

## 탐구형 기하소프트웨어를 활용한 추론능력 평가에 관한 연구<sup>1)</sup>

이근주<sup>2)</sup> · 조민식<sup>3)</sup>

본 연구는 탐구형 기하소프트웨어의 활용이 중학교 기하영역에서 추론능력의 평가에 어떻게 적용될 수 있을지, 그리고 어떤 영향을 끼칠 수 있을지에 관한 것이다. 이를 위하여 작도, 귀납적 추론, 연역적 추론이 통합되는 형태로 문항을 구성하여 5명의 학생을 대상으로 사례 연구를 실시하였고 그 결과를 학생의 작도능력, 귀납적 추론능력, 정당화의 유형이라는 세 관점에서 분석하였다. 연구 결과 소프트웨어를 활용한 평가문항은 학생의 추론능력을 분명히 드러나게 할 수 있음을 알 수 있었다. 또한 교사는 소프트웨어의 활용을 통해 귀납추론 평가문항을 폭넓고 용이하게 만들 수 있음을 확인하였다.

주요용어 : 기하교육, 평가, 추론능력, 탐구형 기하소프트웨어

### I. 서론

구성주의에 바탕을 둔 수학교육 개혁운동은 최근 각 국의 수학교육과정에 많은 영향을 주고 있으며, 교육목표를 달성하는 방법적인 측면에서의 획기적인 방향 전환을 시도하고 있다. NCTM(1989, 2000)은 관찰과 실험의 강화, 기술공학의 강조를 제안하였고 우리나라의 제 7차 교육과정에서도 학습자의 활동을 중시하는 수학교육, 계산기·컴퓨터 및 구체적 조작물을 학습 도구로 활용하는 수학교육을 제시하고 있다. 이러한 흐름에 따라 교실수업과 학습지도에서 컴퓨터를 활용하려는 시도가 다양하게 이루어지고 있으며, 그 중 하나가 탐구형 기하소프트웨어(Dynamic Geometry Software)를 활용한 기하교육이다.

학교수학에서 기하교육은 기하학적 직관능력과 이를 바탕으로 한 추론능력을 발달시키는 것을 주요 목적으로 한다. 우정호(2000)는 “기하에는 시각화, 도형그리기, 추론이라는 세 가지 인지과정이 포함되며, 이들의 조정을 통한 상승작용은 기하학적 사고의 발달을 위해 매우 중요하고, 여기서 컴퓨터는 효과적인 매체가 될 수 있다.”고 말하고 있다. 실제로, 컴퓨터 환경에서 GSP, Cabri II, Cinderella와 같은 탐구형 기하소프트웨어의 역동적인 특성은 시각화와 조작적 이해를 촉진시켜 추론과 증명지도를 포함하는 기하영역의 교수-학습 활동에서 그 효과가 입증되고 있으며, 이를 뒷받침하는 여러 연구가 교수-학습지도 측면, 교육과정의

1) 본 연구는 2005년 한국교원대학교 학술연구비의 지원으로 연구되었음.

2) 대전과학고등학교 (lkjkejo@hanmail.net)

3) 한국교원대학교 (mscho@knue.ac.kr)

분석 및 구성 측면, 다양한 학습자료 개발 등에서 활발하게 이루어져 왔다.

기하교육에서 탐구형 기하소프트웨어의 활용이 적극적으로 도입되고 이론과 실제에 있어 상당한 발전을 이룬 반면에, 평가에는 아직 반영되지 못하고 있는 것이 사실이다(류희찬, 1998). 조완영(2000)과 권성룡(2001)은 학생들의 어떤 능력을 어떻게 효과적으로 평가할 것인가의 문제는 탐구형 소프트웨어를 도입한 학교 수학에서 중요한 연구대상이 된다고 하였다.

또한, NCTM(1989, 1995)이 제시한 평가규준 중 ‘일관성 규준’은 평가가 교육과정 뿐 아니라 수업과도 일관성이 있어야 함을 명시하면서, 평가도구는 수업방법 특히, 계산기, 컴퓨터, 조작물 등의 사용과 일치해야 하고(1989), 지필에만 의존하지 않는 다양한 평가활동을 통해 학생의 학습이 평가경험으로 연결될 수 있어야함(1995)을 강조하고 있다.

이것은 학교 수학이 소프트웨어를 활용한 교수-학습을 수용한다면, 그 방향 및 구체화의 논의가 수업 뿐 아니라 평가에서도 이루어져야 함을 의미한다. 장경윤(1998)은 학생의 사고 과정에 대한 탐색도구로서의 측면이나 대안적인 평가방법과 맥을 같이 하는 질적 평가도구로서의 측면에서 컴퓨터의 활용을 제안하고 있다.

본 연구에서는 추론능력의 평가에서 탐구형 기하소프트웨어의 활용과 그 영향에 관하여 살펴본다. 이를 위해, 관련문헌의 검토에 기초하여 탐구형 기하소프트웨어 환경을 기반으로 하는 추론능력 평가문항을 개발하고, 사례연구를 통해 개발된 평가문항이 학생의 추론능력을 평가하는 데 어떠한 영향을 줄 수 있는 지 분석한다.

## II. 추론능력 평가와 탐구형 기하소프트웨어 환경

### 1. 추론능력

추론(reasoning)은 이미 알고 있는 사실로부터 새로운 결론을 이끌어내는 방법적 측면의 수학적 사고를 말하며, 일반적으로 귀납적 추론, 유추, 연역적 추론의 유형으로 분류한다.

귀납적 추론(inductive reasoning)은 하나의 모임에서 몇 가지 구체적인 요소에 대한 정보를 사용하여 그 모임의 다른 요소 또는 모든 요소들에 대한 일반화를 이끌어내는 수학적 추론을, 연역적 추론(deductive reasoning)은 전체로 주어진 몇 개의 명제로부터 타당한 추리 패턴을 사용하여 결론을 이끌어내는 수학적 추론을 의미한다(O'Daffer & Thornquist, 1993). 또한, 유추(analogy)란 유사성을 바탕으로 어떤 대상에서 성립하는 성질로부터 그와 유사한 대상의 성질을 추측하는 것을 의미한다(우정호, 2000).

여기서, 귀납적 추론은 자료의 수집, 규칙성 발견, 확인 및 일반화의 사고 과정을, 연역적 추론은 가정과 결론의 구분, 분석, 종합의 사고 과정을 거친다(片桐重男, 1988). 따라서, 학생의 추론능력을 이해하려면 각 추론유형 속에 포함되어 있는 사고과정들의 수행에 대한 증거를 찾을 수 있어야 한다.

추론과 증명(정당화)은 산출과 입증이라는 관점의 차이는 있지만 학교수학에서 상호불가분의 관계를 가지고 있으며, 연역적 추론의 전형으로 증명의 학습지도가 8-(나)단계부터 이루어지고 있다. 하지만, 증명의 성격과 역할이 다양하고, 학교수학이 구성과정으로서의 접근을 강조하며, 학생의 증명발달 수준이 다양하다면, 학교수학에서의 증명을 전통적인 관점에서 벗어나 포괄적인 개념의 ‘정당화’로 인식하는 것이 필요하다는 논의가 제기되고 있다.

조완영(2000)은 Balacheff(1987) 와 Sowder & Harel(1998)의 분류를 바탕으로 학생의 정당화 유형을 권위적 정당화, 경험적 정당화, 연역적 정당화의 세 유형으로 분류하였다. 학생의 정당화 유형을 파악하면 교사는 학생의 증명구조를 이해할 수 있으므로 이를 바탕으로 증명지도의 효율성을 높일 수 있다.

## 2. 탐구형 기하소프트웨어 환경과 추론능력 평가

평가(assessment)가 학생의 수학적 지식, 수학을 사용하는 능력, 수학적 성향에 대한 증거를 수집하고, 이를 바탕으로 다양한 목적에 맞게 그 의미를 추론하는 것(NCTM, 1995)이라고 볼 때, 추론능력의 평가는 학생의 추론능력에 대한 증거를 수집하고, 이것의 의미를 해석하여 학생을 진단하고 이해하는 것이라 할 수 있다. 여기서, 추론능력에 대한 증거란 앞서 언급했던 추론의 각 유형들에서 요구되는 사고과정에 대한 증거라고 말할 수 있다.

탐구형 기하소프트웨어는 도형을 자유롭게 변화시키는 동적인 기능을 갖추고 있는 기하소프트웨어인데 본 연구에서는 Geometer's Sketchpad(이하 GSP)를 사용하였다.

Finzer & Jackiw(1998)는 동적인 환경의 특성으로 직접적인 조작, 연속적인 움직임, 몰입적인 환경을 제안하고 있다. 직접적인 조작이란 사용자가 스크린 상의 한 대상을 선택하여 직접 움직여 볼 수 있음을 의미하고, 연속적인 움직임이란 '끌기(Drag)' 동안에 일어나는 변화와 관련된 것으로 '끌기' 동안에 스크린 상의 수학적 대상들이 항상 논리적인 관련성과 전체 모양을 유지하면서 움직여질 뿐만 아니라 대상들이 변하는 중간상태를 사용자가 모두 볼 수 있음을 의미한다. 또한, 몰입적인 환경이란 사용자의 초점이 작도를 위한 기술적 방법보다는 수학적 목표를 달성하는 방법에 맞추어질 수 있도록 하는 환경을 말한다.

이러한 탐구형 기하소프트웨어의 특성으로 인해 추론능력 평가에서 다음과 같은 장점이 있을 것으로 생각된다.

첫째, '끌기 기능'과 '측정 기능'은 규칙성 발견을 위한 자료를 신속·정확하고 다양하게 수집할 수 있도록 해주며, 추측한 가설의 확인을 용이하게 해 줄 것이다. 이는 학생으로 하여금 귀납적 탐구 대상의 범위를 확대시키고, 동일 시간 내에 더 많은 탐색을 할 수 있게 함으로써 보다 발전적이고 심층적인 탐구를 가능하게 할 것이다. 또한, 교사로 하여금 귀납적 추론 문항의 구성을 보다 쉽고 다양하게 할 수 있게 해주어 보다 질 높은 귀납적 추론능력의 평가가 이루어질 수 있을 것으로 보여진다.

둘째, 작도는 해결과정 속에 분석 및 종합이라는 연역적 추론의 사고기능이 포함되므로, 작도의 평가는 추론능력 평가의 범주에 속한다. '끌기', '상위개체', '스크립트' 기능은 교사로 하여금 작도의 정확성에 대한 신속·명확한 확인을 가능하게 하고, 작도 절차의 이해에 도움을 줄 수 있을 것이다. 또한, 학생에게는 시행착오를 통한 분석을 용이하게 하고 즉각적인 피드백을 주어 자신의 작도 능력을 좀 더 정확하게 드러내게 할 수 있을 것이다.

셋째, 소프트웨어 환경에서의 정당화 평가문항은 학생으로 하여금 몇 개의 사례나 시각적인 그림에 근거한 경험적 정당화의 가능성과 분석을 통한 연역적 정당화의 가능성을 모두 가능하게 하므로 학생의 정당화 유형을 효과적으로 분석할 수 있다.

### Ⅲ. 연구방법 및 절차

#### 1. 연구방법 및 대상

본 연구는 개발과 사례연구의 두 부분으로 이루어져 있다. 탐구형 기하소프트웨어의 기능을 활용하는 추론능력 평가문항을 개발하기 위하여 문헌 검토 및 교과서의 추론문항 분석을 실시하였고 이에 근거하여 설정된 개발방향에 따라 평가문항을 개발하였다.

다음으로 개발된 평가문항이 학생의 추론능력을 평가하는 데 어떠한 영향을 줄 수 있는지를 알고자 사례연구를 실시하였다. 이를 통하여 수행평가 형태로 개발된 문항의 적용결과에서 나타날 수 있는 각 추론 유형에 대한 학생의 다양한 반응과 각 유형들 사이의 상호작용을 분류·해석하였다.

연구대상 학생은 대전광역시 B중학교 3학년 학생들 중에서 탐구형 소프트웨어와 도형영역에 관심이 있는 학생들 중 수학담당교사의 추천과 면담을 통해 5명(A, B, C, D, E)을 선정하였다. 학생들의 수학교과에 대한 성취도는 B와 E가 상 수준, A와 C가 중 수준, D가 하 수준 이었다. 모두 컴퓨터 소프트웨어에 대한 흥미가 많았고 컴퓨터에 대한 기본 소양이 갖춰진 학생들이었지만 탐구형 기하소프트웨어를 다루어본 경험은 없었다.

#### 2. 연구절차

추론능력 평가문항의 개발을 위하여 현행 7-(나), 8-(나) 교과서에 제시된 기하영역의 추론문항을 분석하여 평가되어야 할 내용요소를 추출한 후, 이로부터 예비문항을 개발하여 검사 결과를 분석하고 이를 보완하여 열 개의 최종 문항을 개발하였다.

사례연구는 자료수집과 분석으로 나누어 진행되었는데 자료는 문서자료, 관찰자료, 면담자료로 나누어 수집하였다.

문서자료는 사전, 사후 면담 질문지, 사전 지식 검사지, 탐구형 기하소프트웨어의 기능을 활용한 추론능력 평가문항 검사지 및 검사 결과물로 구성되어 있다. 면담 질문지는 공식 면담을 위한 것이고, 사전 지식 검사지의 경우 아직 9-(나)의 기하부분을 다루지 않았기 때문에 7-(나), 8-(나) 단계의 범위에서 제시된 교육과정상의 필수 학습요소를 중심으로 검사지를 구안하였다. 또한, 탐구형 기하소프트웨어의 기능을 활용한 추론능력 평가문항 검사지는 개발연구에 의해 만들어진 것으로, 여기서의 반응 결과물이 본 연구의 핵심적인 분석 대상이 되었다.

관찰일지(필드노트)에는 면담이나 검사에서 학생들의 말이나 행동, 연구자의 인상적인 경험 및 느낀 점, 그리고 연구자가 학생과 나누었던 비공식적인 대화 등이 기록되어 있다.

면담은 공식면담으로 사전, 사후 면담 및 실험과정 중에 검사 결과 해석을 위한 면담으로 나누었다. 미리 작성된 질문지를 토대로 면담이 이루어졌고 내용은 모두 녹음, 기록되었다. 사전면담은 학생의 수학적 성향 및 태도, 도형단원에 대한 일반적인 느낌 및 견해, 도형단원의 학습 시 애로점, 도형단원의 학습 시 컴퓨터 사용에 대한 견해, 컴퓨터와의 친밀감등을 알아보기 위해 검사 시작 전에 이루어졌고, 사후 면담은 검사가 끝난 후 검사문항에 대해 느낀 점(기존문항과 비교), 검사문항의 해결 중에 어려웠던 점, 도형단원의 평가에 탐구형

기하소프트웨어를 활용하는 것에 대한 견해 등을 파악하기 위해 실시되었다. 또한, 실험과정 중에 추론문항 검사의 결과물의 해석을 돕기 위해 실시되었다.

개발된 각각의 평가문항이 세 가지 관점-작도능력, 귀납적 추론능력, 정당화 유형-에서 학생의 추론능력을 이해하기에 타당한 문항인지를 알기 위해 문항별로 다음과 같은 기준으로 반응을 분석했다.

첫째, 작도능력을 이해한다는 것은 ‘작도의 수준을 이해한다’는 것으로 보고, Bennett 와 Finzer(1995)가 탐구형 기하소프트웨어 환경에서의 작도문제 해결과 관련하여 분류한 네 수준-그림을 그리는 수준, 불충분한 조건을 사용하는 수준, 지나친 조건을 사용하는 수준, 적절한 조건을 사용하는 수준-을 분석의 기준으로 하였다. 즉, 학생들의 작도를 분석한 결과 네 수준 중에 어느 한 가지로 판단될 수 있으면 그 문항은 작도 능력을 이해하기에 타당한 문항으로 보았다.

둘째, 귀납적 추론능력을 이해한다는 것은 ‘귀납적 추론에서 요구되는 사고과정에 대한 증거를 얻을 수 있다’는 것으로 보고, 귀납추론의 세 가지 사고과정-자료수집, 규칙성의 발견, 확인 및 일반화-을 분석의 기준으로 삼았다. 즉, 학생의 귀납적 추론과정을 분석한 결과 세 사고기능에 대한 증거를 얻을 수 있으면 그 문항은 귀납적 추론 능력을 이해하기에 타당한 문항으로 보았다.

셋째, 정당화의 유형을 이해한다는 것은 ‘학생의 정당화의 근거와 방법에 대한 증거를 얻을 수 있다’는 것으로 보고, 조완영(2000)이 분류한 세 가지 유형-경험적 정당화, 연역적 정당화, 권위적 정당화-을 분석의 기준으로 삼았다. 즉, 학생의 정당화 과정을 분석한 결과 세 가지 유형 중 어느 한 가지로 판단될 수 있으면 그 문항은 정당화의 유형을 이해하기에 타당한 문항으로 보았다.

다음으로, 개발된 평가문항이 학생의 추론능력을 평가하는 데 어떠한 영향을 줄 수 있는지를 알기 위해 세 가지 관점-작도능력의 평가, 귀납적 추론능력의 평가, 정당화 유형의 평가-각각에 대하여 해당 관점의 평가문항들이 학생의 능력을 표출시키는 데, 그리고 교사의 학생 이해 과정에 어떠한 영향을 미치는지에 대하여 해석적으로 분석하였다.

## IV. 연구 결과 및 분석

### 1. 평가문항의 개발

#### 1) 교과서 내의 추론능력 평가문항 분석

현행 중학교 교과서에 포함된 추론능력 평가문항의 성격을 살펴보기 위해 7-(나), 8-(나) 교과서 각각 2종씩을 택한 후, 기하영역에 포함된 문항들을 대상으로 분석하였다.

모든 문항들을 황혜정 등(2001)에 제시된 인지적 행동영역의 유형과 정의에 근거하여 계산, 이해, 추론, 문제해결의 4가지 행동영역으로 구분하고 이들 중 추론 문항만을 대상으로 추론유형에 따른 수량적, 내용적, 구성적 특징을 분석하였다. 그 결과와 논의점을 요약하면 다음과 같다.

먼저 수량적 특징을 살펴보면, 전체 기하문항 중에서는 이해와 추론문항의 비율이 43%, 34%로 높았고, 추론문항들을 유형별로 분류했을 때는 연역추론(60%), 유추(25%), 귀납추론(15%)의 순서로 많았다.

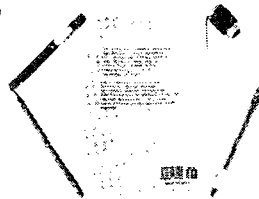
<표 1> 기하영역의 추론문항에 대한 유형별 문항수

유형 교과서	귀납적 추론	유추	연역적 추론	계
7-(나)	26 (33%)	23 (30%)	29 (37%)	78
8-(나)	2 (2%)	25 (22%)	87 (76%)	114
계	28 (15%)	48 (25%)	116 (60%)	192

<표1>에서 알 수 있듯이, 7-(나)에서는 세 유형이 비교적 고른 분포를 보이지만, 8-(나)에서는 연역추론의 문항이 월등하게 많음을 알 수 있다. 8-(나)단계에서 논증기하가 다루어지는 영향이겠지만 발견과정의 중요성을 생각할 때, 8-(나)에서 귀납추론 문항이 지나치게 약화되었다고 여겨진다.

내용 및 구성적 특징으로는 귀납적 추론문항은 대부분 단순한 관찰에 의해 패턴을 발견하는 형태로 한정되었으며, 아이디어의 발견이 목적인 개념의 도입부에 위치하여 교수-학습을 위해서만 활용되고 있었다. [그림 1]은 귀납적 추론문항의 한 예이다. 방법적 사고로서의 가치를 고려할 때, 귀납적 추론능력의 이해를 위한 평가의 강화가 요구되며, 기초직관에만 의존하는 탐색의 한계를 극복하고 귀납추론의 범위를 확대시킬 수 있는 방안에 대한 논의가 필요하다.

**문제 1** 오른쪽 사진 ①과 같이 가지고 있는 물건 3개를 각각 한 번으로 하는 삼각형 모양을 만들어 보아라.

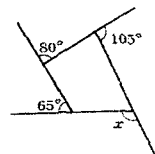


**문제 2** 물건 3개를 각각 한 번으로 하는 삼각형을 만들 수 없는 경우를 찾아보고, 그 이유를 말하여라.

[그림 1] 귀납적 추론문항의 예

유추 문항은 기지의 대상과 미지의 대상 사이의 구조적 유사성을 바탕으로 추론을 형성시키는 것으로 학교 수학에 있어 개념 습득과 문제 해결을 위해 중요한 도구의 역할을 하고 있음을 알 수 있었다. 교과서의 구성방식에 있어 예제를 제시한 후 유사한 문제를 제시하는 체제는 유추의 전형적인 사례라 볼 수 있다. [그림 2]는 먼저 제시된 예제를 바탕으로 한 유추문항의 한 예이다.

**예제** 다음 그림에서  $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



**풀이** 다각형의 외각의 크기의 합은  $360^\circ$ 이므로,

$$80^\circ + 105^\circ + 65^\circ + \angle x = 360^\circ$$

이다. 따라서,

$$\angle x = 360^\circ - (80^\circ + 105^\circ + 65^\circ) = 110^\circ$$

**답**  $110^\circ$

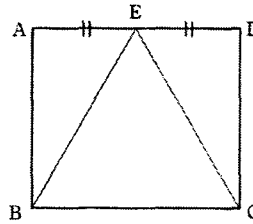
**문제** 다음 정다각형의 한 내각의 크기와 한 외각의 크기를 각각 구하여라.

- (1) 정삼각형      (2) 정사각형      (3) 정오각형      (4) 정육각형

[그림 2] 유추 문항의 예

연역적 추론문항은 대부분 논리적 추리패턴에 의한 정당화를 요구하는 증명문항이었다. [그림 3]은 연역적 추론문항의 한 예이다. 증명에 있어 발견의 과정인 분석에 대한 문항은 거의 다루어지지 않고 있었으며, 종합되고 완성된 형태의 답안을 요구하는 문항이 대부분이어서 연역적 정당화의 수준에 도달하지 못한 학생들에 대한 정당화의 증거를 찾아내기 어려울 것으로 보였다. 이는 증명능력 평가의 의미를 약화시키는 결과가 될 것이다.

오른쪽 그림의 직사각형 ABCD에서 점 E가  $\overline{AD}$ 의 중  
점일 때,  $\triangle ABE$ 와  $\triangle DCE$ 는 합동임을 설명하여라.



[그림 3] 연역적 추론문항의 예

연역적 추론의 범주에 속하는 작도 문항은 7-(나)의 한 두 단원에서 기본 도형에 대해 기 능위주로만 간단하게 제시될 뿐, 기하영역의 전반에 통합되지 못하고 있었다. 문항구성 및 결과해석의 비용이성을 극복할 수 있는 방안을 강구할 필요가 있고, 이를 통해 추론능력 평 가의 한 부분으로서 작도평가의 활성화가 요구된다.

## 2) 평가문항의 개발

분석결과를 바탕으로 평가문항의 개발 방향을 다음과 같이 설정하였다.

- (1) 현행 7-(나), 8-(나)단계의 기하영역에서 추출된 내용요소에, 중학교 3학년의 내용수 준<sup>4)</sup>을 고려하여 개발한다.
- (2) 단순한 유추문항은 배제하고 작도능력의 평가를 모든 평가문항의 기본으로 한다.
- (3) 참신한 소재의 귀납적 추론 문항을 개발한다.
- (4) 작도, 귀납추론 및 연역추론(증명)이 연결되는 통합 형태로 문항을 개발한다.
- (5) 수행평가 형태로 문항을 개발한다.

개발 방향에 기초하여 만들어진 예비문항의 검사로부터 얻어진 문제점과 보완책을 바탕으 로, 7-(나), 8-(나) 단계의 기하교육과정에서 각각 5개씩 총 10개의 내용요소를 추출하고, 중 학교 3학년 학생의 내용수준을 고려하여 10개의 최종적인 평가문항을 개발하였다. 예를 들 어 [그림 4]는 각각 7-(나), 8-(나)에 대한 개발 문항 5번, 10번과 평가 관점이다.

4) 내용요소의 깊이를 의미하는 용어이다. 예를 들어, '삼각형의 내각의 합은 180°'라는 내용에 대해 여, 종이로 만든 삼각형의 세 내각을 적당히 오려 붙여서 180°임을 보이는 방식도 있고, 평행선의 성 질을 이용해서 180°임을 보이는 방식도 있다. 전자보다 후자가 내용수준이 깊다고 할 수 있다. 이는 학생들이 풀기에 쉽거나 어려운 정도인 '난이도'개념과는 다르다. 내용수준이 낮더라도 복잡성 때문에 난이도는 높을 수 있다.(한국교육과정평가원, 2002)

[문항5] GSP를 활용하여, 주어진 문제들을 해결하시오.

- (1) GSP파일 8페이지에 주어진 선분들을 네 변으로 하는 볼록사각형을 작도하시오. (주어진 네 선분의 길이는 각각 1, 2, 3, 4 이다.)
- (2) 볼록사각형은 단 하나로 결정되는가?  
그렇지 않다면 몇 개나 만들어지는가?
- (3) (2)에서 사각형이 단 하나로 결정되지 않는다면, 만들어지는 볼록사각형들에 대하여 대각선 AC의 길이는 어떤 범위에 있는지 조사하여 기술하시오.
- (4) (3)의 이유를 설명하시오.

[문항5의 평가관점]

- (1): 네 변의 길이가 주어진 경우 이를 만족하는 사각형을 작도할 수 있는지 묻는 문항이다.
- (2): (1)에서 작도된 볼록사각형이 단 하나가 아니라 무수히 많음을 관찰할 수 있는지 묻는 문항이다.
- (3): (1)에서 만들어질 수 있는 볼록사각형들을 움직이면서 대각선 AC가  $1 < \overline{AC} < 3$  가 됨을 발견할 수 있는지 묻는 문항이다.
- (4): (3)에서 발견한 성질  $1 < \overline{AC} < 3$  의 이유 즉, 볼록사각형이 되려면 대각선의 교점이 사각형 내부에 있어야 하며, 인접한 두 변이 일직선상에 있으면 사각형은 만들어지지 않기 때문이라는 것을 분석하여 설명할 수 있는지 묻는 문항이다.

[문항 10] GSP를 활용하여, 주어진 문제들을 해결하시오.

(1) GSP파일 10 페이지에 다음의 상황을 작도하시오.

『삼각형 ABC의 꼭지점 A를 지나는 임의의 반직선  $l$ 을 긋고, 두 꼭지점 B와 C로부터  $l$ 에 수선을 그었을 때의 수선의 발이 각각 P와 Q이다. 또한, 변 BC의 중점은 M이다. (단, 임의의 반직선은  $\angle A$  내에 있다.)』

- (2) (1)에서 수행한 작도에서 반직선  $l$ 을 움직일 때, 변화하는 점을 관찰하여 적고, 그 이유를 말하시오.
- (3) 반직선  $l$ 이 움직이더라도 선분의 길이에 있어 달라지지 않는 성질은 무엇인지 발견하여 적고, 다른 예에 대해서도 이를 확인하시오.
- (4) (2)에서 추측·확인한 성질이 항상 성립한다면, 다음 순서에 의해 증명하시오.
  - ① 가정과 결론을 구분하여 기술하시오.
  - ② 무엇이 만족되면 결론이 성립한다고 말할 수 있는 지를 분석하여 기술하시오. (Hint가 필요하면 교사에게 요청 하시오.)
  - ③ 증명과정을 기술하시오.

[문항 10의 평가관점]

- (1) : 주어진 문제 상황에 적합한 작도를 할 수 있는지 묻는 문항이다.
- (2) : GSP파일로 작도된 그림에서 수선의 발 P, Q가 반직선  $l$ 에 종속되어 있다는 것을 이해할 수 있는지 묻는 문항이다.
- (3) : GSP파일로 작도된 그림에서 직선  $l$ 이 움직일 때, 이에 따라 변화하는 요소들을 관찰하면서 길이에 있어 달라지지 않는 성질인  $\overline{MP} = \overline{MQ}$ 를 발견해낼 수 있는지 묻는 문항이다.
- (4) : (2)에서 발견해낸 성질이 항상 성립한다는 것을 분석과 종합을 통하여 연역적으로 증명할 수 있는지 묻는 문항이다.

[그림 4] 개발 내용과 평가 관점 예시



모든 문항에는 <표 2>와 같은 문항 정보표를 만들어 세부행동요소를 분류하였다.

<표 2> 문항에 대한 문항 정보표

단계	7-(나)		대단원	II.도형의 성질			
중단원	2. 평면도형		소단원	1. 다각형			
내용요소	네 변의 길이가 주어진 사각형		난이도	어려움/ 보통 쉬움			
수행평가 유형	서술형 / 프로젝트 실험·실습/구술·면접 포트폴리오		행동요소	계산/ 이해 추론 문제해결			
세부 행동 요소	소문항번호	작도	귀납추론			연역추론	
			자료수집	추측	확인및 일반화	분석	종합
	1	○					
	2		○				
	3			○	○		
4					○	○	
총평							

## 2. 평가문항의 반응 분석

먼저, 학생들의 반응을 문항별로 분석한 결과 작도 답안 35개 중 34개에 대하여 학생의 작도 수준과 오류를 이해할 수 있었고, 귀납적 추론문항에 대한 답안 50개 모두에 대하여 학생의 귀납적 추론과정을 이해할 수 있었으며, 정당화에 대한 답안 50개 중 무응답을 제외한 44개에 대하여 학생의 정당화 유형을 이해할 수 있었다. 이것은 개발된 문항 각각이 학생의 작도능력, 귀납적 추론능력, 정당화 유형을 이해하기에 내용적으로 타당함을 말해주는 것으로 볼 수 있다.

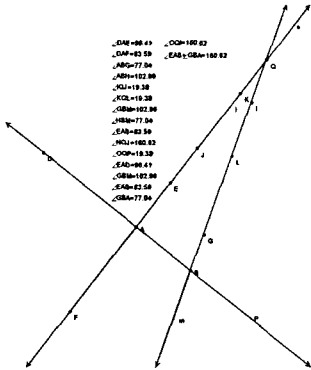
다음으로, 개발된 평가문항들이 학생의 추론능력 평가에 어떠한 영향을 주는지를 알기 위해 검사에서 얻어진 반응을 세 가지 관점 - 작도능력의 평가, 귀납적 추론능력의 평가, 정당화 유형의 평가 - 에서 각각 분석하였다.

### 1) 작도능력의 평가에 미치는 영향

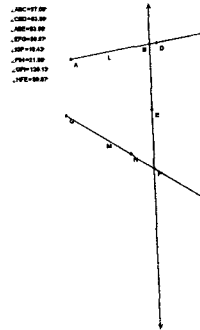
(1) 학생의 작도수준을 종합적으로 이해하게 해준다.

작도문항 7개의 반응 분석을 통해 연구대상학생 5명의 작도수준을 조사하여 본 결과, 다양한 수준이 있음을 확인하였다. 예를 들어, 평행하지 않은 서로 다른 두 직선  $l, m$  을 작도하고, 두 직선  $l, m$ 과 모두 만나는 한 직선  $p$ 를 작도하는 문항 1에서 학생 A는 [그림 5]와 같이 직선  $l$ 을 작도하고 그 위의 점을 교점으로 잡은 후, 그 점을 지나는 직선  $p$ 를 긋고, 직선  $p$ 와 만나는 직선  $m$ 을 그었다. 또한, 학생 D는 [그림 6]처럼 두 선분  $l, m$ 을 작도한 후 그

위를 움직이는 점끼리 이어서 직선  $l$ 를 만들었다. 본 문항에서는 평행하지 않는 두 직선  $l, m$ 을 작도하고 이와 만나는 한 직선을 작도한 후 교점을 작도하여, 교점을 드래그해도 두 직선의 모양이 달라지지 않아야 올바른 작도이다. 그런데, 학생 A와 학생 D의 작도는 교점을 작도한 것이 아니라 한 직선위의 점을 지나는 또 다른 직선을 작도한 것이므로, 이들의 작도는 ‘그림을 그리는 수준’으로 볼 수 있다.

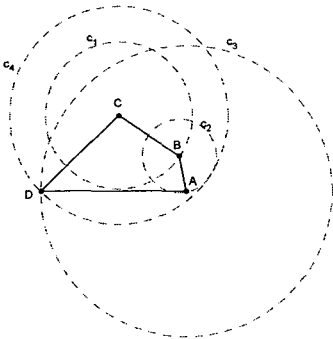


[그림 5] 문항 1에서 학생 A의 작도

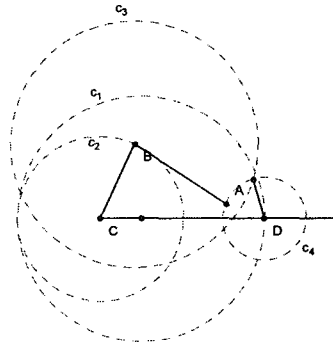


[그림 6] 문항 1에서 학생 D의 작도

또한, 5번 문항에서 [그림 7]의 학생 A는 ‘적절한 조건을 사용하는 수준’이다. 중심이 C 반지름  $\overline{CB}$ 인 원  $c_1$ 위의 점을 B라 놓고, 다시 중심이 B 반지름이  $\overline{BA}$ 인 원  $c_2$ 위의 점을 A라 놓았다. 그리고, A를 중심,  $\overline{AD}$ 를 반지름으로 하는 원  $c_3$ 와 C를 중심,  $\overline{CD}$ 를 반지름으로 하는 원  $c_4$ 의 교점을 D라 놓고, 네 점 A, B, C, D를 연결하여 사각형을 작도했다. [그림 8]의 학생 B는 ‘불충분한 조건을 사용하는 수준’이다. 그 이유는 점 D, C, B를 적절하게 작도한 후, 마지막에 두 원  $c_3$ 과  $c_4$ 의 교점을 A로 정해야 하는 데 원  $c_4$  위의 점 중 점 B로부터의 거리가 3인 점을 측정에 의해 찾아서 그 점을 A로 그럴듯하게 만들었기 때문에 점 A를 움직이면 주어진 조건을 만족하는 사각형이 깨지게 된다.



[그림 7] 문항 5에서 학생 A의 작도



[그림 8] 문항 5에서 학생 B의 작도

위와 같은 학생 작도의 반응분석 결과를 바탕으로 각 문항에 대한 연구대상학생 5명의

작도수준을 총괄적으로 정리하면 표 <3>5)과 같다. 이로부터 학생들의 작도 수준을 종합적으로 이해할 수 있었다.

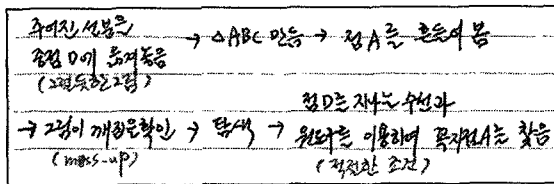
<표 3> 학생의 작도수준 총괄

문번 학생	1	2	5	6	7	9	10
A	그림	적절	적절	적절	적절	적절	그림
B	적절	적절	불충분	적절	적절	적절	적절
C	불충분	적절	실패	적절	적절	적절	적절
D	그림	적절	불충분	적절	그림	적절	적절
E	불충분	적절	적절	적절	적절	적절	적절

학생 A는 문항 1, 10에서 알 수 있듯이 작도의 순서에 대한 인식이 다소 부족하지만, 전반적인 관점에서 '적절한 조건을 사용하는 수준'으로 볼 수 있다. 학생 B는 문항 5에서 알 수 있듯이 교점의 기하학적 의미에 대한 인식이 다소 부족하지만, 전반적인 관점에서 '적절한 조건을 사용하는 수준'으로 볼 수 있다. 학생 C는 문항 1, 5에서 알 수 있듯이 작도의 순서와 교점의 기하학적 의미에 대한 인식이 다소 부족하여, '불충분한 조건을 사용하는 수준'과 '적절한 조건을 사용하는 수준'의 중간 단계로 볼 수 있다. 학생 D는 문항 1, 5, 7에서 알 수 있듯이 교점이나 삼각형의 높이와 같은 개체의 기하학적 의미에 대한 인식이 부족하여, '불충분한 조건을 사용하는 수준'으로 판단된다. 학생 E는 문항 1에서 직선을 선분으로 불충분하게 작도한 것 이외에는 모두 정확하게 작도하였다. '적절한 조건을 사용하는 수준'으로 볼 수 있다.

(2) 학생의 작도 능력을 좀 더 정확히 표출시키는 데 도움을 준다.

'끝기에 의한 흐트러짐'이 있는 지에 대한 자기검사(self-examination)의 용이성을 바탕으로, 학생이 자신의 작도에 오류가 있음을 인식하고 이를 수정하여 개선된 결과물을 산출하는 사례가 발견되었다. 그 예로 문항 7에서 작도를 해결하는 학생 B의 과정을 살펴보면, 처음에는 밑변  $\overline{BC}$ 의 중점 D위에 주어진 선분을 드래그하여 그럴듯하게 올려놓고 변  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ 를 작도했으나, 점 A를 움직여봄으로써 이등변삼각형이 깨지는 오류가 발생함을 인식하고, 원인규명 과정을 거쳐 결국은 '원도구'를 이용한 적절한 작도를 수행했다. [그림 9]는 이 과정을 알게 해주는 관찰일지의 내용이다.

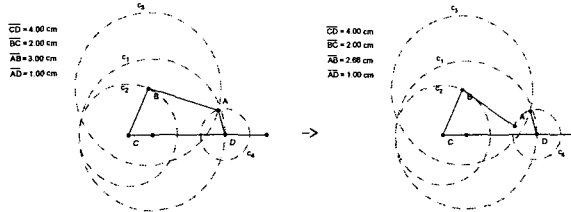


[그림 9] 문항 7에서 학생 B의 작도 해결과정에 대한 관찰일지의 내용

5) 표에서 '그림'은 그림을 그리는 수준, '불충분'은 불충분한 조건을 사용하는 수준, '적절'은 적절한 조건을 사용하는 수준, '실패'는 작도에 실패한 경우를 의미한다.

(3) 교사가 학생의 작도를 신속·정확하게 이해하는 데 도움을 준다.

GSP로 작성된 작도 답안에 대하여 연구자가 끌기에 의한 ‘기하학적 관계의 흐트러짐’이 있는 지를 파악함으로써 신속하고 정확하게 학생의 작도 수준을 이해할 수 있음을 알 수 있었다. [그림 10]은 이를 보여주는 예이다.

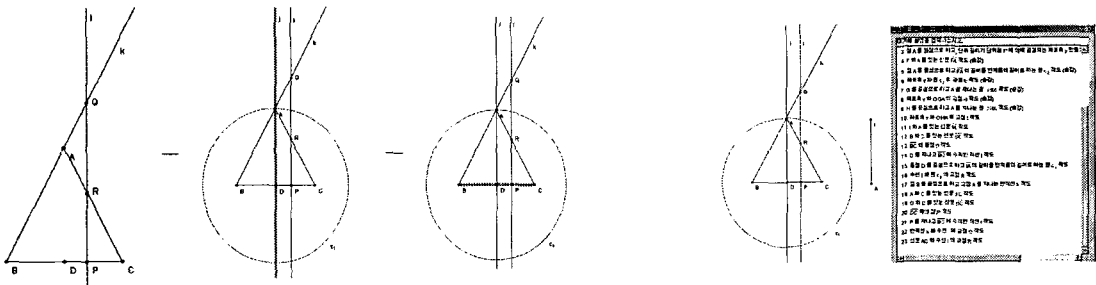


[그림 10] 학생 B의 작도에 대한 연구자의 확인과정

왼쪽 그림이 문항 5에 대한 학생 B의 답안이고, 오른쪽 그림이 점 A를 끌기에 의해 흔들었을 때의 상황이다. 즉각적으로 기하학적 관계가 깨짐을 확인할 수 있었다. 또한, 그 원인이 두 원  $c_3$ 과  $c_4$ 의 교점을 꼭지점 A로 정하지 않고 원  $c_4$  위의 점 중 점 B로부터의 거리가 3인 점을 측정에 의해 찾아서 꼭지점 A로 그럴듯하게 만들었기 때문임을 쉽게 알 수 있다.

(4) 학생의 사고흐름에 대한 이해를 용이하게 해준다.

GSP로 작성된 작도 답안이 복잡한 경우에도 연구자는 ‘숨겨진 개체 모두 보이기’, ‘상위개체, 하위개체’ 및 ‘스크립트 보기’ 기능을 이용하여 작도의 순서와 학생의 사고흐름을 쉽게 이해할 수 있었다. [그림 11], [그림 12]는 이를 보여주는 예이다.

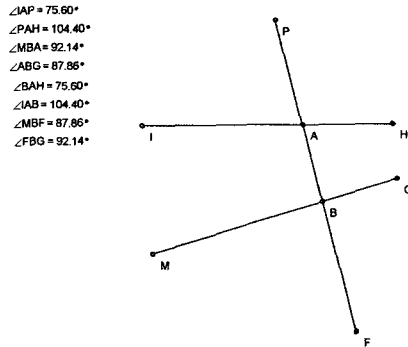


[그림 11] 직선j의 ‘상위개체’를 찾는 과정

[그림 12] 작도흐름에 대한 확인과정

(5) 작도에 오류가 있는 경우 이후의 추론과정에 부정적인 영향을 미친다.

개발된 평가문항이 ‘작도-귀납추론-연역추론’의 통합적인 연결로 구성되었기 때문에 작도에 오류가 있는 경우에 개체들 사이의 기하학적 관계가 유지되지 않아 이후의 귀납추론 및 정당화 과정에서 올바른 탐구가 불가능하거나 다른 방향으로 진행되었다. 그 예로 문항 1에서 학생 C, E는 불충분한 작도로 인해 이후의 추론이 제한적일 수밖에 없었다([그림 13]).



[그림 13] 문항1 에서 학생 C, E의 작도

2) 귀납적 추론능력의 평가에 미치는 영향

(1) 학생의 귀납적 추론능력에 대한 종합적인 이해를 가능하게 해준다.

$\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{DB}$ ,  $\overline{DC}$  사이의 관계식을 발견해 내야 하는 8번 문항에서, 학생 A는 네 선분의 길이에 대한 자료를 수집한 후 이들 사이의 연산에 의해 ' $\overline{AB} \cdot \overline{DC} = \overline{AC} \cdot \overline{DB}$ ' 라는 관계식을 발견하고, 이를 다른 사례들에 대해 확인 후 일반화 하였다. 학생 B는 자료 수집한 후 이를 바탕으로 ' $\overline{AB}$ 가 줄어들면 같은 쪽에 있는  $\overline{BD}$ 도 줄어들고, 이 때  $\overline{AC}$ 와  $\overline{DC}$ 는 함께 늘어난다.' 라는 성질을 발견하여 확인 및 일반화를 했지만 그것들 사이의 구체적인 관계식은 발견하지 못했다. 학생 C와 D는 자료는 수집했으나 이들 사이에 관계를 발견하지

못했다. 학생 E는 자료로부터  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$  임을 발견하고, 이를 다른 사례에 대해 확인 후 일반화하였다. 이러한 학생의 수행정도는 <표 4>와 같다.

<표 4> 문항8에 대한 학생들의 귀납적 추론과정 수행정도

학생	자료수집	규칙성 발견	확인 및 일반화
A	○	○	○
B	○	△	△
C	○	×	×
D	○	×	×
E	○	○	○

위와 같은 방법으로 개발된 문항 10개에 대한 반응을 분석한 결과, 얻어진 연구대상학생 5명의 자료수집 능력, 규칙성 발견 능력, 확인 및 일반화 능력을 총괄적으로 정리하면 <표 5>와 같다. 이로부터 학생들의 귀납적 추론능력을 종합적으로 이해할 수 있었다.

6) 문항별 분석에서 세부적으로 조사했던 자료수집, 규칙성 발견, 확인 및 일반화능력을 종합하여 상, 중, 하로 판단하였다.

<표 5> 학생의 귀납적 추론능력에 대한 총괄<sup>7)</sup>

문	학생		A		B		C		D		E	
	요소											
1	자료수집	○	상	△	중	△	중	○	중	△	중	
	규칙성 발견	○		△		△		△				
	확인 및 일반화	○		○		○		○				
2	자료수집	○	상	○	하	○	하	○	하	○	상	
	규칙성 발견	○		×		×		×				
	확인 및 일반화	○		×		×		×				
3	자료수집	○	상	○	상	○	상	○	상	○	상	
	규칙성 발견	○		○		○		○				
	확인 및 일반화	○		○		○		○				
4	자료수집	○	상	○	상	△	중	△	중	○	상	
	규칙성 발견	○		○		△		△				
	확인 및 일반화	○		○		△		△				
5	자료수집	○	상	×	하	×	하	×	하	○	상	
	규칙성 발견	○		×		×		×				
	확인 및 일반화	○		×		×		×				
6	자료수집	○	상	○	상	○	중	○	상	○	상	
	규칙성 발견	○		○		△		○				
	확인 및 일반화	○		○		△		○				
7	자료수집	△	중	○	중	○	중	○	중	○	상	
	규칙성 발견	△		△		△		△				
	확인 및 일반화	△		△		△		△				
8	자료수집	○	상	○	중	○	하	○	하	○	상	
	규칙성 발견	○		△		×		×				
	확인 및 일반화	○		△		×		×				
9	자료수집	○	상	○	상	○	상	○	상	○	상	
	규칙성 발견	○		○		○		○				
	확인 및 일반화	○		○		○		○				
10	자료수집	○	상	○	상	○	상	○	상	○	상	
	규칙성 발견	○		○		○		○				
	확인 및 일반화	○		○		○		○				

학생 A는 9개의 문항이 '상'이고 1개의 문항만이 '중'이므로 전체적으로 판단할 때 '상'수준으로 볼 수 있다.

학생 B는 5개의 문항이 '상', 3개의 문항이 '중', 2개의 문항이 '하'이므로 전체적으로 판단할 때 '중상'수준으로 볼 수 있다.

학생 C는 3개의 문항이 '상', 4개의 문항이 '중', 3개의 문항이 '하'이므로 전체적으로 판단할 때 '중'수준으로 볼 수 있다.

학생 D는 4개의 문항이 '상', 3개의 문항이 '중', 3개의 문항이 '하'이므로 전체적으로 판단할 때 '중'수준으로 볼 수 있다.

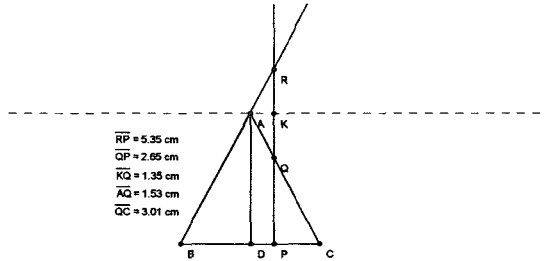
학생 E는 9개의 문항이 '상', 1개의 문항이 '중'이므로 전체적으로 판단할 때 '상'수준으로 볼 수 있다.

7) 수행정도의 표시로 ○은 해당 사고기능을 적절하게 수행한 경우를, △는 불완전하지만 일부 수행한 경우를, ×는 수행하지 못한 경우를 나타내었다.

탐구형 기하소프트웨어를 활용한 추론능력 평가에 관한 연구

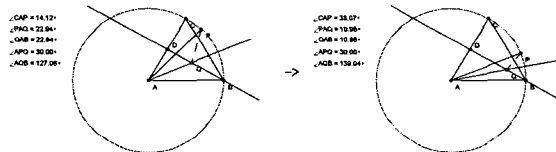
(2) 학생의 귀납적 추론능력을 좀 더 정확히 표출시키는 데 도움을 준다.

탐구형 기하소프트웨어 평가환경은 학생으로 하여금 다양한 관심 개체에 대한 측정값을 신속, 정확하게 산출하게 해줌을 알 수 있었다. [그림 14]는 학생이 귀납추론을 하기 위해 다양한 자료를 수집하는 예이다.



[그림 14] 문항 7에서 학생 C의 다양한 자료수집의 예

다음으로, 확인 및 일반화 과정을 용이하게 해 주었다. 추측한 가설에 대해 학생 스스로 ‘끌기’기능과 측정값의 ‘계산’기능을 이용하여 그 진위를 쉽게 확인하고 일반화함을 알 수 있었다. [그림 15]는 학생이 추측한 가설을 쉽게 확인하는 과정이다.



[그림 15] 문항3에서 학생E가 추측한 가설을 쉽게 확인하는 과정

이러한 귀납추론 과정의 용이성은 학생으로 하여금 충분한 시행착오를 가능하게 함으로써 보다 다양하고 수준 높은 추론 결과물을 생산하게 해 줄 수 있다. 따라서 학생이 자신의 귀납적 추론능력을 좀 더 정확히 표출하는 데 긍정적인 영향을 미친다고 볼 수 있다.

(3) 교사가 학생의 규칙성 발견능력에 대한 질적인 차이를 이해할 수 있게 해준다.

수집된 자료가 같아도 발견에는 학생 간에 질적인 차이가 있음을 알 수 있었다([그림 16]).

(4) 변형하지 않는다는 성질은 유지하면서 두 직선  $l, m$ 의 위치가 달라진

경우에도, (3)에서 추측한 성질이 성립하는 지를 확인하시오.

또한, 잘못된 추측이나 새로운 추측이 있으면 적으시오.

(학생 A)  $\angle EAB + \angle GBA = \angle OQI$  같다

(3) (2)의 자료로부터 알 수 있는 성질을 적으시오. (모두)

(학생 C)

[그림 16] 규칙성 발견의 질적인 차이를 이해할 수 있는 답안의 예

3) 정당화 유형의 평가에 미치는 영향

(1) 학생의 정당화 유형에 대한 종합적인 이해를 가능하게 해준다.

개발된 문항 10개의 반응 분석을 통해 연구대상학생 5명에 대한 정당화의 유형에 차이가 있음을 알 수 있었다.

9번 문항을 예로 들면, 평행사변형의 넓이가 최대인 경우로 각 학생이 발견한 추측을 정당화하는 문항인 데, 학생 A와 D는 '높이가 가장 크기 때문이다.'라고만 진술되어있고 높이가 가장 큰 이유에 대한 설명은 없다. 또한, 학생 C는 단순히 '가로와 세로의 길이가 쪽 퍼져 있을 때'라고 진술하고 있다. 논리성을 찾기 어렵다. 따라서, 세 학생 A, D, C는 경험적 정당화를 하고 있다고 볼 수 있다. 학생 B는 '평행사변형 EAFD를  $\triangle EAD$ 와  $\triangle FAD$ 로 나누어 보면,  $\triangle EAD$ 는  $\overline{AD}$ 를 밑변이라 할 때  $\overline{AD} \perp \overline{EG}$  인 경우 높이가 최대가 되므로  $\triangle EAD$ 의 넓이도 최대가 된다.(여기서, G는 대각선의 교점)'라고 기술하고 있다. 이 학생의 경우 두 대각선이 서로 수직일 때 높이가 가장 큰 이유는 명확히 밝히지 못했지만 평행사변형을 두 개의 삼각형으로 분리하여 생각했고 기호화에 의해 넓이를 높이와 관련지어 논리성을 가지고 설명하였으므로 연역적 정당화를 했다고 볼 수 있다. 학생 E는 '평행사변형은 넓이가 같은 네 개의 삼각형으로 나누어지므로 한 개만 따져보아도 된다. 그런데, 삼각형의 한 점을 움직여보면 원 위를 움직이니까 높이는 원의 반지름이 될 때 가장 크고 그 때는 두 대각선이 서로 수직인 경우이다.'라고 기술하고 있다. 높이가 최대인 경우는 대각선이 서로 수직일 때임을 근거를 가지고 연역적으로 정당화하고 있다고 볼 수 있다. 이상을 정리하면 다음의 <표 6>과 같다.

<표 6> 문항 9의 정당화 유형

학생	A	B	C	D	E
정당화 유형	경험적	연역적	경험적	경험적	연역적

이와 같은 방법으로 각 문항의 반응을 분석한 결과 얻어진 정당화 유형은 <표 7>과 같다. 이로부터 학생들의 정당화 유형을 종합적으로 이해할 수 있었다.

<표 7> 학생의 정당화 유형에 대한 총괄

학생 문번	A	B	C	D	E
1	연역적	경험적	경험적	경험적	경험적
2	경험적	경험적	경험적	경험적	연역적
3	경험적	경험적	경험적	경험적	연역적
4	경험적	연역적	경험적	경험적	연역적
5	경험적	판단불가	판단불가	판단불가	경험적
6	경험적	경험적	경험적	경험적	연역적
7	경험적	경험적	경험적	경험적	연역적
8	경험적	경험적	판단불가	판단불가	연역적
9	경험적	연역적	경험적	경험적	연역적
10	연역적	연역적	연역적	판단불가	연역적



학생 A는 8개의 문항이 ‘경험적 정당화’의 유형을, 2개의 문항이 ‘연역적 정당화’의 유형을 보이므로 전체적으로 판단할 때 ‘경험적 정당화’ 수준으로 볼 수 있다.

학생 B는 반응을 보인 9개의 문항 중에 6개의 문항이 ‘경험적 정당화’의 유형을, 3개의 문항이 ‘연역적 정당화’의 유형을 보이므로 전체적으로 판단할 때 ‘경험적 정당화’ 수준으로 볼 수 있다.

학생 C는 반응을 보인 8개의 문항 중에 7개의 문항이 ‘경험적 정당화’의 유형을, 1개의 문항이 ‘연역적 정당화’의 유형을 보이므로 전체적으로 판단할 때 ‘경험적 정당화’ 수준으로 볼 수 있다.

학생 D는 반응을 보인 7개의 문항 모두 ‘경험적 정당화’의 유형을 보이므로 확연하게 ‘경험적 정당화’ 수준으로 볼 수 있다.

학생 E는 2개의 문항이 ‘경험적 정당화’의 유형을, 8개의 문항이 ‘연역적 정당화’의 유형을 보이므로 전체적으로 판단할 때 ‘연역적 정당화’ 수준으로 볼 수 있다.

(2) 학생이 자신의 정당화를 표현할 수 있는 다양한 기회를 제공해 준다.

일반적인 증명문항에서 요구되는 결과물은 연역적 추론에 의한 정당화로 제한되기 때문에 연역적 수준에 도달하지 못한 대부분의 학생들은 자신의 정당화를 표현하지 못하고 공란으로 비워두는 경우가 대부분이다. 하지만, 탐구형 기하소프트웨어 환경에서는 귀납적 탐색 및 확인의 용이성을 바탕으로 학생이 자신의 수준에 맞는 정당화를 표현하는 데 다양한 기회를 제공한다. 그 예로, 문항 5에서 학생 A와 학생 E는 발견한  $1 < \overline{AC} < 3$ 를 정당화하는 과정에서 연역적인 증명은 못했지만 <표 8>과 같이 시각적인 근거를 제시하고 있다.

<표 8> 학생 A와 학생 E의 정당화

<p>문항 5에서 학생 A의 정당화 : 대각선 <math>\overline{AC}</math>의 길이가 1 이나 3이면 삼각형이 되고, 1보다 작으면 오목사각형이 된다.</p> <p>문항 5에서 학생 E의 정당화 : 네 점 B, A, C, D가 일직선으로 된다면 <math>\overline{AC}</math>의 길이는 1cm가 된다. 일직선은 사각형이 아니므로 1cm를 초과해야 되고, <math>\overline{BC}</math>와 <math>\overline{AB}</math>가 일직선이 되면 <math>\overline{AC}</math>의 길이는 3cm가 되는 데 그러면 도형은 삼각형이 되므로 3cm 미만이어야 한다.</p>
---

(3) 교사로 하여금 동일한 정당화 유형을 가지는 학생간의 질적인 차이를 이해할 수 있게 해 준다.

개발된 평가문항을 통해 같은 정당화 유형을 보이는 학생 간에도 지식과 경험의 정도에 따라 정당화 능력의 질적인 차이가 있음을 이해할 수 있었다. 그 예로 ‘두 대각선이 수직일 때, 평행사변형의 넓이는 최대가 됨’을 정당화해야 하는 문항 9에서 학생 B와 학생 E는 모두 연역적 정당화의 유형을 보이고 있으나, 정당화 능력에 있어 <표 9>와 같이 질적인 차이가 있음을 알 수 있었다.

<표 9> 학생 B와 학생 E의 정당화

문항 9에서 학생 B의 정당화 : 평행사변형 EAFD를  $\triangle EAD$ 와  $\triangle FAD$ 로 나누어 보면,  $\triangle EAD$ 는  $\overline{AD}$ 를 밑변이라 할 때  $\overline{AD} \perp \overline{EG}$  인 경우 높이가 최대가 되므로  $\triangle EAD$ 의 넓이도 최대가 된다.(여기서, G는 대각선의 교점)

문항 9에서 학생 E의 정당화 : 평행사변형은 넓이가 같은 네 개의 삼각형으로 나누어지므로 한 개만 따져보아도 된다. 그런데, 삼각형의 한 점을 움직여보면 원 위를 움직이니까 높이는 원의 반지름이 될 때 가장 크고 그 때는 두 대각선이 서로 수직인 경우이다.

(4) 소재의 생소함은 연역적 정당화의 난이도를 지나치게 높이는 결과를 가져오게 한다.  
 학생의 귀납적 발견능력을 이해하기 위해 생소한 소재를 다루다보니, 이후의 정당화 과정에 있어 연역적 정당화의 난이도가 높아지는 결과를 가져왔다. 그 예로 문항 4,5는 귀납적 추론의 난이도에 비해 연역적 정당화의 난이도가 지나치게 높았던 문제였다. 실제로, 한 명도 연역적 정당화에 성공하지 못했다.

### V. 결론 및 논의

본 연구에서는 추론능력의 평가에 탐구형 기하소프트웨어가 어떻게 활용되고 어떠한 영향을 미치는지를 작도능력의 평가, 귀납적 추론 능력의 평가, 정당화 유형의 평가의 세 가지 관점에서 분석하였다. 이로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 소프트웨어의 기능을 활용한 작도능력 평가문항은 학생으로 하여금 자기검사(self-examination)와 시행착오의 용이성을 바탕으로 좀 더 정확한 작도 능력을 드러내게 할 수 있고(조완영, 2000), 여기서 얻어지는 반응은 교사로 하여금 학생의 작도 능력에 대한 질적인 이해와 오류의 신속·명확한 판단을 가능하게 하는 증거를 제공할 수 있다.

둘째, 소프트웨어의 기능을 활용한 귀납적 추론능력의 평가문항은 학생으로 하여금 자료수집의 정확성, 신속성, 다양성을 바탕으로 폭넓고 깊이 있는 추측의 생산과 확인을 용이하게 하여, 좀 더 정확한 귀납적 추론능력을 드러내게 할 수 있다. 또한, 여기서 얻어지는 반응은 교사로 하여금 학생의 귀납적 추론능력을 질적으로 이해할 수 있게 하는 증거를 제공할 수 있다. 따라서 소프트웨어의 활용은 교사로 하여금 귀납추론 문항의 구성을 용이하게 하고 문항구성의 범위를 확대시킬 수 있게 한다.

셋째, 소프트웨어의 기능을 활용한 ‘작도-귀납추론-연역추론’의 연결 문항은 학생에게 자료수집과 확인의 용이성을 바탕으로 한 경험적 정당화의 가능성과 귀납적 탐색을 통한 분석의 용이성을 바탕으로 한 연역적 정당화의 가능성을 모두 제공함으로써 자신의 정당화를 표현할 수 있는 다양한 기회를 부여할 수 있다. 여기서 얻어지는 반응은 교사로 하여금 학생의 정당화 유형 및 능력을 질적으로 이해하기 위한 증거를 제공할 수 있다.

넷째, 소프트웨어의 기능을 활용한 ‘작도-귀납추론-연역추론’의 연결 문항은 학생으로 하여금 기하문제 해결의 전체 과정을 자연스럽게 경험하도록 도울 수 있다.

이와 같은 결론은 탐구형 기하소프트웨어를 활용한 추론능력의 평가가 교사와 학생 모두

에게 유용할 수 있음을 시사한다. 하지만, 기하영역의 새로운 평가환경이기 때문에 평가의 실제에서 다양한 문제점이 제기될 수 있을 것이다. 이에 연구과정에서 나타난 현상을 바탕으로 논의점을 살펴본다.

첫째, 새로운 평가환경은 올바른 작도를 기반으로 하므로, 작도에 오류가 생기면 그 이후의 탐색과 추론과정은 불가능하거나 제한적일 수밖에 없다. 따라서 작도평가 후 올바른 그림을 제공하여 탐색의 기회를 부여하는 방안이 논의될 필요가 있다.

둘째, 새로운 추론능력 평가환경에서는 탐색의 역동성으로 인해 지나치게 다양한 가설이 생산될 수 있다. 따라서 귀납추론 문항의 구성 시 평가의 본질을 훼손되지 않는 범위에서 탐색의 대상을 좁혀줄 필요가 있다.

셋째, 귀납추론 평가 시 소재의 생소함은 이후의 정당화 평가에서 연역적 정당화의 난이도를 높이는 결과를 가져올 수 있다. 따라서 평가 시 학생의 선택에 의해 단계적으로 단서를 제공해 주는 방안이 필요할 것이다.

넷째, 탐구형 기하소프트웨어의 성격과 장점에 대한 이해 및 충분한 연습을 통해 학생으로 하여금 컴퓨터 환경을 자연스러운 평가환경으로 인식하게 해야 할 것이다.

본 연구는 탐구형 기하소프트웨어의 활용을 통해 추론능력의 요소 중 무엇을 평가하는 데 어떠한 효과가 있는지를 밝히는 데 초점을 두었다. 향후의 연구는 평가의 실천적인 측면에서 이루어져야 할 것으로 생각된다. 이를 위해 탐구형 기하소프트웨어의 장점을 충분히 살릴 수 있는 양질의 평가문항이 많이 개발되어야 할 것이고, 객관적인 채점기준에 대한 연구도 이루어져야 할 것이다. 또한, 다수 적용을 통한 신뢰도, 객관도, 난이도등의 타당성 검증을 바탕으로, 동형문제 개발의 모델이 될 수 있는 평가도구가 제시될 수 있어야 할 것이다.

## 참고문헌

- 교육부 (1997). 중학교 교육과정 해설(Ⅲ) -수학, 과학, 기술, 가정-. 서울: (주)대한교과서
- 권성룡 (2001). 탐구형 기하소프트웨어 학습 환경에서의 지식의 내면화에 관한 연구. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.
- 류희찬 (1998). 수학교육 평가의 새로운 조망. 청람수학교육, 7, 1-11.
- 박운범, 박혜숙, 권혁천, 육인선(2004). 중학교 수학 7-나, 수학 8-나. 서울: 대한교과서(주)
- 우정호 (2000). 수학 학습 - 지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교 출판부.
- 장경운 (1998). 수학평가에 있어 테트놀러지의 역할. 청람수학교육, 7, 143-155.
- 조완영 (2000). 탐구형 기하소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례 연구. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.
- 조태근, 임성모, 정상권, 이재학, 이성재(2004). 중학교 수학 7-나, 수학 8-나. 서울: (주)금성출판사.
- 한국교육과정평가원 (2002). 국민공통기본교과별 평가 도구 개발연구(I).
- 황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽 (2001). 수학교육학 신론. 서울: 문음사.
- 片桐重男(1988). 수학적인 생각의 구체화. 이용률 외(역). 서울: 경문사.
- Balacheff, N. (1987). Processes of proof and situations of validation. Educational Studies in Mathematics, 18, 147-176.
- Bennett, D. S., & Finzer, W. F. (1995). From drawing to construction with the

- Geometer's Sketchpad. *The Mathematics Teacher*, 428-431.
- Finzer, W., & Jackiw, N. (1998). Dynamic manipulation of mathematical objects (<http://www.keypress.com/sketchpad>).
- Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education : A qualitative approach*. San Francisco: Jossey-Bass. 허미화(역)(1994). *질적사례연구법*. 서울: 양서원.
- NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- NCTM (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- O'Daffer, P. G., & Thornquist, B. A. (1993). Critical thinking, mathematical reasoning , and proof. In P. S. Wilson(Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* NY: Macmillan Publishing Company.
- Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670-675.

## A Study on the Assessment of Reasoning Ability Using Dynamic Geometry Software

Lee, Keun-Ju<sup>8)</sup> · Cho, Minshik<sup>9)</sup>

### Abstract

The purpose of this study is to investigate the applicability of DGS(dynamic geometry software) for the assessment of reasoning ability and the influence of DGS on the process of assessing students' reasoning ability in middle school geometry.

We developed items for assessing students' reasoning ability by using DGS in the connected form of 'construction - inductive reasoning - deductive reasoning'. And then, a case study was carried out with 5 students. We analyzed the results from 3 perspectives, that is, the assessment of students' construction ability, inductive reasoning ability, and justification types.

Items can help students more precisely display reasoning ability. Moreover, using of DGS will help teachers easily construct the assessment items of inductive reasoning, and widen range of constructing items.

Key Words : Geometry Education, Assessment, Reasoning Ability, Dynamic Geometry Software

---

8) Daejon Science High School (lkjkejo@hanmail.net)

9) Korea National University of Education (mscho@knue.ac.kr)