics*, Vol. 29, 339-349.
- [15] Jarque, C.M. and Bera, A.K. (1987). A test for normality of observations and regression residuals. *International Statistical Review*, Vol. 55, 163-172.
- [16] Jenkinson, A.F. (1955). The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological events. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, Vol. 81, 158-172.
- [17] Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall, London.
- [18] Jorion, P. (2001). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 2nd edition. McGraw-Hill, New York.
- [19] Kupiec, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk management models. *Journal of Derivatives*, Vol.2, 73-84.

- [20] Longin, F.M. (1996). The asymptotic distribution of extreme stock market returns. *Journal of Business*, Vol. 69, 383-408.
- [21] Longin, F.M. (2000). From Value at Risk to stress testing: The extreme value approach. *The Journal of Banking and Finance*, Vol. 24, 1097-1130.
- [22] McNeil, A.J. and Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, Vol. 7, 271-300.
- [23] Nelson, R.B. (1999). *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.
- [24] Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *Annals of Statistics*, Vol. 3, 119-131.
- [25] Reiss, R.D. and Thomas, M. (2001). *Statistical Analysis of Extreme Values*, 2nd edition. Birkhauser Verlag, Basel.
- [26] von Mises, R. (1936). La distribution de la plus grande de n valeurs. *Rev. Math. Union Interbalcanique*, Vol. 1, 141-160. Reproduced in *Selected Papers of Richard von Mises*. *American Mathematical Society* (1964), Vol. 2, 271-294.

[Received May 2006, Accepted June 2006]