

# 선형 구조물의 능동 진동 제어를 위한 포화 제어기의 안정성

## Stability of Saturation Controllers for the Active Vibration Control of Linear Structures

임채욱<sup>1)</sup> · 문석준<sup>2)</sup> · 허영철<sup>3)</sup>

Lim, Chae-Wook · Moon, Seok-Jun · Huh, Young-Chul

**국문 요약 >>** 대형 구조물에 작용하는 큰 외력은 능동 제어 장치의 제어입력에 포화를 종종 유발한다. 그리고 구조물이 대형화될수록 질량, 강성 등의 파라미터들에 대한 정확한 값을 알기가 어려워지므로, 수학적 모델과 실제 구조물과의 모델링 오차는 파라미터들에 대한 불확실성으로 제어기의 설계 시에 고려되어야 한다. 그러므로 건축 및 토목 구조물에 대한 능동 진동 제어 방법을 다룰 때 제어기의 안정성을 보장하기 위하여 제어입력의 포화와 계의 파라미터 불확실성을 동시에 고려한 강인 포화 제어기의 설계가 필요하다. 여기에서는 건물의 능동 진동 제어에 연구 및 적용되어진 여러 제어기들 중에서 선형 최적 제어기 LQR, 수정된 뱅뱅 제어기, 포화 슬라이딩 모드 제어기, 강인 포화 제어기의 안정성을 살펴본다. 특히 제안된 강인 포화 제어기의 필요성을 보이기 위하여 LQR, 수정된 뱅뱅 제어기, 포화 슬라이딩 모드 제어기들이 제어입력의 포화나 파라미터 불확실성이 존재하는 경우에 불안정해지는 현상들을 보인다. 2자유도 진동 계에 대한 수치 예제와 능동 질량 감쇠기(AMD)를 이용한 2층 구조물에 대한 실험을 통하여 강인 포화 제어기의 강인 안정성을 보인다.

**주요어** 포화 제어기, 제어입력 포화, 파라미터 불확실성, 안정성

**ABSTRACT >>** Control input's saturation of active control devices for large structures under large external disturbances are often occurred. It is more difficult to obtain the exact values of mass and stiffness as structures are higher. The modelling errors between mathematical models and real structures must be also included as parameter uncertainties. Therefore, in active vibration control of civil engineering structures like buildings and bridges, the robust saturation controller design method considering both control input's saturation and parameter uncertainties of system is needed. In this paper, stabilities of linear optimal controller LQR, modified bang-bang controller, saturated sliding mode controller, and robust saturation controller among various controllers which have been studied and applied to active vibration control of buildings are investigated. Especially, unstable phenomena of the LQR, the modified bang-bang controller and the saturated sliding mode controller when the control input is saturated or parameter uncertainties exist are presented to show the necessity of the robust saturation controller. The robust stability of the robust saturation controller are shown through a numerical example of a 2DOF linear vibrating system and an experimental test of the two-story structure with an active mass damper (AMD).

**Key words** saturation controller, control input's saturation, parameter uncertainty, stability

## 1. 서론

건축 및 토목 구조물과 같은 대형 구조물은 구조물 자체의 큰 유연성 및 작은 감쇠비로 인해 과도한 진동이 쉽게 발생한다. 이런 과도한 진동을 억제하기 위하여 능동 진동 제

어 장치들이 광범위하게 적용되고 있다.<sup>(1-3)</sup> 기대치 않게 매우 큰 외란들은 제어 구동 장치의 최대 제어입력을 넘는 포화를 일으킬 수 있다. 또한 구조물이 대형화될수록 질량, 강성 등의 파라미터들의 정확한 값들을 알기가 어려우므로, 제어기의 설계 시에 가정한 수학적 모델과 실제 구조물과는 모델링 오차가 존재하게 된다. 이 오차는 파라미터 불확실성으로 제어기의 설계 시에 고려되어야 한다. 그러므로 대형 구조물의 제어에 있어서 제어입력의 포화와 파라미터 불확실성을 동시에 고려한 제어기의 설계는 실제적이며, 이들을 고려하지 않고 설계된 제어기를 제어입력의 포화나 파라미터 불확실성이 있는 불확실한 계에 적용할 때 안정성이

<sup>1)</sup> 한국자동차부품연구원  
<sup>2)</sup> 정회원·한국기계연구원  
(대표저자: sjmoon@kimm.re.kr)  
<sup>3)</sup> 정회원·한국기계연구원

본 논문에 대한 토의를 2007년 2월 28일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.

(논문접수일 : 2006. 9. 26 / 심사종료일 : 2006. 11. 27)

깨져 제어 대상 시스템을 불안정하게 할 수도 있다. 그러므로 건축 및 토목 구조물의 능동 진동 제어에 있어서 제어기의 제어입력 포화와 계의 파라미터 불확실성을 동시에 고려하는 강인 포화 제어 방법이 필요하다.

제어기 설계 시의 제어 목표에는 안정성과 제어 성능이 있다. 안정성과 제어 성능은 상충관계에 있기 때문에 제어기를 설계할 때에는 이들 제어 목표를 잘 절충하여야 한다. 일반적으로 제어기의 게인을 크게 할수록 제어 성능을 좋게 할 수 있으나 제어기가 불안정해질 수도 있으므로, 너무 큰 제어 게인의 사용은 제어기의 안정성을 보장하지 못하게 된다. 포화 제어기는 제어입력을 최대한 사용할 수 있으므로 제어입력의 포화가 발생하는 경우에 제어기의 안정성이 보장될 뿐만 아니라, 큰 제어 게인을 사용함으로써 인해 제어 성능 면에서 선형 제어기 보다 뛰어난 장점을 가진다. 그리고 강인 포화 제어기는 포화 제어기의 이런 장점뿐만 아니라 계의 파라미터 불확실성에 대한 안정성까지 보장할 수 있는 또 하나의 장점을 가진다.

건축 및 토목 구조물 자체의 안정성은 인명의 보호와도 밀접하게 연관되어 있으므로, 이들의 능동 진동 제어를 구현함에 있어서 제어기의 안정성은 더더욱 중요하다. 그러나 건축 및 토목의 실 구조물에 적용된 제어 방법은 주로 LQR(linear quadratic regulator),  $H_2/H_\infty$  제어, 직접 속도 피드백 제어 등 선형 제어 이론에 근거한 것으로<sup>(1)</sup>, 제어입력의 포화가 발생하는 경우에 페루프 제어기의 안정성을 보장하지 못한다. 공칭계에 대하여 제어입력의 포화가 발생하는 경우에 페루프 제어기의 안정성을 보장하기 위한 포화 제어 방법들이 제시되었는데, 이에겐 뱅뱅 제어(bang-bang control), 수정된 뱅뱅 제어(modified bang-bang control), BFC(bounded force control), LSC(linear saturation control) 등이 있다<sup>(4,12)</sup>. 또한 포화 제어의 파라미터 불확실성에 대한 강인 안정성을 설명하기 위하여 포화 슬라이딩 모드 제어(saturated sliding mode control<sup>(13,14)</sup>), 그리고 최근에는 저자들에 의하여 강인 포화 제어기(robust saturation controller<sup>(15-17)</sup>)가 제안되었다.

본 논문에서는 한 개의 제어입력을 가지는 계에 대한 LQR, 수정된 뱅뱅 제어기, 포화 슬라이딩 모드 제어기, 강인 포화 제어기의 설계 방법을 간단히 살펴보고, 이들 제어기들의 안정성을 수치 예제 및 실험을 통하여 살펴본다. 2자유도 진동계에 대한 수치 예제와 능동 질량 감쇠기(AMD; Active Mass Damper)가 설치된 2층 구조물에 대한 실험을 통해 이들 제어기들의 안정성과 불안정성을 확인 및 고찰한다. 특히, 이 수치 예제 및 실험에서는 LQR, 수정된 뱅뱅 제어기, 포화 슬라이딩 모드 제어기의 불안정한 현상을 보

인다. 그리고 최근에 새로이 제안된 강인 포화 제어기의 강인 안정성을 이들 제어기들의 불안정성과 비교함으로써, 건축 및 토목 구조물에 대한 강인 포화 제어기의 필요성을 직접적으로 보인다.

## 2. 선형 최적 제어기 LQR

먼저 식 (1)의 공칭 선형 시불변계에 대하여 선형 최적 제어기 LQR을 살펴보자.

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

여기서  $A_0$ 는  $n \times n$  크기의 공칭 시스템 행렬,  $B$ 는  $n \times 1$  크기의 제어입력 벡터,  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ 는  $n \times 1$  크기를 가지는 상태 벡터이고,  $u(t)$ 는 제어입력이다.

전통적인 LQR은 최적 제어 이론에 의하여 설계되어진다. 제어 목표는 다음의 성능지수를 최소화하는 최적의 제어입력을 구하는 것이다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)ru(t)]dt \quad (2)$$

여기서 가중행렬  $Q$ 는 음정이 대칭행렬이고,  $r$ 은 양의 값을 가지는 가중치이다.

이 성능 지수를 최소화하는 제어입력은 식 (3)과 같다.

$$u(t) = -r^{-1}B^T P_t x(t) \quad (3)$$

여기서  $P_t$ 는 양정대칭행렬이고, 식 (4)의 대수 Riccati 방정식의 해이다.<sup>(2,18)</sup>

$$A_0^T P_t + P_t A_0 - P_t B r^{-1} B^T P_t + Q = 0 \quad (4)$$

식 (3)으로 표현되는 LQR 제어기는 제어입력의 포화가 없는 선형 범위에서는 최적 입력이지만, 제어입력의 포화가 발생하는 경우에는 제어기의 안정성이 보장되지 않는다.

## 3. 수정된 뱅뱅 제어기

다음으로 식 (1)의 공칭 선형 시불변계에 대하여 Lyapunov 안정성 조건을 이용하여 설계되는 수정된 뱅뱅 제어기를 살펴보자. 수정된 뱅뱅 제어기는 공칭 시스템 행렬  $A_0$ 가 안정할 때 설계가 가능하고, 제어입력  $u(t)$ 의 최대값은  $u_{max}$ 로 식 (5)의 제한조건에 의해서 구속된다.

$$|u(t)| \leq u_{max} \quad (5)$$

계의 상태에 대한 2차 함수의 형태인 Lyapunov 함수를 고정된 하나의 값을 가지도록 식 (6)과 같이 정의한다.

$$V(x(t)) = x^T(x)P_n x(t) \tag{6}$$

여기서  $P_n$ 은 양정대칭행렬이다.

식 (7)의 제어기는 식 (5)의 제어입력 제한조건과 모든 초기치  $x_0$ 에 대하여  $V(x(t)) > 0$ 이고  $\dot{V}(x(t)) < 0$ 인 조건을 만족한다.

$$u(t) = -sat[\delta_n B^T P_n x(t)] \tag{7}$$

여기에서  $\delta_n > 0$ 이고, 행렬  $P_n$ 은 양정대칭인 가중행렬  $Q_n$ 을 도입하여 식 (8)의 Lyapunov 행렬 등식으로부터 쉽게 구할 수 있다. 그리고  $\delta_n$ 은 이론적으로 무한한 값을 가질 수 있으나, 실제 사용 시에는 상태 공간의 원점 근처에서 제어 채터링(control chattering)이 생기지 않게 유한한 값을 사용한다.

$$A_0^T P_n + P_n A_0 + Q_n = 0 \tag{8}$$

실제 식 (5)의 제어입력 제한조건 하에서 식 (6)의 Lyapunov 함수를 최소화하는 제어기는 사각파의 제어입력 파형을 가지는 뱅뱅 제어기이다. 식 (7)의 수정된 뱅뱅 제어기는 이 뱅뱅 제어기의 제어 채터링(chattering) 문제점을 극복하기 위하여 뱅뱅 제어기의 부호 함수 대신에 포화 함수를 사용한 것이다. 부호 함수의 제어입력에서 발생하는 제어 채터링을 극복하기 위하여 이를 포화 함수로 대체하는 방법은 가장 전형적인 방법으로, 이 방법 외에도 제어입력의 파형을 다항식으로 근사화하는 방법<sup>(5)</sup>과 쌍곡탄젠트 함수 형태로 근사화하는 방법<sup>(6)</sup> 등이 있다. 수정된 뱅뱅 제어기 (7)은 공칭계에 대하여 제어입력의 포화가 발생하는 경우에 페루프 제어기의 안정성을 보장하지만, 파라미터 불확실성이 있는 불확실한 계에 대한 페루프 제어기의 안정성을 보장하지는 못한다.

#### 4. 포화 슬라이딩 모드 제어기

다음으로 식 (1)의 공칭 선형 시불변계에 대한 포화 슬라이딩 모드 제어기를 살펴보자. 포화 슬라이딩 모드 제어기에서는 제어입력  $u(t)$ 의 최대값은  $u_{max}$ 로 식 (5)의 제한 조건에 의해서 구속된다. 일반적인 제어입력의 포화를 고려하지 않은 슬라이딩 모드 제어기는 공칭 시스템 행렬  $A_0$ 가 불안정한 경우에도 설계가 가능하지만, 제어입력에 포화가 발

생하는 경우인 포화 슬라이딩 모드 제어기는 공칭 시스템 행렬  $A_0$ 가 안정할 때 안정성 보장된다. 포화 슬라이딩 모드 제어기는 슬라이딩 모드 제어방법에 기초한 것으로, 슬라이딩 모드 제어기는 계의 상태 궤도를 슬라이딩 면으로 유도하는 제어기 설계방법으로, 슬라이딩 면 위에서의 거동은 안정하게 설계해야 한다. 슬라이딩 면  $S=0$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$S = P_s x(t) = 0 \tag{9}$$

여기서  $P_s$ 는  $1 \times n$  크기의 행렬로 슬라이딩 면 위에서의 거동이 안정하도록 결정되어야 한다. 행렬  $P_s$ 를 결정하는데 극점 배치, LQR 등 여러 방법들이 있을 수 있는데, 여기에서는 LQR에 의한 방법을 고려한다.<sup>(13,14)</sup> LQR에 의한 방법에서는 행렬  $P_s$ 는 다음의 성능지수  $J$ 를 최소화함으로 얻어진다.

$$J = \int_0^\infty x^T(t) Q_s x(t) dt \tag{10}$$

여기서  $Q_s$ 는  $n \times n$  크기의 양정 행렬이다.

제어기는 상태 궤도가 슬라이딩 면  $S=0$ 으로 유도하도록 설계되어 진다. 이 목적을 위해서 다음의 Lyapunov 함수를 고려한다.

$$V_s(x(t)) = \frac{1}{2} S^T S = \frac{1}{2} x^T(t) P_s^T P_s x(t) \tag{11}$$

시간  $t$ 가  $\infty$ 로 갈 때 슬라이딩 모드  $S=0$ 이 발생하기 위한 충분조건은  $\dot{V}_s(x(t)) = S^T \dot{S} \leq 0$ 이다. 식 (12)의 제어기는 식 (5)의 제어입력 제한조건과 모든 초기치  $x_0$ 에 대하여 이 충분조건을 만족한다.

$$u(t) = -sat[(\alpha_s (P_s B)^{-1} P_s A_0 + \delta_s B^T P_s^T P_s) x(t)] \tag{12}$$

여기서  $0 \leq \alpha_s \leq 1$ 이고 슬라이딩 여유(sliding margin)  $\delta_s > 0$ 이다.

포화 슬라이딩 모드 제어기는 슬라이딩 모드 제어에 기초를 두어 설계를 하는 것이므로 계의 파라미터 불확실성에 대해서 강인한 특성을 가진다. 그러나 엄밀히 말하면 슬라이딩 모드 제어 방법은 크게 접근 모드(reaching mode)와 슬라이딩 모드(sliding mode)로 나눌 수 있는데, 계의 파라미터 불확실성에 대한 강인한 특성은 계의 상태가 슬라이딩 모드에서 움직일 때만 보장되는 것이므로, 계의 응답의 전체 구간에서의 강인성을 해석적으로 보장하지 못한다. 특히 제어입력에 포화가 발생하는 경우 계의 응답이 슬라이딩 모

드에 빨리 이르지 못하므로 파라미터 불확실성에 대한 강인성을 보장하기 어렵게 된다.

## 5. 강인 포화 제어기

다음으로 불확실한 선형 시불변계에 대하여 여러 Lyapunov 강인 안정성 중 유사 이차 안정성(affine quadratic stability)의 정의<sup>(19)</sup>와 멀티 블록볼(multi-convexity)의 개념을 이용하여 설계되어진 강인 포화 제어기를 살펴보자. 여기에서는 불확실한 선형 시불변계를 식 (13)과 같이 시불변 불확실성 파라미터들에 대하여 의존하는 형태로 표현한다.

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (13)$$

여기서  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in R^k$ 는 시불변 불확실성 파라미터들의 벡터로 각각의 파라미터들  $\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i]$ 는 각각의 끝점값들 사이에 있고,  $A(\theta)$ 는  $n \times n$  크기의 안정한 불확실한 시불변 시스템 행렬이고, 제어입력  $u(t)$ 의 최대값은  $u_{\max}$ 로 식 (5)의 제한조건에 의해서 구속된다.

불확실한 시스템 행렬  $A(\theta)$ 는 식 (14)와 같이 불확실한 파라미터들에 대하여 의존하는 형태로 표현된 구조적 파라미터 불확실성을 갖는 시스템이다.

$$A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \dots + \theta_k A_k \quad (14)$$

여기서  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$ 는 고정된 값으로 이미 알고 있는 행렬들이다.

Lyapunov 함수를 정의함에 있어서도 불확실한 시스템 행렬  $A(\theta)$ 와 같이 불확실한 파라미터들에 대하여 의존하는 형태로 표현한다.

$$V(x(t), \theta) = x^T(t)P(\theta)x(t) \quad (15)$$

$$P(\theta) = P_0 + \theta_1 P_1 + \theta_2 P_2 + \dots + \theta_k P_k \quad (16)$$

식 (13)의 시불변 불확실성을 가지는 선형계가 식 (5)의 제어입력 제한조건 하에서 모든 가능한 불확실한 파라미터들의 상하한 내에서와 모든 초기치  $x_0$ 에 대하여  $V(x(t), \theta) > 0$ 이고  $dV(x(t), \theta)/dt < 0$ 을 만족하는 식 (15)로 정의되는 Lyapunov 함수와 제어입력  $u(t)$ 가 존재하면 계의 강인 안정성은 보장되는데, 식 (17)과 같이 제안된 강인 포화 제어기는 이를 만족한다.

$$u(t) = -\text{sat}[\delta B^T P_0 x(t)] \quad (17)$$

여기에서  $k+1$  개의 대칭행렬  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$ 와 양정대칭

행렬  $M_a$ 는 다음의 식 (18)~(20)의  $2^{k+1} + k$  개의 LMI (linear matrix inequality) 조건을 만족하고,  $\delta > 0$ 는 이에서 구해진  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$ 와  $M_a$ 에 대하여 식 (21)을 만족한다.

$$A(\omega)^T P(\omega) + P(\omega) A(\omega) + M_a < 0 \quad \text{for all } \omega \in \Theta \quad (18)$$

$$P(\omega) > 0 \quad \text{for all } \omega \in \Theta \quad (19)$$

$$A_i^T P_i + P_i A_i \geq 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, k \quad (20)$$

$$M_a + \delta \left\{ 2P_0 B B^T P_0 + \sum_{i=1}^k \theta_i (P_0 B B^T P_0 + P_i B B^T P_0) \right\} > 0 \quad \text{for all } \omega \in \Theta \quad (21)$$

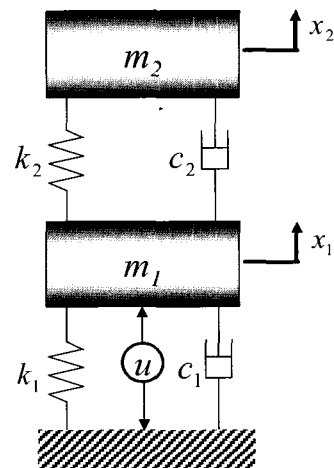
식 (18)~(20)을 만족하는 해는 상용 프로그램인 MATLAB<sup>®</sup>에서 제공하는 LMI control toolbox<sup>(20)</sup>를 사용하여 쉽게 구할 수 있다.  $M_a$ 는 제어기 설계 파라미터이고, 불확실한 계에 대하여 식 (21)을 만족하는  $\delta$ 의 최대치( $\delta_{\max}$ )는 유한한 값이고,  $\Theta$ 는 다음의 식 (22)의 불확실성 파라미터 상자의  $2^k$  개의 정점들의 집합이다.

$$\Theta := \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) : \omega_i \in \{\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i\}\} \quad (22)$$

식 (17)의 강인 포화 제어기는 식 (7)의 수정된 뱀뱀 제어를 불확실한 계로 확장한 것으로, 불확실한 파라미터의 상하한을 설계 시에 고려하였으므로 고려된 파라미터 불확실성 상하한 내에서 강인 안정성이 항상 보장된다.

## 6. 수치 예제

여기에서는 LQR 제어기, 포화 슬라이딩 모드 제어기, 제안된 강인 포화 제어기의 안정성을 수치 예제를 통하여 살펴본다. 수치 예제는 그림 1과 같이 2자유도 진동계에 하나의 구동기가 있는 경우를 고려한다. 공칭계의 질량  $m_1 = m_2 = 1\text{kg}$ ,



〈그림 1〉 2DOF vibrating system with one actuator.

강성  $k_1 = k_2 = 1N/m$ , 감쇠  $c_1 = c_2 = 0.01Ns/m$ 이다. 각 강성에 불확실성  $\theta_i (i=1,2)$ 이 있는 경우를 고려하면 불확실성을 가지는 강성은  $k_1(1+\theta_1)$ ,  $k_2(1+\theta_2)$ 로 둘 수 있고, 계의 운동 방정식은 (13)과 같다. 여기서 상태 벡터  $x = [x_1 x_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2]^T$ ,  $A(\theta)$ 는 식 (23)과 같고, 제어입력 벡터  $B = [001/m_1 0]^T$ 이다.

$$A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 \tag{23}$$

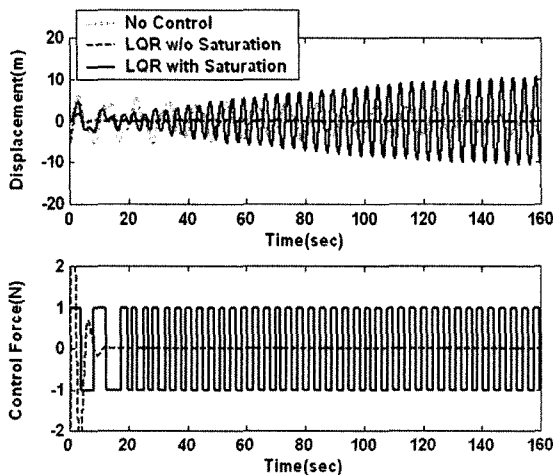
여기서

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c_1+c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

최대 제어입력  $u_{\max} = 1N$ , 초기 상태  $x_0 = [0006]^T$ 인 경우를 고려하고, 불확실성을 가지는 강성은 각각  $k_1(1-\theta_s)$ ,  $k_2(1+\theta_s)$ 인 경우에 대하여 살펴본다.

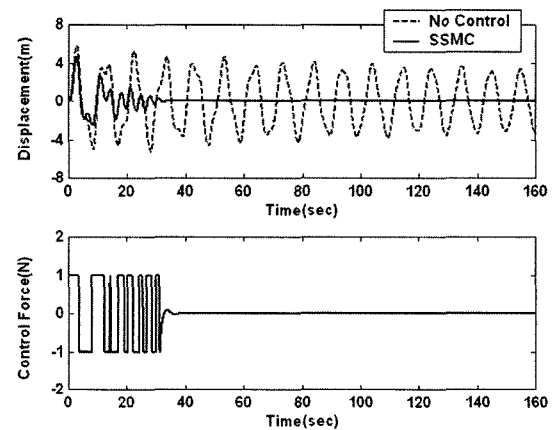
먼저, 공칭계에서 제어입력의 포화를 고려하지 않고 설계된 최적 선형 제어기인 LQR을 고려해 보자. LQR에서는 제어기 설계 파라미터인 가중행렬들을 설계해야 하는데,  $Q_i = \text{diag}(1,1,0,0)$ ,  $r = 1e-4$ 으로 두었다. 설계된 제어기의 폐루프계의 극점들은  $-7.0002 \pm 7.1416j$ ,  $-0.4552 \pm 1.0986j$ 로 제어입력의 포화가 생기지 않는 경우, 즉 제어입력의 선형 구간에서는 그림 2에서 보이는 바와 같이 항상 안정하고 제어성능이 매우 좋음을 알 수 있다. 그러나 이 안정한 선형 제어기가 제어입력에서 포화가 생기면 그림 2에서 보이는 바와 같이 불안정해진다. 제어입력에 포화가 생길 때 바람직하지 못한 제어입력이 계의 2차 모드를 가진하여 불안정



<그림 2> Displacements and control forces for nominal system applying the LQR.

지는 현상을 그림 2에서 확인할 수 있다. 그림 2는  $m_1$ 의 변위들과 제어력의 파형들을 비교하여 보여주고 있다.

다음으로 포화 슬라이딩 모드 제어기(SSMC)의 강인 안정성을 살펴보자. 가중행렬  $Q_s = \text{diag}(10,10,1,1)$ 에 대하여 설계된 슬라이딩 면  $S = 4.0301x_1 + 0.4421x_2 + 1.0\dot{x}_1 + 3.2481\dot{x}_2 = 0$ 이다. 제어기는  $\delta_s = 10$ ,  $\alpha_s = 1$ 에 대하여 설계되었다. 설계된 포화 슬라이딩 모드 제어기는 그림 3에서와 같이 공칭계에서 제어입력에 포화가 발생하는 경우에도 제어기의 안정성은 해석적으로 보장된다. 그림 3은 공칭계에서의 변위( $x_1$ )들과 제어력 파형을 보여 주고 있다. 그러나 이 포화 슬라이딩 모드 제어기는 파라미터의 불확실성  $\theta_s$ 가 0.2보다 커지면 불안정해 짐을 확인할 수 있었다. 포화 슬라이딩 모드 제어기는 슬라이딩 모드 제어기의 설계 방법에 기초를 둔 것으로, 공칭계에 대하여 제어기를 설계하고 계의 파라미터 불확실성에 대한 강인한 특성은 슬라이딩 모드 제어의 강인 특성을 이용하여 설명된다. 그러므로 강인 안정성이 보장되는 파라미터 불확실성의 상하한을 해석적으로 규정할 수 없다. 그리고 계의 파라미터 불확실성에 대한 강인한 특성은 계가 슬라이딩 모드에서 움직일 때만 보장되는 것이므로, 계의 응답의 전체 구간에서의 강인 안정성을 해석적으로 보장하지 못한다. 그림 4는  $\theta_s = 0.2$ 인 경우에 대하여 포화 슬라이딩 모드 제어기와 슬라이딩 모드 제어기에 의한 변위( $x_1$ )들과 제어력 파형들을 비교하여 보여 주고 있다. 포화 슬라이딩 모드 제어기의 경우 파라미터 불확실성이 존재할 때 바람직하지 못한 제어입력이 오히려 계의 2차 모드를 가진하여 계를 불안정하게 함을 보여주고 있다. 제어입력의 포화를 고려하지 않은 슬라이딩 모드 제어기는 이 경우에 강인 안정성이 보장됨을 확인할 수 있는데, 이는 포화되지 않는 큰 제어입력을 사용함으로 계의 응답을 슬라이딩 모드에

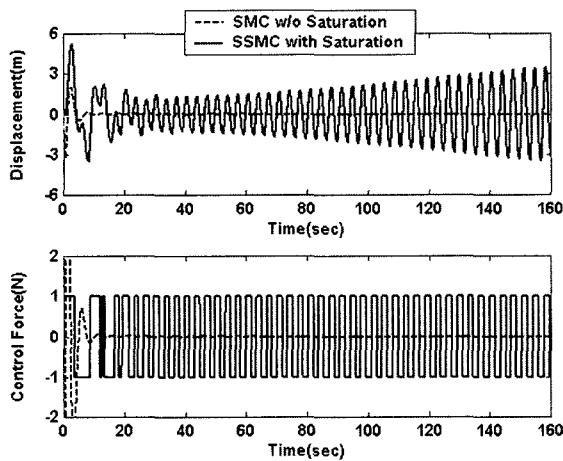


<그림 3> Displacement and control force for nominal system applying the saturated sliding mode controller.

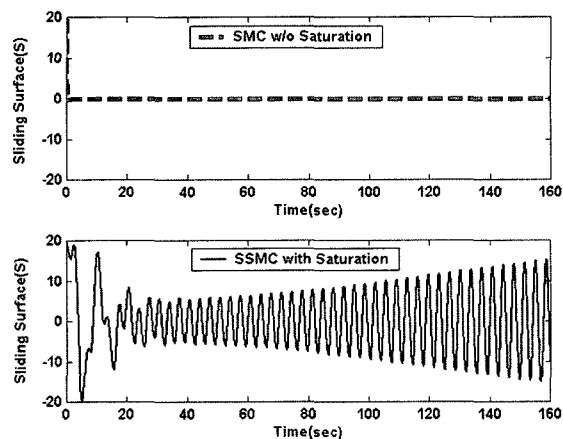
빨리 이르게 하기 때문이다(그림 5 참조). 그림 5는  $\theta_s = 0.2$ 인 경우에 대하여 포화 슬라이딩 모드 제어기와 슬라이딩 모드 제어기에 의한 슬라이딩 면을 비교하여 보여주고 있다. 그림 5를 통하여 포화 슬라이딩 모드 제어기의 강인 안정성이 보장되지 못하는 이유를 설명할 수 있다. 제어입력에 포화가 생기면 계의 응답이 슬라이딩 모드에 빨리 이르지 못함으로 파라미터 불확실성이 존재하는 경우에 강인 안정성이 보장되지 않는 것이다.

다음으로 제안된 강인 포화 제어기(RSC)를 살펴보자. 강인 포화 제어기의 유용성을 입증하기 위하여 각 강성의 불확실성의 상하한  $|\theta_i| \leq 0.9 (i = 1, 2)$ 로 두고 제어기를 설계하였다. 제어기 설계 파라미터  $M_o = 5e - 4diag(1, 1, 1)$ 로 두었을 때  $\delta$ 의 최대치  $\delta_{max} = 6.84e - 2$ 로 구해졌다. (17)의 강인 포화 제어기의 적용 시에  $\delta = 6.84e - 2$ 로 두고 수치실험을 수행하였다. 그림 6은 공칭계에서, 그림 7은  $\theta_s = 0.2$ 인

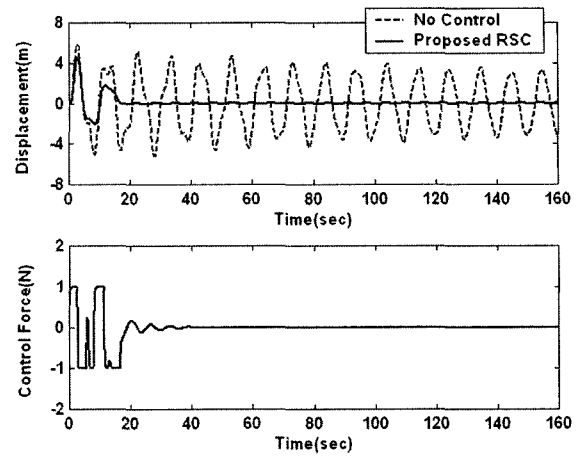
불확실한 계에서, 그리고 그림 8은  $\theta_s = 0.9$ 인 불확실한 계에서의 변위( $x_1$ )들과 제어입력 파형들을 각각 보여 주고 있



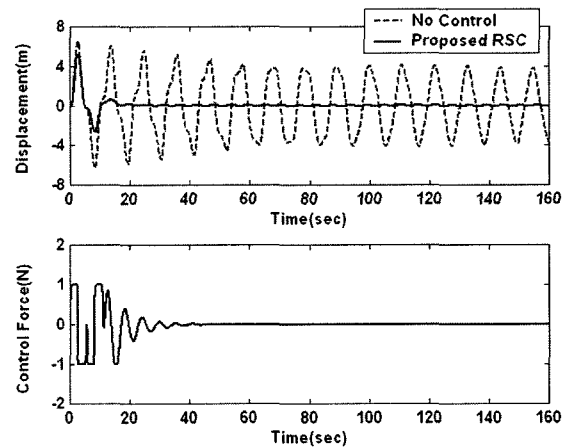
〈그림 4〉 Displacements and control forces for uncertain system ( $\theta_s = 0.2$ ) : sliding mode controller and saturated sliding mode controller.



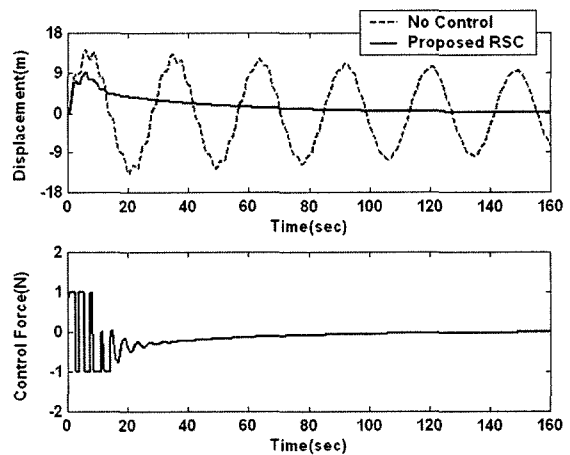
〈그림 5〉 Sliding surfaces for uncertain system ( $\theta_s = 0.2$ ) : sliding mode controller and saturated sliding mode controller.



〈그림 6〉 Displacement and control force for nominal system applying the proposed robust saturation controller.



〈그림 7〉 Displacement and control force for uncertain system ( $\theta_s = 0.2$ ) applying the proposed robust saturation controller.



〈그림 8〉 Displacement and control force for uncertain system ( $\theta_s = 0.9$ ) applying the proposed robust saturation controller.

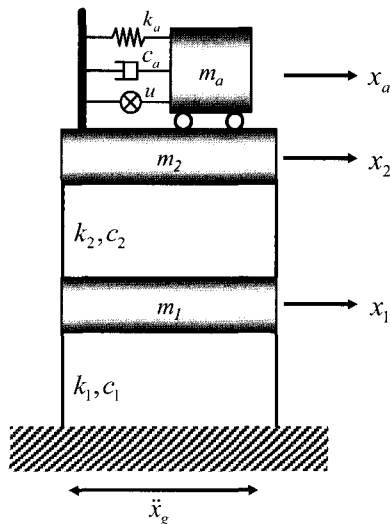
다. 제안된 강인 포화 제어기는 설계 시에 고려된 파라미터 불확실성의 상하한 내에서는 계의 응답의 전체 구간에서 강인 안정성이 해석적으로 보장되는데, 위의 수치실험 결과들은 이를 입증하는 것이다.

### 7. 실험적 검증

여기에서는 수정된 뱅뱅 제어기와 제안된 강인 포화 제어기의 안정성을 실험을 통하여 검증한다. 시험 구조물은 2층의 구조물로서, 각 층은 후판 구조물(가로×세로×높이=1.2m×0.8m×0.05m, 중량 376.8kg)로 4기둥으로 지지되어 있고, 각 기둥의 높이는 0.6m이다. 그림 9와 같이 2층의 시험 구조물의 최상층에 유압식 능동질량감쇠기(AMD)를 설치하였다. 공칭계에서의 시험 구조물과 AMD의 각 파라미터들의 값은 다음과 같다. 시험 구조물의 질량  $m_1=376.8\text{kg}$ ,  $m_2=440.8\text{kg}$ , 강성  $k_1=1906.3\text{kN/m}$ ,  $k_2=1906.3\text{kN/m}$ , 감쇠  $c_1=600\text{Ns/m}$ ,  $c_2=10\text{Ns/m}$ , AMD의 질량  $m_a=10\text{kg}$ , 강성  $k_a=511.64\text{kN/m}$ , 감쇠  $c_a=800\text{Ns/m}$ 이다. 시험 구조물의 총 질량은 817.6kg이고, 가동 질량이 10kg이므로 시험 구조물의 총 질량에 대한 가동 질량의 질량비는 약 1.2%에 해당한다. 계의 불확실성은 시험 구조물의 각 층의 강성에 불확실성이 있는 경우를 고려하였다. 불확실성을 가지는 강성을 각각  $k_1(1+\theta_1)$ ,  $k_2(1+\theta_2)$ 로 두면, 계의 운동 방정식은 식 (24)와 같다.

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + BV_{in}(t) + E\ddot{x}_g \quad (24)$$

여기서  $x = [x_1, x_2, x_a, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_a]^T$ 로  $x_i (i=1,2)$ 는 지반에 대한 각층의 상대변위,  $x_a$ 는 지반에 대한 가동 질량의 상대변위이다.  $V_{in}$ 은 제어입력 전압,  $E$ 는 가진입력 벡터,  $\ddot{x}_g$ 는 지반



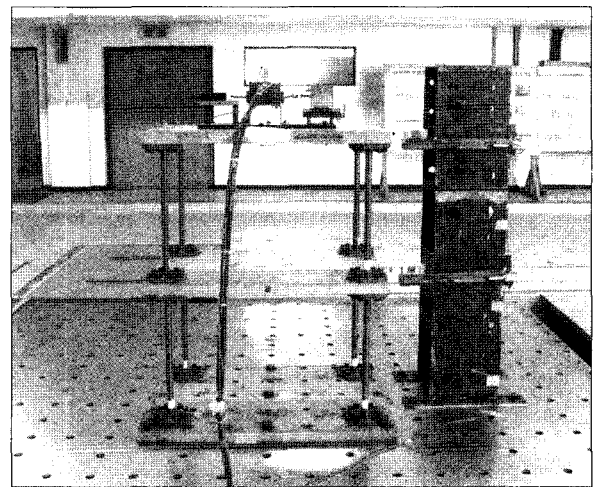
〈그림 9〉 Two-story test structure with an AMD.

가속도,  $A(\theta)$ 는 식 (23)과 같고 이 경우

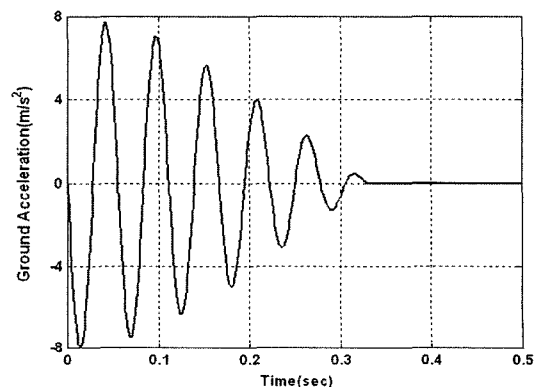
$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & -\frac{c_1+c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_a}{m_2} & \frac{k_a}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{c_2+c_a}{m_2} & \frac{c_a}{m_2} \\ 0 & \frac{k_a}{m_a} & -\frac{k_a}{m_a} & 0 & \frac{c_a}{m_a} & -\frac{c_a}{m_a} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

실험적 검증을 위하여 그림 10처럼 진동대에 제작된 시험 구조물의 하판을 고정하고, 진동대에 묘사된 지반 가속도 신호를 입력하여 시험 구조물을 가진하였다. 실험에 사용된 지반 가속도 입력은 그림 11을 고려하였는데, 이는 계의 초기 조건을 만들기 위한 것으로 약 0.33초 동안 계의 1차와 2차 모드를 동시에 가진하도록 하기 위함이다. 제어기의 샘플링 주파수는 1kHz로 설정하였다. 제어 알고리즘을 적용하기 위



〈그림 10〉 Experimental set-up



〈그림 11〉 Input ground acceleration

해서는 시스템의 상태 벡터(변위 및 속도)를 모두 측정해야 한다. 시험 구조물 1,2층과 AMD의 변위는 각 변위센서를 사용하여 측정하였고, 시험 구조물 1,2층과 AMD의 속도는 가속계를 사용하여 가속도의 신호를 적분하여 사용하였다. 시험 구조물의 강성의 불확실성의 상하한은  $\pm 20\%$ 인 경우를 고려하였다. 실험에서 시험 구조물의 강성의 변화를 위하여 기둥의 높이를 변화시켰다. 공칭계의 기둥의 높이는 600mm이다. 기둥의 높이를 565mm로 바꾸면 강성의 불확실성을 약  $+20\%$ (실험에서  $+19.8\%$ 임을 확인함)가 되고, 기둥의 높이를 645mm로 바꾸면 강성의 불확실성을 약  $-20\%$ (실험에서  $-19.4\%$ 임을 확인함)가 된다. 또한 최대 제어입력의 한계는  $|V_{in}| \leq 6V$ 로 두었고, 불확실성을 가지는 강성은 각각  $k_1(1-\theta_s)$ ,  $k_2(1+\theta_s)$ 인 경우에 대하여 살펴본다.

먼저, 공칭계에서는 제어입력의 포화를 고려하였으나 파라미터의 불확실성을 고려하지 않은 수정된 뱅뱅 제어기(MBBC)를 살펴보았다. Lyapunov 행렬 등식에서 가중행렬  $Q_m = \text{diag}(1e-3, 1e-3, 1e-3, 1e-3, 1e-3, 1e-3)$ 으로 설계하였다. 포화함수의 기울기는 좋은 제어 성능을 얻기 위하여 제어 채터링이 발생하지 않는 범위 내에서 큰 값을 사용하였다( $\delta_n = 3.3e7$ ). 그리고 강성의 불확실성  $\theta_s$ 가 대략 0.2보다 커지면 페루프계에 불안정한 극점이 존재하게 됨을 알 수 있었다. 공칭계( $\theta_s = 0$ )에서는 페루프계의 극점들은  $-4.5591e+1 \pm 2.2359e+1j$ ,  $-1.0831 \pm 4.5930e+1j$ ,  $-1.3627e+3$ ,  $-7.4742$ 로 모두 안정하였다. 이는 그림 12에서 보여주는 것과 같이 제어입력에 포화가 생기는 경우에도 앞의 수치예제에서 보인 LQR과는 달리 항상 안정성이 보장된다. 그러나  $\theta_s = 0.2$ 인 불확실한 계에서의 페루프계의 극점들은

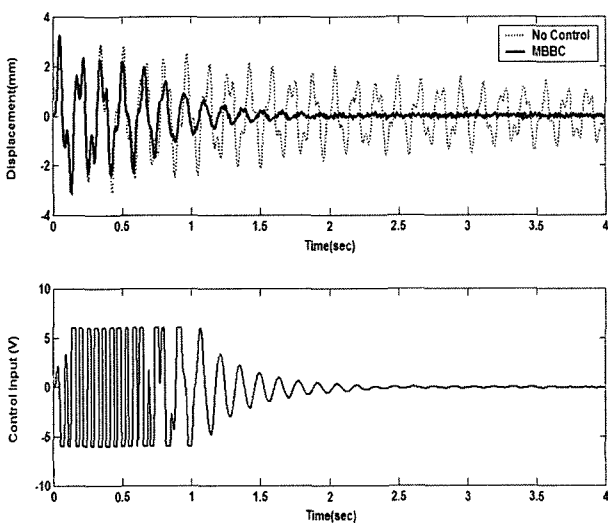
$+8.8369e-2 \pm 4.1592e1j$ ,  $-4.3717e1 \pm 2.4393e2j$ ,  $-1.3689e2$ ,  $-7.3893$ 로 불안정한 극점이 존재해서 제어기의 안정성은 보장되지 않는다. 그림 13은  $\theta_s = 0.2$ 인 경우의 시험 구조물의 변위( $x_2$ )와 제어입력 전압의 시간이력을 보여 주고 있는데, 불확실성이 존재할 때 바람직하지 못한 불안정 모드의 영향으로 제어입력이 오히려 계를 불안정 모드로 가진하여 계를 불안정하게 하는 현상(여기에서는 약  $\pm 0.8$  mm의 크기로 시험 구조물의 변위가 무한정 진동함)을 보이고 있다.

다음으로 제어입력의 포화와 파라미터의 불확실성을 모두 고려한 강인 포화 제어기(RSC)를 살펴보았다. 불확실성의 상하한  $|\theta_i| \leq 0.2 (i=1,2)$ 로 두고 제어기를 설계하였다. 식 (25)의 계의 강성행렬  $K_t$ 와 계의 질량행렬  $M_t$ 를 이용하여 제어기 설계 파라미터  $M_a = \text{diag}(K_t/2, M_t/2)$ 로 두었다.

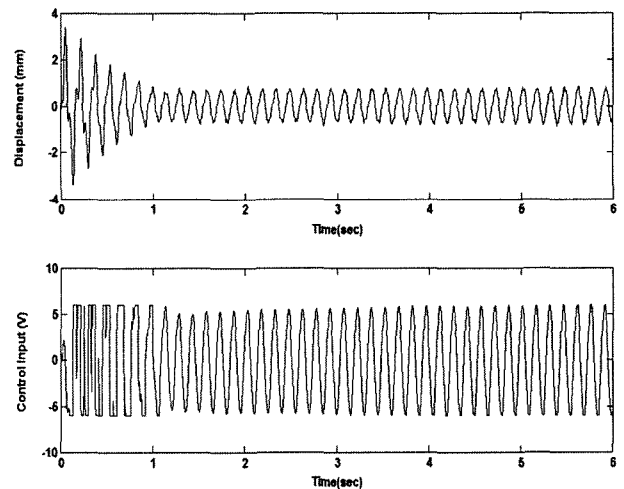
$$K_t = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_a & -k_a \\ 0 & -k_a & k_a \end{bmatrix}, M_t = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_a \end{bmatrix} \quad (25)$$

이때 계산되어진  $\delta_{\max} = 6.72e5$ 이었는데, 식 (17)의 제어기에서  $\delta = \delta_{\max}$ 로 두었다. 그림 14와 그림 15는 각각  $\theta_s = 0$ (공칭계)인 경우와  $\theta_s = 0.2$ 인 경우의 시험 구조물의 변위( $x_2$ )와 제어입력 전압의 시간이력을 보여 주고 있는데, 제어기의 설계 시에 고려된 파라미터 불확실성 내에서는 항상 강인 안정성이 보장됨을 확인할 수 있다.

$\theta_s = 0.2$ 인 불확실한 시스템에 대하여 수정된 뱅뱅 제어기의 불안정성과 강인 포화 제어기의 안정성을 Lyapunov 안정성 관점에서 살펴보면 다음과 같다. 그림 16과 그림 17은 각각 수정된 뱅뱅 제어기와 강인 포화 제어기를 적용했을 때

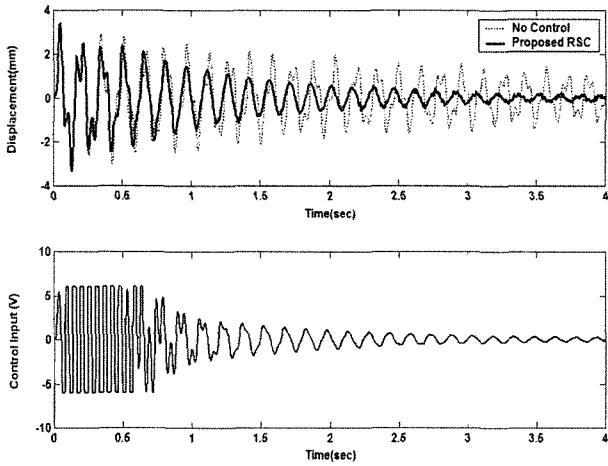


〈그림 12〉 Displacement of mass  $m_2$  and control input voltage for nominal system applying the modified bang-bang controller : Experimental result

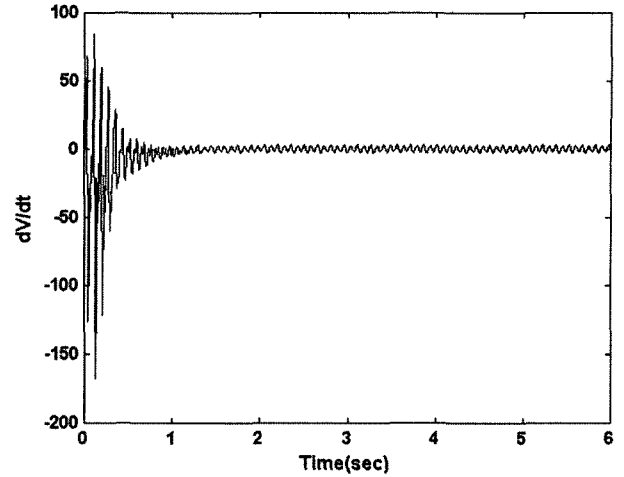


〈그림 13〉 Displacement of mass  $m_2$  and control input voltage for uncertain system ( $\theta_s = 0.2$ ) applying the modified bang-bang controller : Experimental results.

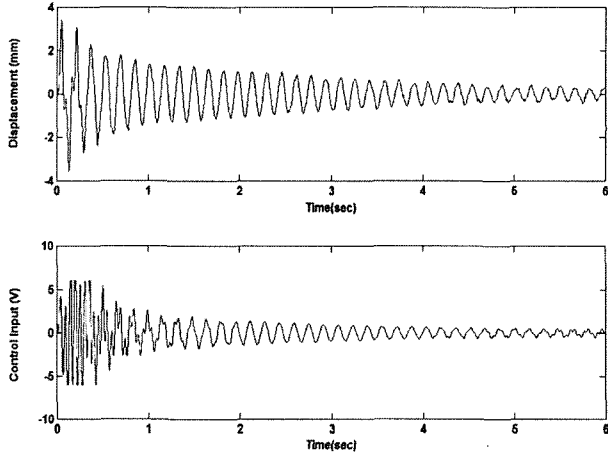




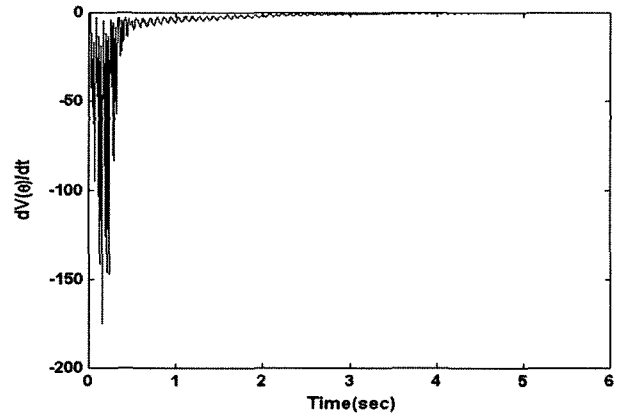
〈그림 14〉 Displacement of mass  $m_2$  and control input voltage for nominal system applying the proposed robust saturation control : Experimental results.



〈그림 16〉 Time derivative of Lyapunov function for uncertain system ( $\theta_s = 0.2$ ) applying the modified bang-bang controller : Experimental result.



〈그림 15〉 Displacement of mass  $m_2$  and control input voltage for uncertain system ( $\theta_s = 0.2$ ) applying the proposed robust saturation control : Experimental results.



〈그림 17〉 Time derivative of Lyapunov function for uncertain system ( $\theta_s = 0.2$ ) applying the proposed robust saturation controller : Experimental result.

Lyapunov 함수의 시간 미분치를 보여 주고 있다. 수정된 뱅뱅 제어를 적용한 경우 많은 시간에서 Lyapunov 함수의 시간 미분치가 0보다 큰 경우가 발생함으로 안정성이 보장되지 않음을 확인할 수 있다. 그림 13을 보면 약 1초 이전에는 제어입력이 시험 구조물의 진동을 제어하는 것처럼 보이나, 그림 16을 보면 해석적으로 이 제어입력은 안정성이 보장되지 않는 것임을 알 수 있다. 또한 약 1초 이후에는 불안정 모드로 가진하는 제어입력의 영향으로 Lyapunov 함수의 시간 미분치가 0으로 수렴하지 않고 0을 중심으로 계속 진동함으로 안정성이 보장되지 않음을 확인할 수 있다. 그러나 강인 포화 제어기를 적용한 경우 Lyapunov 함수의 시간 미분치가 항상 0보다 작아서 강인 안정성이 보장됨을 확인할 수 있다. 이는 고정된 Lyapunov 함수( $V(t) = x^T(t)P_n x(t)$ )를 사용

하는 수정된 뱅뱅 제어기와는 달리 강인 포화 제어기에서는 Lyapunov 함수( $V(\theta, t) = x^T(t)[P_0 - 0.2P_1 + 0.2P_2]x(t)$ )를 불확실한 파라미터에 의존하는 형태로 두기 때문이다.

## 8. 결론

본 논문에서는 건축 및 토목 구조물의 능동 진동 제어 적용 분야에서 강인 포화 제어기의 필요성을 살펴보았다. 이를 위해 2자유도 진동계에 대한 수치 예제와 능동 질량 감쇠기를 설치한 2층 구조물에 대한 실험을 통하여, 건물의 능동 진동 제어에 연구 및 적용된 네 개의 제어기들의 안정성 여부를 확인하였다.

최적 선형 제어 LQR은 제어입력의 포화가 발생하지 않는 선형 구간에서는 안정한 최적의 제어입력을 만들지만, 제어입력의 포화가 생기는 경우 공칭계에서도 불안정해질

수 있음을 보였다.

수정된 뱅뱅 제어기는 제어입력의 포화가 생기는 경우 공칭계에서는 항상 안정성이 보장되지만, 파라미터 불확실성이 존재하는 불확실한 계에서는 불안정해질 수 있음을 보였다.

포화 슬라이딩 모드 제어기는 제어입력의 포화가 생기는 경우 공칭계에서의 안정성뿐만 아니라 불확실한 계에서의 안정성도 어느 정도 보장되지만, 강인 안정성이 보장되는 파라미터 불확실성의 상하한을 제시할 수 없다. 또한 이 제어기는 제어입력의 포화가 없는 슬라이딩 모드 제어기보다 안정성이 보장되는 파라미터 불확실성의 상하한이 작다. 파라미터 불확실성이 존재하는 경우에 이 제어기의 불안정성과 한계를 보였다.

강인 포화 제어기는 제어입력의 포화와 파라미터 불확실성을 동시에 고려하여 설계되어지므로 강인 안정성이 보장되는 파라미터 불확실성의 상하한을 정할 수 있고, 고려된 파라미터 불확실성의 상하한 내에서 페루프 제어기의 강인 안정성이 보장됨을 보였다.

이의 결과들은 강인 포화 제어기는 건축 및 토목 구조물의 진동을 안정적으로 제어할 수 있음을 확연히 보여준다. 그러나 강인 포화 제어기의 실제적인 적용을 위해서는 관측기의 설계에 대한 연구가 아직 속제로 남아있다. 건축 및 토목 구조물의 능동 진동 제어에서는 변위와 속도를 측정하기 보다는 가속도를 측정하는 것이 실제적이다. 따라서 가속도 신호를 이용하여 구조물의 변위와 속도를 예측하는 관측기 설계를 포함한 다양한 포화 제어기에 대한 연구가 필요하다.

## 감사의 글

본 연구는 “중소형 선박용 MD-ARS 설계 기술 개발”과제 및 “두뇌한국 사업(Brain Korea 21)”의 지원으로 수행되었다.

## 참고 문헌

- Spencer, B.F. Jr. and Sain, M.K., “Controlling buildings : A new frontier in feedback,” *IEEE Control Systems Magazine on Emerging Technology*, Vol. 17, No. 6, 1997, pp. 19-35.
- Soong, T.T., *Active structural control : Theory and Practice*, Longman Scientific & Technical, 1990.
- Housner, G. W. et al., “Structural control : Past, present, and future,” *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 123, No. 9, 1997, pp. 922-923.
- Meirovitch, L., *Dynamics and control of structures*, Wiley, New York, 1990.
- Wu, Z. and Soong, T.T., “Modified bang-bang control law for structural control implementation,” *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 122, 1996, pp. 771-777.
- Cai, G.P., Huang, J.Z., Sun, F. and Wang, C., “Modified sliding-mode bang-bang control for seismically excited linear structures,” *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 29, 2000, pp. 1647-1657.
- Lim, C.W., Chung, T.Y. and Moon, S.J., “Adaptive bang-bang control for the vibration control of structures under earthquakes,” *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 32, No. 13, 2003, pp. 1977-1994.
- Collins, R., Basu, B. and Broderick, “Control strategy using bang-bang and minmax principle for FRF with ATMDs,” *Engineering Structures*, Vol. 28, No. 3, 2006, pp. 349-356.
- Indrawan, B., Kobori, T., Sakamoto, M., Koshika, N. and Ohri, S., “Experimental verification of bounded-force control method,” *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 25, No. 2, 1996, pp. 179-193.
- Mongkol, J., Bhartia, B. and Fujino, Y., “On Linear-Saturation (LS) control of buildings,” *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 25, 1996, pp. 1353-1371.
- Nguyen, T., Jabbari, F. and de Miguel, S., “Controller designs for seismic-excited buildings with bounded actuators,” *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 124, 1998, pp. 857-865.
- Kim, J.H. and Jabbari, F., “Actuator saturation and control design for building under seismic excitation,” *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 128, 2002, pp. 403-412.
- Yang, J.N., Wu, J.C. and Agrawal, A.K., “Sliding mode control for seismically linear structures,” *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.121, No.12, 1995, pp. 1386-1390.
- Yang, J.N., Wu, J.C. and Agrawal, A.K., “Sliding mode control for nonlinear and hysteretic structures,” *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 121, No. 12, 1995, pp. 1330-1339.
- Lim, C.W., Park, Y.J. and Moon, S.J., “Robust saturation controller for linear time-invariant system with structured real parameter uncertainties,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 296, No. 1-2, 2006, pp. 1-14.
- 임채욱, 문석준, 박영진, 박윤식, “강인 포화 제어기의 안정성에 관한 실험적 연구”, 한국소음진동공학회 논문집, 제16권 제2호, 2006, pp. 207-213.
- 임채욱, 문석준, 박영진, “AMD를 이용한 건물의 능동 진동 제어를 위한 강인 포화 제어기의 용요성에 관한 실험적 검증”, 한국지진공학회 논문집, 제10권 제2호, 2006, pp. 83-90.
- Dorato, P., Abdallah, C. and Cerone, V., *Linear Quadratic Control : an introduction*, Prentice Hall, Inc., 1995.
- Gahinet, P., Apkarian, P. and Chilali, M., “Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parameter uncertainty,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, No. 3, 1996, pp. 436-442.
- Gahinet, P. and Nemirovski, A., *The LMI control toolbox*, The MathWorks Inc., 1995.