

장단비 분포를 갖는 단섬유 복합재의 영계수 예측에 대한 연구 A Study on Prediction of Young's Modulus of Composite with Aspect Ratio Distribution of Short Fiber

이 재 곤
J. K. Lee

Key Words : Young's modulus(영계수), Short Fiber Reinforced Composite(단섬유 강화 복합재), Eshelby's Equivalent Inclusion Method(Eshelby의 등가 개재물법), Aspect Ratio Distribution(장단비 분포)

Abstract : Young's modulus of composite has been predicted by Eshelby's equivalent inclusion method modified with Mori-Tanaka's mean field theory, where short fibers of aspect ratio distribution are assumed to be aligned. Young's modulus of the composite is predicted with the smallest class interval for simulating the actual distribution of fiber aspect ratio, which is compared with that computed using different class intervals. Young's modulus of the composite predicted with mean aspect ratio or the largest class interval is overestimated by the maximum 10%. As the class interval of short fibers for predicting Young's modulus decreases, the predicted results show good agreements with those obtained using the actual distribution of fiber aspect ratio. It can be finally concluded from the study that if and only if the class interval of short fiber normalized by the maximum aspect ratio is smaller than 0.1, the predicted results are consistent with those obtained using the actual distribution of aspect ratio.

1. 서 론

단섬유 강화 복합재는 저렴한 제조 비용과 편리성으로 인해 사용이 증가되고 있다. 단섬유의 길이 분포(Fiber length distribution)와 방향분포(Orientation distribution)는 제조공정상 피할 수 없는 현상이다. 구조용 재료로 이용하기 위해 이를 설계 및 제작하기 위해서는 이의 열기계적 물성치를 정확히 예측해야한다. 특히, 이러한 물성치는 복합재의 구성요소와 단섬유의 길이분포 및 방향분포와 같은 미세구조에 큰 영향을 받는 것으로 알려져 있다.

단섬유 복합재의 열기계적 물성치를 예측하기 위해 많은 연구가 진행되어 왔다.^{1)~8)} Tandon과 Weng은 단섬유의 장단비와 체적비가 탄성계수에 미치는 영향을 파악하기 위해 수정된 Eshelby의 등가 개재물법(Equivalent inclusion method)을 적용하였다.⁴⁾ 복합재내의 모든 단섬유는 하나의 일정한 장단비(Aspect ratio)를 갖는 것으로 간주하였다. Takao와

Taya는 정렬된 단섬유 복합재에 가변 장단비가 열기계적 물성치에 미치는 영향을 연구하였다.⁵⁾ 그들은 실제 장단비 분포를 사용하는 대신 평균 장단비(Mean aspect ratio)를 이용하면 정확한 물성치를 예측할 수 있음을 보였다. 평균 장단비를 적용할 수 있는 경우는 장단비의 분포가 크지 않을 때라고 제시하였으나, 이에 대한 구체적인 제시는 없었다. Tucker와 Liang은 정렬된 단섬유 복합재의 탄성계수를 예측할 수 있는 미소역학적 모델에 대해 광범위하게 조사 및 연구를 수행하였다.⁶⁾ 이를 통해 그들은 Mori-Tanaka 모델이 정렬된 단섬유 복합재의 탄성계수를 예측하는데 가장 좋은 방법이라고 결론을 내렸다. 단섬유는 축대칭이고, 모양과 크기는 모두 같은 것으로 가정하였다. Hine 등은 단섬유 복합재의 체적비, 장단비 및 길이 분포가 열기계적 물성치에 미치는 영향을 수치적으로 연구하였다.⁸⁾ 일반적으로 많이 사용되는 모델들의 결과와 비교하여 단섬유의 길이 분포 효과를 연구하여 단섬유의 길이 분포는 다양한 단섬유 길이 분포에 대해서 수평균 길이(Number average length)를 사용할 수 있음을 보였다. 이러한 연구들에 따르면 단섬유의 길이 분포의 영향을 반영하는 최선의 방법으로 평균길이

접수일 : 2006년 6월 1일, 채택확정 : 2006년 10월 12일
이재곤(책임저자) : 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부
E-mail : leejk@cu.ac.kr Tel. 053-850-2720

(Average length)를 사용하는 것임을 알 수 있다. 그러나 단섬유 복합재의 열기계적 물성치는 단섬유의 장단비에 따라 선형적으로 변하지 않는 것이 알려져 있다.^{4),8)} 그러므로 단섬유의 실제 장단비 분포를 이용하여 복합재의 물성치를 예측하는 것이 당연하다. 단섬유의 장단비 분포는 복합재의 미세구조 관찰(Micro-structural study)을 통해 각 계급나비(Class interval)에 존재하는 단섬유의 상대도수(Relative class frequency)를 측정하여 구성되는 히스토그램 또는 다각형으로 구해진다. 계급나비를 작게 하면 할수록 실제 분포에 가까워지나, 계산이 복잡해지고 미세구조관찰시 시간을 많이 필요로 하는 단점이 있다.

본 논문에서는 일방향으로 정렬된 길이 분포를 갖는 단섬유 강화 복합재에 대해 Eshelby의 등가개재물법⁹⁾과 Mori-Tanaka의 평균장이론(Mean field theory)¹⁰⁾을 적용하여 복합재의 영계수를 계산한다. 단섬유의 길이분포의 영향을 파악하기 위해 계급나비, 단섬유의 체적비 및 강화재와 모재의 영계수비에 따른 복합재의 영계수의 변화를 계산한다. 이를 통해 장단비 분포의 계급나비가 복합재 영계수 예측에 미치는 영향을 파악하여 계급나비 선정 기준을 제시한다.

2. 모델링

Fig. 1과 같이 x_3 방향으로 균일한 응력을 받는 복합재를 고려한다. 지름이 같고 길이가 다른 단섬유는 x_3 방향으로 정렬되어 있다고 가정하고, 단섬유의 형상은 다른 장단비(α)를 갖는 회전 타원체로 고려한다. 원래의 문제는 Fig. 1(a)에 보이며, Eshelby의 등가개재물법을 이용하여 Fig. 1(b)로 변환된다. $D-\Omega$ 와 Ω 는 각각 등방성의 모재와 단섬유영역을 나타내며, 이후 각각에 대해 아래첨자 m 과 f 를 사용한다.

장단비의 계급값(Class mark)이 α_i 인 하나의 단섬유가 복합재에 추가되었을 때, 이 단섬유는 복합재내의 단섬유를 대표하는 것으로 Eshelby의 등가개재물법을 적용하면 단섬유의 응력(σ_f)과 모재내의 응력(σ_m)은 각각 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_f &= C_f(e^o + \bar{e} + e^i) \\ &= C_m(e^o + \bar{e} + e^i - e^*) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sigma_m = C_m(e^o + \bar{e}) \quad (2)$$

여기서 C 는 탄성계수, e^o 는 단섬유가 없을 경우 인가 응력에 의해 발생하는 모재내의 균일 변형률, \bar{e} 는 모재 영역의 단섬유에 의한 교란 평균 변형률, e 는 단섬유 내의 교란 변형률, e^* 는 Eshelby의 등가개재물법에 의해 발생하는 등가 eigen 변형률로 계산될 값이다.

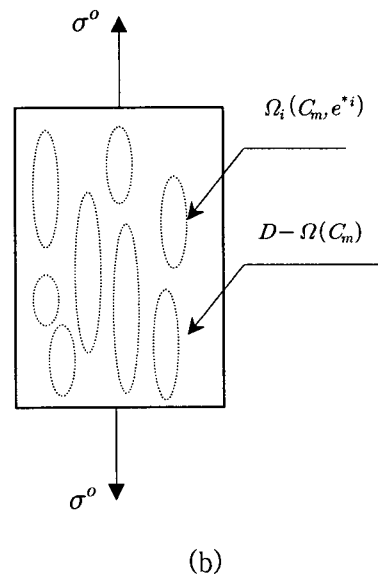
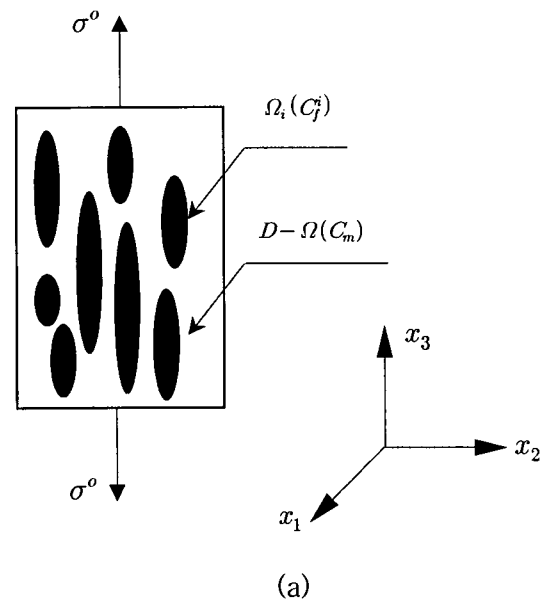


Fig. 1 Analytical model for computing stresses and strains in both fibers and matrix, (a) the original problem, which is converted into (b) Eshelby's equivalent inclusion problem

σ^o 와 e^o 는 단섬유가 없을 경우 모재의 응력과 변형률을 나타내는 것으로 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\sigma^o = C_m e^o \quad (3)$$

응력의 교란치를 복합재 전 체적에 대해 적분하면 0이 되어야하므로, 식(1)~(3) 으로부터

$$(1-f)\sigma_m + \sum_{i=1}^N f_i \sigma_i^i = 0 \quad (4)$$

여기서 f_i 는 복합재 속에 존재하는 계급값이 α_i 인 단섬유의 체적비를 나타낸다. 식(4)에 식 (1)~(3)을 대입하면

$$\bar{e} + \sum_{i=1}^N f_i (e^i - e^{*i}) = 0 \quad (4)$$

또한, 각 계급값(α_i)에 해당하는 체적비(f_i)의 합은 복합재내에 존재하는 단섬유의 총 체적비(f)가 된다. e , e^* , 그리고 단섬유의 형상과 모재의 프와송비에 의해 결정되는 Eshelby 텐서 S 사이에는 다음 관계가 존재한다.

$$e^i = S^i e^{*i} \quad (5)$$

식 (1)~(5)를 이용하면 k 번째 섬유에 대해 다음 관계식이 유도된다.

$$\begin{aligned} & [C_m + (1-f_k)(C_f - C_m)S^k + f_k(C_f - C_m)] e^{*k} \\ & + (C_m - C_f) \sum_{i=1, i \neq k}^N f_i (S^i - I) e^{*i} = (C_m - C_f) e^o \quad (6) \end{aligned}$$

여기서, I 는 3×3 단위행렬이다. 식(6)을 간단히 정리하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & A_{k1} e^{*1} + A_{k2} e^{*2} + \dots \\ & + A_{k(N-1)} e^{*(N-1)} + A_{kN} e^{*N} = B_k \quad (7) \end{aligned}$$

여기서

$$A_{kk} = [C_m + (1-f_k)(C_f - C_m)S^k + f_k(C_f - C_m)] \quad (8)$$

$$A_{kk} (i \neq k) = f_i (C_m - C_f) (S^i - I) \quad (9)$$

$$B_k = (C_m - C_f) e^o = D_k \sigma^o \quad (10)$$

복합재내의 모든 단섬유에 대해 식(7)을 정리하면 다음과 같은 행렬식으로 표현된다.

$$A e^* = D \sigma^o \quad (11)$$

식(11)로부터 이용하면, 등가 eigen변형률은 다음 식으로 계산된다.

$$e^* = A^{-1} D \sigma^o = F \sigma^o \quad (12)$$

모재와 단섬유의 총 변형률을 각각 e_m 및 e_f 라 하면 다음 식으로 표시된다.

$$e_m = e^o + \bar{e} \quad (13)$$

$$e_f^i = e^o + \bar{e} + e^i \quad (14)$$

따라서 응력 인가시 복합재의 총 변형률은 복합재의 체적 적분에 의해 다음 식으로 표시된다.

$$e_c = (1-f)e_m + \sum_{i=1}^N f_i e_f^i = e^o + \sum_{i=1}^N f_i F_i \sigma^o \quad (15)$$

Fig. 1에 보인 복합재의 응력과 변형률 사이에는 다음과 같은 관계를 가지므로

$$\sigma_c = C_c e_c = q^o \quad (16)$$

복합재의 탄성계수는 다음 식으로 표현된다.

$$C_c = \left[C_m^{-1} + \sum_{i=1}^N f_i F_i \right]^{-1} \quad (17)$$

3. 결과 및 검토

먼저 일정한 방향(x_3)으로 정렬된 단섬유의 장단비에 따른 복합재의 영계수 변화를 조사하였다. 단섬유의 체적비는 0.2로 고정하고, 단섬유와 모재의 영계수비와 단섬유의 장단비를 변수로 취급하였으며, 단섬유는 모두 동일한 장단비를 갖는 것으로 취급하였다. 계산한 결과는 Fig. 2에 보이며, 단섬유가 정렬된 방향의 복합재의 영계수를 모재의 영계수로 나누어 무차원수로 표현하였다.

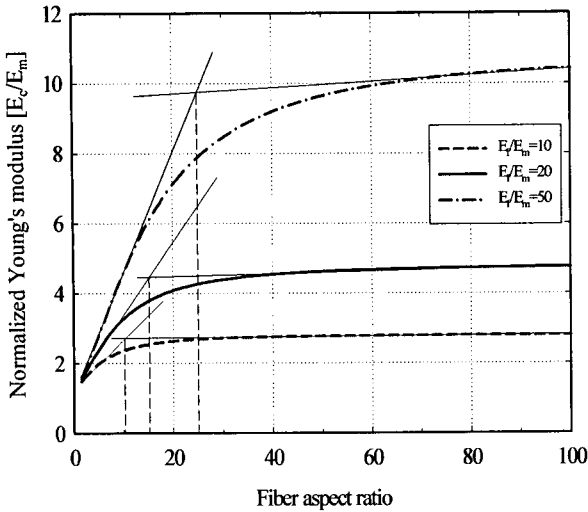


Fig. 2 Normalized Young's modulus of the composite as a function of fiber aspect ratio, where three stiffness ratios are investigated

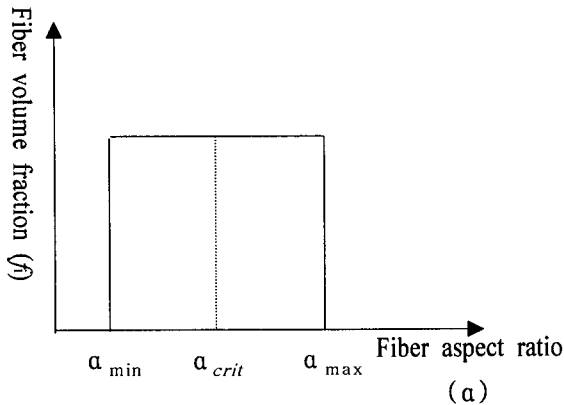


Fig. 3 Distribution of fiber volume fraction as a function of fiber aspect ratio selected for analytical study

복합재의 영계수는 단섬유의 장단비가 증가함에 따라 장단비가 작은 영역에서는 급격히 증가하며, 이 증가율은 일정한 장단비를 초과할 경우 점차 감소한다. 장단비가 클 경우 복합재의 영계수는 장단비에 따라 큰 영향을 받지 않음을 알 수 있다. 이와 같이 영계수의 변화율이 급격히 변하는 장단비는 두개의 점근선을 사용하여 구해지며, 이 장단비를 임계장단비(Critical aspect ratio)라 정의한다. Fig. 2에 보이는 것과 같이 이는 영계수비에 따라 변함을 알 수 있다. 영계수비가 10, 20, 50일 때 임계 장단비는 각각 10, 15, 25가 됨을 알 수 있다. 본 결과에 따르면 복합재의 영계수는 임계장단비 부근에서 장단비의 변화에 따라 급격히 변하므로 임계장단비

를 중심으로 완전 대칭이고 균일한 체적 분포를 갖는 장단비 분포곡선이 계급나비가 복합재 영계수 예측에 미치는 영향을 조사하기 위해 선택되었으며, 이는 Fig. 3에 보인다. 최소 장단비(α_{min})는 실제적인 단섬유 복합재를 모사하기 위해 1로 선정되었고, 최대 장단비(α_{max})는 영계수비 10, 20, 50에 대해 대칭을 이루기 위해 각각 20, 30, 50이 선택되었다.

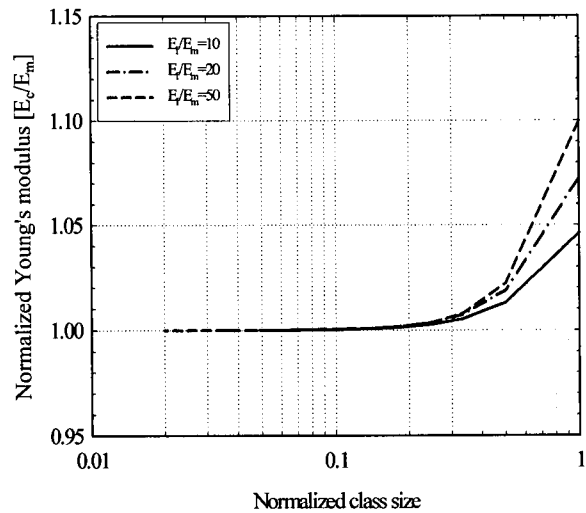


Fig. 4 Normalized Young's modulus of the composite as a function of normalized class interval and Young's modulus ratio, where fiber volume fraction is fixed as 0.2

체적비 0.2와 위에서 언급된 장단비 분포를 갖는 복합재의 영계수를 계급나비를 변화시키면서 예측하였다. 예측된 영계수는 각각의 영계수비에 대해 무차원화 된 계급나비의 함수로 Fig. 4에 보인다. 복합재의 영계수는 최소 계급나비로 계산된 복합재의 영계수를 이용하여 무차원화 되었으며, 계급나비는 최대 장단비로 무차원화 되었다. 영계수비 10, 20, 50를 갖는 복합재를 최대 계급나비로 예측된 복합재의 영계수는 각각 1.045, 1.072 및 1.10의 값을 갖는다. 이는 평균 장단비를 이용하여 예측한 복합재의 영계수와 실제 장단비를 사용하여 예측된 영계수와의 차이를 나타낸다. 무차원화 된 계급나비를 감소함에 따라 예측되는 복합재의 영계수는 급격히 1로 수렴됨을 보인다. 어떤 영계수비에 대해서도 무차원화 된 계급나비가 0.1보다 작으면 예측된 복합재의 영계수는 1로 수렴됨을 알 수 있다. 이러한 결과로부터 복합재의 영계수를 정확히 예측하기 위해

서는 무차원화 된 계급나비가 0.1보다 작은 값을 사용해야함을 알 수 있다.

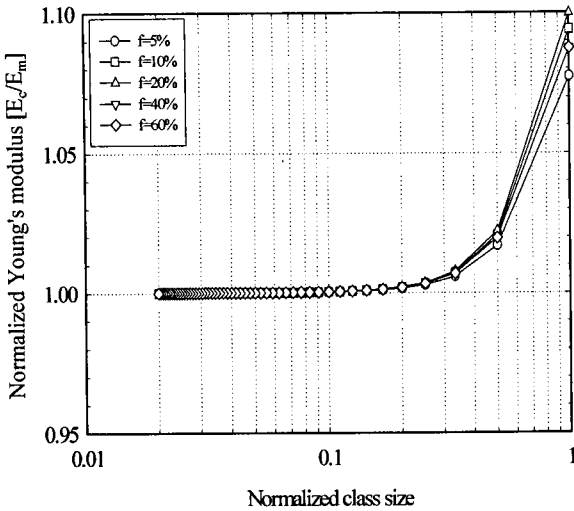


Fig. 5 Normalized Young's modulus of the composite as a function of normalized class interval and fiber volume fraction, where Young's modulus ratio is fixed as 50

다음으로 단섬유의 체적비가 계급나비에 미치는 영향을 파악하기 위해 영계수비를 50으로 고정하고 체적비 변화에 따른 복합재의 영계수를 예측하였다. Fig. 2에 보인바와 같이 큰 영계수비를 갖는 복합재의 경우, 영계수의 예측값은 장단비에 따라 민감한 경향을 보였기에 영계수비 50이 선정되었다. 이에 해당하는 최대 장단비는 50이다. 체적비는 각각 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6에 대해 조사하였으며, 계산된 결과는 Fig. 5에 보인다. 결과에 따르면, 체적비 0.2의 경우 평균 장단비를 이용하여 계산된 복합재의 영계수는 실제 장단비 분포를 이용하여 계산된 값보다 약 10% 과대평가함을 알 수 있다. 앞서의 결과와 같이 무차원화 된 계급나비가 감소함에 따라 조사된 모든 체적비에 대해 예측된 영계수는 1로 급격히 수렴함을 알 수 있다. 영계수비의 효과에서 얻어진 결과와 마찬가지로 체적비 효과 또한 동일한 경향을 보인다. 따라서 복합재의 영계수를 정확하게 예측하기 위해 장단비의 분포를 미세구조 관찰 시 무차원화 된 계급나비는 0.1이하가 되면 아주 정확히 예측할 수 있음을 보인다.

4. 결 론

복합재의 영계수는 제시된 모델로 실제 단섬유의

장단비 분포를 이용하여 예측될 수 있으며, 평균 장단비를 사용할 경우 조사된 영계수비와 체적비에서 최대 10% 과대평가함을 보였다. 계급나비가 작아질수록 예측되는 복합재의 영계수는 실제 장단비 분포를 사용하여 예측된 영계수에 급격히 수렴함을 보였다. 단섬유와 모재의 영계수비와 단섬유의 체적비가 일반적인 복합재의 사용범위에 있을 때 최대 장단비로 무차원화 된 계급나비가 0.1보다 작은 경우 실제 장단비 분포를 이용하여 구한 값과 동일한 값을 가짐을 보였다.

참고 문헌

1. K. Wakashima, M. Otsuka and S. Umekawa, 1974, "Thermal expansions of heterogeneous solids containing aligned ellipsoidal inclusions", *Journal of composite materials*, Vol. 8, pp. 391-404.
2. M. Taya and T. Mura, 1981, "On stiffness and strength of an aligned short-fiber reinforced composite containing fiber-end cracks under uniaxial applied stress", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, pp. 361-367.
3. M. Taya and T.W. Chou, 1981, "On two kinds of ellipsoidal inhomogeneities in an infinite elastic body: an application to a hybrid composite", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.17, Issue 6, pp. 553-563.
4. G.P. Tandon and G.J. Weng, 1984, "The effect of aspect ratio of inclusions on the elastic properties of unidirectionally aligned composites", *Polymer Composites*, Vol. 5, No. 4, pp.327-333.
5. Y. Takao and M. Taya, 1985, "Thermal expansion coefficients and thermal stresses in an aligned short fiber composite with application to a short carbon fiber/aluminum", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp. 806-810.
6. C.L. Tucker and E. Liang, 1999, "Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites: Review and evaluation", *Composites Science and Technology*, Vol. 59, pp.655-671.
7. H.R. Lusti, P.J. Hine, and A.A. Gusev, 2002, "Direct numerical predictions for the elastic

- and thermoelastic properties of short fibre composites", *Composites Science and Technology*, Vol. 62, pp.1927-1934.
8. P.J. Hine, H.R. Lusti, and A.A. Gusev, 2002, "Numerical simulation of the effects of volume fraction, aspect ratio and fibre length distribution on the elastic and thermoelastic properties of short fibre composites", *Composites Science and Technology*, Vol. 62, pp.1445-1453.
 9. J.D. Eshelby, 1957, "The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems", *Proc. of the Royal Society of London*, Vol. A241, pp. 376-396.
 10. T. Mori and K. Tanaka, 1973, "Average stress in the matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions", *Acta Metallurgica*, Vol. 21, pp. 571-574.