한국학교수학회논문집 제 9 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 9, Number 4, 481-495, December 2006

러시아 교사들의 창의적 수학 경진대회에 대한 연구

한인기[1]

수학교육은 교사와 학생의 교수-학습 활동이 중심을 이루기 때문에, 수학교육의 질적 향상은 수학교사의 전문성 계발 및 신장과 밀접한 관련을 맺고 있다. 본 연구에서는 러시아에서 수학교사들을 대상으로 개최되고 있는 창의적 수학 경진대회의 운영방법, 문항들, 결과들을 분석하고, 이를 바탕으로 창의적 수학 경진대회의 의의를 밝혔다. 본 연구의 결과는 수학교사의 전문성 신장 및 수학교육학 연구의 활성화를 위한 실질적이고 구체적인 방안을 모색하는데 기초 자료로 활용될 수 있을 것이다.

주요용어: 수학경진대회, 수학교사, 수학문제해결, 오류찾기

I. 서론

Kolmogorov(1998, p.28)는 '일반적인 수준의 보통 사람들은 좋은 책과 훌륭한 교사의 지도를 통해, 중등학교 수학 교과 내용뿐만 아니라, 미적분학의 기초까지 완전하게 습득할 수 있는 충분한 재능을 가지고 있다'고 주장하면서, 수학 교수-학습에서 수학교사 변인의 중요성을 강조하였다. 실제로, 수학교육은 교사와 학생의 교수-학습 활동이 중심을 이루기 때문에, 수학 교육의 질적 향상은 수학교사의 전문성 계발 및 신장과 밀접한 관련을 맺고 있다.

우리나라에서 수학교사의 전문성 계발 및 신장은 예비 수학교사의 양성교육, 교육대학원이나 교육연수원 등에서의 재교육을 통해 이루어지고 있다. 이들에 관련된 국내 수학교육학 연구들을 살펴보면, 신현용(2003), 한인기(2003), 박혜숙(2003), 강미광(2003), 이병수(2003), 이강섭(2003), 이재학(2003) 등은 전문성을 갖춘 예비 수학교사의 양성을 위한 교육과정 및 교수-학습 방법의 개발에 관련된 연구를 수행하였고, 박한식(1982), 박근덕(1993), 정창현 외(1994, 1995), 한국교육과정평가원(2004) 등은 수학교사 재교육의 개선을 위한 다양한 방안을 모색하였다. 이들 연구를 통해, 전문성을 갖춘 수학교사 양성 및 재교육을 위한 학술적인 근거가 마련되고, 실질적인 개선 방안의 모색이 시도되었다는 측면에서 교육적인 가치를 부여할 수 있을 것이다.

그러나, 이들 연구에서 수학교사의 전문성 신장, 수학교육학 연구의 활성화를 위한 구체적인 방안들이 충분하게 제시되었다고 보기는 힘들다. 이들 연구는 교사양성기관 및 교사재교육기관에 한정되기 때문에, 연구 결과들이 대중적으로 확산되는데 한계를 가지며, 희망하는 모든 수학교사들에게 수학교사의 전문성 신장 및 수학교육학 연구에 관련된 폭넓은 의사소

1) 경상대학교 (inkiski@gsnu.ac.kr)

통의 기회를 제공하지는 못하고 있다.

2005년부터 러시아에서는 모스크바국립사범대학교를 비롯한 몇몇 대학들이 주축이 되어 수학교사들을 대상으로 하는 창의적 수학 경진대회를 개최하였다. 러시아는 오래 전부터 다양한 교과목에 대한 경쟁시합을 초등학교 수준, 중등학교 수준, 대학교 수준에서 성공적으로 개최하고 있다. 이를 통해, 학문 영역에 대한 대중적인 관심을 집중시키고, 참가자들의 학문적인 열정을 고취하여 훌륭한 연구자로 이끌 수 있었다. 수학교사들을 대상으로 하는 창의적 수학 경진대회도 이러한 맥락에서 커다란 의미를 찾을 수 있다.

본 연구에서는 러시아에서 수학교사들을 대상으로 개최되고 있는 창의적 수학 경진대회의 운영 방법, 문항들, 결과들을 분석하고, 이를 바탕으로 창의적 수학 경진대회의 의의를 밝힐 것이다. 본 연구의 결과는 수학교사의 전문성 신장 및 수학교육학 연구의 활성화 방안을 모색하는데 기초 자료로 활용될 수 있을 것이다.

II. 러시아 수학교사들의 창의적 수학 경진대회

러시아 수학교사들의 창의적 수학 경진대회는 모스크바 수학 연속교육 센터(Moscow Center for Continuous Mathematical Education; MCCME), 모스크바 교육국의 열린교육 연구소, 모스크바국립사범대학교, 모스크바시립사범대학교의 주관으로, 모스크바국립사범대학교 수학학부에서 2004년 12월 5일에 1회 경진대회가 개최되었고, 2005년 9월 25일에는 2회 경진대회가 열렸다.

경진대회의 목적을 살펴보기 위해, 경쟁시합에 대한 러시아인들의 생각을 살펴보자. 러시아에는 다양한 교과목(수학, 물리, 화학, 생물, 경제학, 러시아어, 외국어 등등)에 대한 다양한 수준(초등학교 수준, 중등학교 수준, 대학교 수준)의 경쟁시합이 있다. 수학 경시대회도 오랜 역사를 가지고 있으며, 이를 통해 많은 훌륭한 수학자들을 발굴하여 양성하여 왔다. 수학 경시대회의 성격에 관련하여, Tihomirov(1998, p. 45)는 유명한 수학자인 Aleksandrov의 견해를 다음과 같이 기술하였다: '청소년의 재능 계발을 위해 현실적으로 가장 실효성 있는 도움의 하나는 경시대회, 즉 수학에 재능이 있고 수학에 흥미를 가진 모든 학생들이 참여할 수 있는 포괄적인 경쟁시합을 만드는 것이다. 이 경쟁시합은 뛰어난 학생들이 스스로를 수학자라고, 미래의 학자라고 느끼도록 해야 한다. 경쟁시합은 이들의 자기 신뢰를 확고히 하도록 해야 하며, 학문적인 열정에 불을 지피도록 해야 하며, 오직 꾸준하고 지속적인 노력만이 자신들을 목적 달성으로 인도하고 훌륭한 수학자의 대열로 인도한다는 생각을 갖도록 해야 한다'. 경쟁시합에 대한 유사한 관점을 Galperin & Tolpygo(1986), Kolmogorov(1986), Boltyanski & Yaglom(1965) 등의 연구에서도 찾아볼 수 있다. 이로부터, 러시아인들은 경쟁시합이 참가자들의 재능을 계발하고, 해당 분야에 대한 자기신뢰를 확고히 하며, 학문적인 열정을 고취하여, 경쟁시합 참가자들을 훌륭한 연구자의 길로 인도한다는 생각을 가지고 있음을 간접적으로 알 수 있다. 결국, 교사들을 대상으로 하는 수학 경진대회는 첫째, 수학교육에 대한 지속적인 노력과 학문적 열정을 통해 수학교사의 전문성 및 교수학적 재능을 계발, 육성시키며, 둘째 자기신뢰를 통해 스스로 훌륭한 수학교사임을 인식할 수 있도록 하는 것에 관련된다는 것을 알 수 있다.

경진대회는 참석시험과 통신시험의 두 가지 유형으로 구성된다. 참석시험은 참여 교사들이 모스크바국립사범대학교 수학학부에 모여 시험을 치르는 것이며, 통신시험은 러시아의

다른 지역에서 모스크바로 와서 시험을 치를 수 없는 교사들을 위한 것이다.

경진대회는 참가를 희망하는 교사들에 대해 개방되어 있지만, 학교에서 일주일에 9시간 미만의 수업을 맡는 교사들은 수상자에서 제외된다(이것은 학교에서 적은 시수를 강의하는 시간강사를 배제하기 위한 것인데, 러시아에서는 대학교의 교수들이 중등학교에서 시간강사로 강의하는 경우가 많이 있음).

제 1회 경진대회에서는 12개의 문제를 4시간동안 해결하였으며, 제 2차 경진대회에서는 10개의 문제를 4시간 30분 동안 해결하였다. 제 1회 경진대회에는 118명이 참가하였는데, 이 중에서 19명이 수상자로 선정되었다(6문제 이상을 완전하게 해결한 참가자들이 수상자로 선정되었음). 그리고, 제 2회 경진대회에는 93명의 교사가 참가하여, 이중에서 14명이 수상자로 선정되었다. 선정된 수상자들은 그 이름과 소속기관이 공개되며, 수상자들에게는 창의적 수학 경진대회의 인증서, 상장, 부상이 수여된다. 경진대회의 수상자를 제외한 참가자들의 점수는 해당학교나 교육청에 공개되지 않는다. 단지, 참가자의 이름이 아닌 수험번호에 대해 총점과 각 점수에서 맞은 점수가 공개된다.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M165	+	+	+	+	+	0	+	+	+	∓	±	+/2
M006	+	+	+	+	0	0	+	+	+	+	+	0
T485	+	+	+	+	0	0	+	+	+	+	+/2	−
M106	+	−	+	+	−	0	+	+	+	∓	+	+
T473	±	∓	+	+	0	−	+	+	+	∓	+	+
M098	+	+	+	0	+	0	+	+	−	+	+	∓

<표 1> 제 1회 경진대회 결과의 일부

<표 1>은 제 1회 경진대회에서 공개된 경진대회 결과의 일부이다(MCCME, 2006). '+'는 완전한 답을 구했거나 풀이에 사소한 결함이 포함된 경우이고, '±'는 풀이에 약간 심각한 결함이 포함된 경우이며, '+/2'는 문제가 절반만 해결된 경우이며, '∓'는 풀이가 올바르지는 않지만 풀이에 주목할 만한 진전이 포함된 경우이며, '−'는 완전히 틀린 풀이이며, '0'은 문제를 풀지 않았다는 것을 의미한다.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	합계
A001	10	10	0	0	8	10	2	6	4	8	58
A002	0	0	4	0	5	5	0	4	0	0	18
A003	3	0	0	0	3	0	0	2	2	0	10
A004	3	0	0	0	5	0	0	3	0	0	11
A005	10	10	9	0	10	8	8	4	8	4	71
A006	3	0	0	0	10	5	2	4	2	0	26

<표 2> 제 2회 경진대회 결과의 일부

한편, <표 2>는 제 2회 경진대회에서 공개된 경진대회 결과의 일부이다(MCCME, 2006). 제 2회 경진대회에서는 각 문제당 10점으로 채점되었다. 참가자의 성적, 수상자 명단, 경진대회 문제들 및 풀이는 모스크바 수학 연속교육 센터의 웹사이트에 공지된다.

III. 창의적 수학 경진대회의 문제 및 결과 분석

창의적 수학 경진대회에 출제되는 문제의 유형 및 구체적인 내용을 살펴보는 것은 수학교사의 전문성 및 교수학적 재능의 계발 및 육성에 대해, 경진대회 조직위원회에서 어떠한 생각을 가지고 있는가를 간접적으로 볼 수 있는 좋은 자료가 될 것이다.

1. 제 1회 창의적 수학 경진대회 문제들 및 결과 분석

제 1회 경진대회의 문제는 수학 문제해결과 오류찾기로 구성되어 있다. 1번 문제에서 6번 문제까지는 수학 문제해결이고, 7번에서 12번까지 문제는 제시된 문제해결에 포함된 오류를 찾는 것이다. 이제, 제 1회 창의적 수학 경진대회에 출제된 문제들을 살펴보자(MCCME, 2006).

※문제들을 풀어라(1~6).

1. 100개의 수의 합이 1000이다. 이 수들 중에서 가장 큰 수를 두 배만큼 증가시키고, 다른 한 수를 10만큼 작게 하였는데, 전체 수들의 합은 변하지 않았다. 처음의 수들 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

2. 칠판에 수 19941995⋯20032004가 적혀있다. 이 수를 임의로 둘로 나누면, 두 수를 얻게 되며, 이들 두 수를 더하자. 이제, 얻어진 합에 대해 유사한 조작을 계속하여 결국엔 한 자리 수가 얻어질 때까지 반복하자. 이때, 이러한 조작을 통해 얻어질 수 있는 한 자리수들을 구하여라.

3. 직각 MPN의 내부에 반직선 PO를 작도하였다. 이때, 얻어진 예각들 각각에 원을 내접시키는데, 이들 원은 반직선 PO와 점 O에서 접하였다. 원들의 반지름이 2, 3일 때, 선분 PO의 길이를 구하여라.

4. 다음 방정식을 풀어라: $(2x+2)(5-2x)(4x^2+8x+11)=10(2x+3)^2$.

5. 각뿔의 꼭지점에 있는 모든 평면각들의 합은 180°보다 크다. 각뿔의 옆모서리 각각은 밑면의 둘레의 절반보다 작다는 것을 증명하여라.

6. 격자칸이 그려진 종이에서 선을 따라 구멍이 없는 다각형을 잘랐다. 이 다각형은 선을 따라 2×1인 직사각형들로 분할될 수 있다고 한다. 이때, 다각형에는 길이가 짝수인 변이 적어도 하나 존재한다는 것을 증명하여라.

※ 제시된 문제 및 그 풀이(증명)에는 문제 자체에 오류가 있을 수도 있고, 풀이(증명)에 오류가 있을 수도 있다. 만약, 문제 자체가 옳지 않으면, 왜 그런가 설명하고, 풀이(증명)에서의 오류를 찾아라. 만약, 문제가 올바르면, 풀이(증명)에서의 오류를 찾아라(7~12).

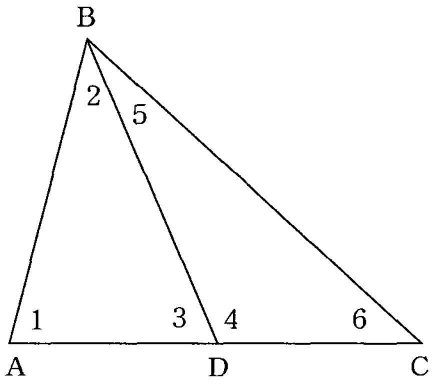
7. $\log_2 5-\log_3 4$와 1을 비교하여라.

풀이. $A=\log_2 5-\log_3 4=\log_2 2.5+1-2\log_3 2=y+1$이라 하자(단, $y=\log_2 2.5-2\log_3 2$라 하자).

$0<\log_3 2<1$이므로, $0<2\log_3 2<2$이다. $\log_2 2.5<\log_2 4=2$이므로, $y<0$이다. 결국, $A=y+1<1$이다. 즉, $\log_2 5-\log_3 4<1$이다.

8. 삼각형의 내각의 합은 180°이다.

증명. S를 삼각형 ABC의 내각의 합이라 하자. 선분 BD를 작도하고, 얻어진 각들에 대해 주어진 <그림 1>과 같이 번호를 붙이자. 그러면, $\angle 1+\angle 2+\angle 3=S$, $\angle 4+\angle 5+\angle 6=S$이다. 한편, $\angle 1+\angle 2+\angle 5+\angle 6=S$이고, $\angle 3+\angle 4=180^\circ$이다. 이제, S에 관한 두 등식을 더하면, $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=2S$, $S+180^\circ=2S$이다. 결국, $S=180^\circ$가 된다.



<그림 1>

9. 서로 다른 크기의 구슬 다섯 개로 된 목걸이가 있다. 인접한 어떤 두 구슬도 같은 색깔이 되지 않도록 구슬에 색칠하려 한다. 다섯 가지이하의 색으로 구슬들을 칠하는 방법의 수를 구하여라.

풀이. 첫 번째 구슬은 다섯 개의 색들 중에서 어느 색으로도 칠할 수 있다. 즉, 다섯 가지 방법이 가능하다. 그리고, 인접한 두 개의 구슬은 네 가지 방법으로, 나머지 두 개의 구슬 중의 하나는 네 가지 방법으로, 다른 것은 세 가지 방법으로 색칠할 수 있다. 그러므로, 구하는 방법의 수는 $3\times4^3\times5=960$이다.

10. $x^2+px+q=0$인 형태의 방정식에서 수 p, q가 근인 모든 방정식을 구하여라.

풀이. <u>첫 번째 방법</u>. 근과 계수의 관계에 의해,

$$\begin{cases} p+q=-p \\ pq=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} q=-2 \\ p=1 \end{cases}.$$

그러므로, 구하는 방정식은 $x^2=0$, $x^2-x-2=0$이다.

<u>두 번째 방법</u>. 수 p, q를 주어진 방정식에 대입하면,

$$\begin{cases} p^2+p^2+q=0 \\ q^2+pq+q=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p^2+q=0 \\ q(q+p+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=0 \\ 2p^2=0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} q=-p-1 \\ 2p^2-p-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} p=1 \\ q=-2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} p=-\frac{1}{2} \\ q=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

그러므로, 구하는 방정식은 $x^2=0$, $x^2-x-2=0$, $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$이다.

11. $\mathbb{R}$에서 연속인 임의의 주기함수의 부정적분들 중에서 주기함수를 적어도 하나 찾을

수 있다.

증명. $f(x)$를 주기함수라 하자. 즉, $\forall x \in \mathbb{R}$,에 대해 $f(x+T)=f(x)$. 그러면, $\int f(x+T)dx = \int f(x)dx$. 만약, $F(x)$가 $f(x)$의 부정적분들 중의 하나라고 하면, 함수 $f(x+T)$의 부정적분은 $F(x+T)$이다. 결국, $\int f(x+T)dx = \int f(x)dx$로부터 $F(x+T)=F(x)+C$가 유도된다(단, $C \in \mathbb{R}$). 특히, $C=0$이면, $F(x+T)=F(x)$이고, $F(x)$는 주기함수이다.

12. 삼각형의 세 변의 중점을 지나는 원의 중심이 삼각형의 각의 이등분선의 하나에 속하면, 삼각형은 이등변삼각형이다.

증명. 삼각형의 변 BC, AB, AC의 중점 K, M, N을 지나는 원 S의 중심을 O라 하고, O가 각 A의 이등분선에 속한다고 하자. 각 A의 이등분선은 삼각형 AMN의 외접원 S_1과 점 P에서 교차한다고 하자. 그러면, PM=PN이다(호의 상등으로부터 상응하는 현의 상등이 유도됨). 게다가, OM=ON(원 S의 반지름이므로). 점 P, O는 선분 MN의 끝점들로부터 같은 거리만큼 떨어져 있으므로, 점 A를 지나는 직선 OP는 선분 MN의 수직이등분선이다. 결국, AM=AN이고 AB=AC이다.

이제, 창의적 수학 경진대회의 채점 결과를 살펴보자. 제 1회 경진대회에는 118명이 참가하였고, 각 문항별 득점 결과를 요약하면 <표 3>과 같다.

문제번호		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
+	인원수(명)	65	9	75	18	4	0	79	85	26	13	4	5
	비율(%)	55.1	7.6	63.6	15.3	3.4	0	66.9	72.0	22.0	11.0	3.4	4.2
±	인원수(명)	17	3	3	3	4	0	7	1	0	2	5	2
	비율(%)	14.4	2.5	2.5	2.5	3.4	0	5.9	0.8	0	1.7	4.2	1.7
+/2	인원수(명)	0	0	5	0	0	0	0	1	0	0	8	14
	비율(%)	0	0	4.2	0	0	0	0	0.8	0	0	6.8	11.9
∓	인원수(명)	9	19	1	0	3	0	3	3	2	20	1	3
	비율(%)	7.6	16.1	0.8	0	2.5	0	2.5	2.5	1.7	16.9	0.8	2.5
−	인원수(명)	12	46	21	60	16	40	16	20	53	70	35	48
	비율(%)	10.2	39.0	17.8	50.9	13.6	33.9	13.6	16.9	44.9	59.3	29.7	40.7
0	인원수(명)	15	41	13	37	91	78	13	8	37	13	65	46
	비율(%)	12.7	34.8	11.0	31.3	77.1	66.1	11.0	6.8	31.3	11.0	55.1	39.0

<표 3> 제 1회 경진대회 문항별 득점 결과

<표 3>에서 절반이상이 완전한 정답을 제시한 문제는 문제 1, 3, 7, 8이며, 완전한 정답을 제시한 비율이 10%에 미치지 못하는 문제는 2, 5, 6, 11, 12이다. 한편, 절반이상이 완전히 틀린 풀이를 제시한 문제는 4, 10이며, 절반이상이 문제해결을 시도하지 못한 문제는 5, 6, 11이다. 특히, 문제 6의 경우에는 어느 누구도 문제해결에서 성공적인 접근을 찾지 못하였

고, 66.1%는 문제해결을 시도하지 못했다.

이제, <표 3>에서 문제해결을 위해 의미있는 접근을 찾아 득점을 한 경우(+, ±, +/2, ∓)와 완전히 실패한 경우(−, 0)를 비교하면, <표 4>와 같다.

문제번호		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
득점	인원수(명)	91	31	84	21	11	0	89	90	28	35	18	24
	비율(%)	77.1	26.8	71.2	17.8	9.3	0	75.4	76.3	23.7	29.7	15.3	20.3
실패	인원수(명)	27	87	34	97	107	118	29	28	90	83	100	94
	비율(%)	22.9	73.7	28.8	82.2	90.7	100	24.6	23.7	76.3	70.3	84.7	79.7

<표 4> 제 1회 경진대회에서 득점과 실패

<표 4>에서 문제해결을 위한 의미있는 접근의 비율이 70%를 넘는 경우는 문제 1, 3, 7, 8이며, 실패의 비율이 70%를 넘는 경우는 문제 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12이다. 이때, 한 가지 흥미로운 점은 각각의 문제에 대해, 경진대회 참가자의 70%이상이 의미로운 접근을 찾아내거나 또는 참가자의 70%이상이 완전히 실패를 하였다는 것이다.

이제, 경진대회 참가자들의 득점을 살펴보자. 경진대회의 결과에서 '+'을 8점, '±'을 6점, '+/2'을 4점, '∓'을 2점, '−'와 '0'을 0점으로 환산하면, 만점이 96점이 된다. 이때, 제 1회 경진대회에 참여한 118명의 평균 점수를 계산하면, 30.4점이다.

검사의 신뢰도를 보기 위해, 문항내적일관성을 측정하는 신뢰도인 Cronbach α를 계산하였더니, 0.76으로 신뢰도가 높았다. 그리고, 문항의 변별도를 확인하기 위해, 점이연상관(point-biserial correlation)에 의해 분석하였으며, 그 결과는 <표 5>와 같다.

문제번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
변별도	0.59	0.60	0.51	0.46	0.42		0.60	0.52	0.62	0.61	0.62	0.58
난이도	-0.85	0.52	-0.85	0.39	0.87	3.55	-0.95	1.00	0.22	0.41	0.67	0.58

<표 5> 제 1회 경진대회의 문항 변별도 및 난이도

<표 5>에서 보는 바와 같이, 제 1회 경진대회의 문항들은 6번을 제외하고는 점이연상관계수가 양수로 나왔으며, 각각의 문항이 변별력이 있는 것으로 나타났다. 문제 6은 <표 4>에서 보는 바와 같이, 모든 학생이 전혀 득점을 하지 못했으므로, 변별력을 가지지 못한다.

점수	0~7	8~15	16~23	24~31	32~39	40~47	48~55	56~63	64~71	72~79	80~96
인원수	6	20	12	28	17	11	12	5	5	2	0

<표 6> 제 1회 경진대회의 득점 분포표

한편, Rasch의 1-모수문항반응모형에 근거하여, 경진대회 문항들의 난이도를 계산한 것이 <표 5>에 제시되어 있다. <표 5>에 의하면, 문제 1, 3, 7이 쉬운 것으로 나타났으며, 문제 4, 9, 10이 보통이며, 문제 2, 5, 8, 11, 12가 어렵고, 문제 6이 매우 어려운 것으로 나타났다.

실제로, 참가자들의 득점 분포를 정리하면, <표 6>과 같았다.

<표 6>를 분석해 보면, 16점(두 문제를 완전하게 해결하거나 상응하는 부분점수를 얻는 경우)이상을 받은 참가자는 92명으로, 전체 참가자의 81.2%이며, 32점(네 문제를 완전하게 해결하거나 상응하는 부분점수를 얻는 경우)이상을 받은 참가자는 52명으로, 전체 참가자의 44.1%였다. 한편, 56점(7문제를 완전하게 해결하거나 상응하는 부분점수를 얻는 경우)이상을 받은 참가자는 12명으로, 전체 참가자의 10.2%에 달했다. 이때, 전체 참가자의 81.2%이상이 두 문제이상을 완전히 풀거나 상응하는 득점을 했다는 것은 주목할 만하다(한 문제도 완전하게 풀지 못하거나 상응하는 득점을 하지 못한 경우는 전체의 5.1%에 불과함). 한인기(2006)는 경쟁시합에서 대부분의 참가자가 일정 수준이상의 득점을 획득하는 것은 경쟁시합에 교육적 의의를 부여하는데 긍정적인 요인이 된다고 지적했다.

2. 제 2회 창의적 수학 경진대회 문제들 및 결과 분석

제 2회 경진대회에서는 1번에서 4번 문제까지는 수학 문제해결, 5번에서 7번 문제까지는 문제해결에서 오류찾기, 8번과 9번 문제는 다양한 해결 방법 찾기, 10번 문제는 제시된 페르마 정리의 증명과정에서 가능한 많은 오류찾기이다. 제 2회 창의적 수학 경진대회에 출제된 문제들을 살펴보자(MCCME, 2006).

※ 문제들을 풀어라(1~4).

1. 두 명의 주부가 매일 한 달 동안 우유를 구입하였다. 우유의 가격은 매일 변하였는데, 한 달 동안의 평균 가격은 20루블이었다. 첫 번째 주부는 매일 1리터씩 우유를 샀으며, 두 번째 주부는 20루블만큼씩 샀다. 이들 중에서 누가 한 달 동안에 돈을 더 지불했으며, 누가 우유를 더 많이 샀는가?

2. 삼각형의 각의 이등분선들이 외접원과 점 A′, B′, C′에서 교차한다. 이때, AA′+BB′+CC′은 삼각형의 둘레보다 크다는 것을 증명하여라.

3. 다음 방정식을 풀어라: $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3)$.

4. 선분의 끝점에 1을 각각 적었다. 각 단계마다 각각의 인접한 두 수들 사이에 이들의 합을 적는다. 즉, 첫 번째 단계에서는 두 개의 1사이에 이들의 합 2를 적고, 두 번째 단계에서는 3을 두 개 적는다 등등. 2005단계를 수행했다고 하자. 기록된 수들 중에 수 2005는 몇 개가 있는가?

※ 제시된 문제 및 그 풀이(증명)에는 문제 자체에 오류가 있을 수도 있고, 풀이(증명)에 오류가 있을 수도 있다. 만약, 문제 자체가 옳지 않으면, 왜 그런가 설명하고, 풀이(증명)에서의 오류를 찾아라. 만약, 문제가 올바르면, 풀이(증명)에서의 오류를 찾아라(5~7).

5. 다음 방정식을 풀어라: $\sqrt{x^2-1} = (x+5)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

답: -1.

풀이. 주어진 방정식을 $\sqrt{(x-1)(x+1)}=(x+5)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 로 나타내자. 그러면, $x=-1$은 방정식의 근이다. 게다가, $\sqrt{x-1}=(x+5)\sqrt{\frac{1}{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x-1})^2=x+5 \\ x\neq 1 \end{cases}$. 얻어진 연립방정식은 해를 가지지 않는다.

6. 정리. 만약, 증가함수가 어떤 구간에서 미분가능이면, 이 구간의 각 점에서 이 함수의 도함수는 양의 값을 가진다.

증명. 함수 f(x)가 어떤 구간 I의 각 점 x_0에서 도함수를 가진다고 하자. 그러면, $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. f(x)가 구간 I에서 증가하므로, $x>x_0$에 대해 $f(x)>f(x_0)$이며, $x<x_0$에 대해 $f(x)<f(x_0)$이 성립한다. 두 가지 경우 모두에서, 기술한 분수는 양의 값을 가지므로, $f'(x_0)>0$이다. 이와 같이, 구간 I의 임의의 점에서 도함수는 양의 값을 가지며, 이로부터 정리가 증명된다.

7. 정리. 삼면각의 평면각들의 합은 360°보다 작다.

증명. 꼭지점이 P인 주어진 삼면각의 모든 모서리와 교차하지만 삼면각의 어느 모서리와도 어느 면과도 직각을 이루지 않는 평면 α를 작도하자. α가 삼면각의 모서리와 점 A, B, C에서 교차한다고 하자.

평면 α에 대한 점 P의 정사영 P′을 생각하자. 그러면, 삼면각의 평면각 APB, BPC, CPA의 사영은 각 AP′B, BP′C, CP′A가 된다. 변들이 사영평면과 교차하는 각의 정사영은 원래의 각보다 크므로, $\angle APB+\angle BPC+\angle CPA < \angle AP'B+\angle BP'C+\angle CP'A$가 성립한다.

평면 α의 작도 방법에 의해, 다음 두 가지가 가능하다: (1) P′이 삼각형 ABC의 내부에 속한다; (2) P′이 삼각형 ABC의 외부에 속한다. 첫 번째 경우에서 각 AP′B, BP′C, CP′A의 합은 360°이고, 두 번째 경우에서는 360°보다 작다. 결국, 구하는 평면각들의 합은 360°보다 작고, 이로부터 정리가 증명된다.

※ 각각의 문제에 대해 가능한 많은 풀이 방법을 찾고, 이들 풀이를 여러분의 학생들이 하는 것처럼 기술하여라(8~9).

8. 다음 수들을 비교하여라: $\sqrt{2004}+\sqrt{2006}$와 $2\sqrt{2005}$

9. 삼각형 ABC가 주어졌고, $E\in[AC]$, $|AE|:|EC|=3:4$, $M\in[BC]$, $|BM|=|MC|$, $(AM)\cap(BE)=O$이다. 이때, $|EO|:|OB|$를 구하여라.

IV. 2005년 8월 "새신문"에 페르마 정리에 대한 새로운 증명이 실렸다. 주어진 증명에서 가능한 많은 수학적 오류를 찾아라.

10. 그래서, 만약 X와 Y가 방정식 $X^n+Y^n=Z^n$에서의 정수라면, Z(단, n>2)는 항상 정수가 아니다. 페르마 정리를 다루기 전에, 우선 피타고라스 정리를 살펴보자: "빗변의 제곱은 밑변의 제곱의 합과 같다". 이를 기술하기 위해, 임의의 변수를 사용할 수 있다. 이 정리를 $X^2+Y^2=R^2$(단, X, Y, R은 정수)와 같이 적지만, 페르마 정리에서는 Z는 정수가 아니라고 주장한다. 증명해 보자. 같은 X, Y값에 대해 Z는 R과 같지 않다. 쉽게, 대수적으로, 그리고 논리적으로 Z가 항상 R보다 작다는 것이 증명된다. X와 Y를 좀더 높은 차수를 가지도록 할 때에, 우리는 이들에게 자신을 곱한다. 그리고 나서, 이들을 더하고, 같은 차수 n을 가지

는 Z를 얻는다. R의 차수를 높일 때에 가수들 각각에 R을 곱해야 하는데, R은 X, Y보다 크다. 예를 들어, $R^3=(X^2+Y^2)R=X^2R+Y^2R$.

삼각형 XYR의 변의 길이를 삼각함수의 형태로 나타내자: $X=R\sin A$, $Y=R\cos A$. 즉, $Z^n=X^n+Y^n=R^n(\sin A+\cos A)$. 그러면, $Z=R(\sin A+\cos A)$. 이전에, 우리는 Z가 항상 R보다 작다는 것을 증명하였으므로, $\sin A+\cos A<1$. 그러한 삼각함수는 임의의 고학년 수학교과서에서 찾아볼 수 있으며, 삼각함수표나 그래프를 이용하여, 만약 함수값이 1보다 작으면 각 A는 60°보다 크고 90°보다 작다는 것을 확인할 수 있다. 밑변들 사이에 놓인 직각에 대해서는 어떻게 되는가? 이것은 더 이상 직각이 될 수 없으며, $60^\circ<B<90^\circ$가 된다.

수학에서 3점 이상을 받는 10학년 학생이라면, 누구나 삼각함수의 변들 사이의 관계식인 $Z^2=X^2+Y^2-2XY\cos B$라는 공식을 떠올릴 수 있을 것이다. $60^\circ<B<90^\circ$이면, $\cos B$는 정수값이 아니다. 이것은, Z가 어쩔 수 없이 정수인 X, Y에 대해 그러한 값이라는 것을 의미한다. 이것으로 정리가 증명된다.

제 2회 경진대회에 출제된 문제들의 유형을 제 1회 경진대회와 비교하면, '수학 문제해결'과 '문제해결에서 오류찾기'는 동일한 유형이지만, '다양한 해결방법 찾기'는 새롭게 추가된 유형이다. '다양한 해결방법 찾기'는 수학적 사고의 유연성, 사고수준의 비약과 관련하여, 중등학교 수학 교수-학습의 실제에서 중요성이 꾸준히 강조되어왔던 주제이므로, 다양한 해결방법 찾기가 수학교사를 대상으로 하는 창의적 수학 경진대회에 한 유형으로 포함된 것은 의미로운 시도라 할 수 있다.

이제, 창의적 수학 경진대회의 채점 결과를 살펴보자. 제 2회 경진대회에는 93명이 참가하였고, 각 문제당 10점씩 배점되어 100점 만점으로 채점하였다. 검사의 신뢰도를 보기 위해, 문항내적일관성을 측정하는 신뢰도인 Cronbach α를 계산하였더니, 0.84로 신뢰도가 높았다. 그리고, 문항별 득점 결과를 요약하면 <표 7>과 같다.

문제번호		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9-10점	인원수(명)	15	12	6	0	38	24	1	1	1	0
	비율(%)	16.1	12.9	6.5	0	40.9	25.8	1.1	1.1	1.1	0
7-8점	인원수(명)	1	0	0	0	6	1	3	3	3	3
	비율(%)	1.1	0	0	0	6.5	1.1	3.2	3.2	3.2	3.2
4-6점	인원수(명)	5	0	3	0	12	18	3	33	19	21
	비율(%)	5.4	0	3.2	0	12.9	19.4	3.2	35.5	20.4	22.6
1-3점	인원수(명)	39	0	4	0	15	7	19	40	30	25
	비율(%)	41.9	0	4.3	0	16.1	7.5	20.4	43.0	32.3	26.9
0점	인원수(명)	33	81	80	93	22	43	67	16	40	44
	비율(%)	35.5	87.1	86.0	100	23.7	46.2	72.0	17.2	43.0	47.3

<표 7> 제 2차 경진대회 문항별 득점

<표 7>을 살펴보면, 절반이상의 참가자가 4점 이상을 획득한 문제는 5번 문제이며, 나머

지 문제들은 절반이상의 참가자가 3점이하의 점수를 받았다. 특히, 문제 2, 3, 7은 절반 이상의 참가자가 0점을 받았고, 문제 4는 모든 참가자가 점수를 받지 못했다.

그리고, 문항의 변별도를 확인하기 위해, 점이연상관(point-biserial correlation)에 의해 분석하였으며, 그 결과는 <표 8>과 같다.

문제번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
변별도	0.73	0.71	0.57		0.74	0.82	0.64	0.64	0.66	0.61
난이도	-0.19	3.01	0.84	3.29	-0.12	0.51	-0.67	-0.34	-0.04	0.01

<표 8> 제 2회 경진대회의 문항 변별도 및 난이도

<표 8>에서 보는 바와 같이, 제 2회 경진대회의 문항들은 4번을 제외하고는 점이연상관계수가 양수로 나왔으며, 각각의 문항이 변별력이 있는 것으로 나타났다. 문제 4는 <표 7>에서 보는 바와 같이, 모든 학생이 전혀 득점을 하지 못했으므로, 변별력을 가지지 못한다.

한편, Rasch의 1-모수문항반응모형에 근거하여, 경진대회 문항들의 난이도를 계산한 것이 <표 8>에 제시되어 있다. <표 8>에 의하면, 문제 7이 쉬운 것으로 나타났으며, 문제 1, 5, 8, 9, 10이 보통이며, 문제 3, 6이 어렵고, 문제 2, 4가 매우 어려운 것으로 나타났다.

한편, 총점을 계산했을 때, 점수대별 참가자들의 인원분포를 살펴보면, <표 9>와 같다.

점수	0~10	11~20	21~30	31~40	41~50	51~60	61~70	71~80	81~90	91~100
인원수	32	19	16	10	8	5	1	2	0	0

<표 9> 제 2회 경진대회의 득점 분포표

<표 9>를 살펴보면, 제 2회 경진대회의 문제가 제 1회 경진대회보다 어려웠다는 것을 알 수 있다. 실제로, 참가자들의 평균 점수를 계산하면, 제 1회 경진대회보다 8점이상이 낮은 22.3점이었다.

한편, 두 문제를 완전하게 해결하거나 상응하는 부분점수를 얻은 경우를 제 1회 경진대회(15점이하)와 제 2회 경진대회(20점이하)를 비교하면, 제 1회 경진대회에서는 참가자의 17.0%가 여기에 속하였고, 제 2회 경진대회에서는 54.8%가 여기에 속하였다. 특히, 2차 경진대회에서는 10점이하의 점수를 받은 참가자가 전체의 34.4%에 달하였다.

IV. 창의적 수학 경진대회의 의의

수학교사를 대상으로 하는 창의적 수학 경진대회의 긍정적 의의를 수학교사의 전문성 신장과 수학교육학의 이론 및 실제에 대한 연구의 활성화라는 측면에서 살펴보자.

수학교사의 전문성 신장에 관련된 창의적 수학 경진대회의 의의로, 첫째 수학교사들이 중등학교 수학 교과내용에 대한 폭넓은 지식을 갖추게 된다. 경진대회에 출제되는 문제의 해

결은 중등학교 수학 교과내용에 관련된 폭넓은 지식을 바탕으로 한다. 그러므로, 경진대회를 준비하면서 수학교사들은 다양한 참고문헌을 통해 중등학교 수학에 관련된 교과내용지식을 폭넓게 학습하는 경험을 가지게 된다.

둘째, 수학교사들이 비정형적인 문제에 대한 해결능력을 계발할 수 있는 기회를 가진다. 창의적 수학 경진대회에 제시되는 문제들은 비정형적이기 때문에, 경진대회를 준비하면서 수학교사들은 수학교과서에 제시된 정형적인 문제 뿐만 아니라, 다양한 비정형적인 수학문제들을 스스로의 힘으로 해결하는 경험과 능력을 가지게 된다.

셋째, 수학교사들이 학생들의 문제해결에 많은 주의를 기울이게 된다. 경진대회에 '문제해결에서 오류찾기', '다양한 방법으로 해결하기' 등과 같은 유형의 문제가 출제되기 때문에, 경진대회를 준비하면서 교사들은 학생들의 문제해결에서 발생하는 오류들, 학생들의 다양한 해결방법에 많은 주의를 기울이게 된다.

넷째, 수학교사들이 수학교과서에 대한 작업에서 창의적 접근을 시도하게 된다. 에르든예프 · 한인기(2005, p.68)는 수학 참고문헌과 수학적 창의성에 관련하여, '수학 관련 도서들을 단순히 읽도록 지도하는 것이 아니라, 학생들이 내용을 이해하고 깊이 생각하며, 물음에 대한 다양한 풀이 방법을 찾도록 가르치는 것이 중요하다...'고 주장하면서, 수학관련 문헌에 제시된 내용을 깊이 이해하고 생각하며, 문제에 대한 다양한 풀이방법 발명을 강조하였다. 경진대회를 준비하면서, 교사들은 수학교과서를 창의적 문제해결, 오류발생가능성 등의 시각에서 깊이 이해하고 생각하려 시도하며, 교과서에 제시된 문제들에 대한 다양한 풀이 방법을 찾으려고 시도할 것이다.

수학교육학의 이론 및 실제에 대한 연구의 활성화라는 측면에서 기대되는 점들을 살펴보자. 첫째, 수학교사들의 수학교육학 연구에 대한 보상을 제공하게 된다. 수학 교수-학습의 개선을 위해, 다양한 문헌들을 가지고 폭넓게 수학교육학의 이론과 실제를 연구하는 교사들에게 적절한 보상의 기회를 제공하는 것은 중요하다. 이들 연구하는 수학교사들이 경진대회를 통해서 가지게 되는 적절한 수상의 경험은 부단한 노력에 대한 보상이 될 것이며, 후속적인 연구를 위한 자극이 될 수 있을 것이다.

둘째, 수학교육학 연구가 양적으로 질적으로 증대된다. 문제해결이나 학생들의 오류에 관련된 문제들은 수학교육학의 중요한 연구주제들이다. 창의적 수학 경진대회에 제시된 새로운 비정형적인 문제들, 발생가능한 오류들, 다양한 접근이 가능한 문제들은 수학교육학 연구의 흥미로운 대상들로, 수학교육학 연구가 양적으로 그리고 질적으로 증대되는 좋은 자료가 될 것이다.

셋째, 수학교육학 연구에 대한 활발한 의사소통이 이루어지게 된다. 창의적 수학 경진대회를 준비하면서, 교사들은 비정형적인 문제의 해결, 오류들, 수학의 시사적인 내용들(제 2회 경진대회의 10번 문제처럼)에 대한 다양한 정보를 찾고, 이를 공유하며, 폭넓은 의사소통을 경험하게 된다. 그리고, 이러한 정보교환은 수학교육학의 의미로운 연구성과들이 빠르게 확산되는 좋은 기회가 될 것이다.

V. 결론

본 연구에서는 러시아에서 수학교사들을 대상으로 개최되고 있는 창의적 수학 경진대회의 운영 방법, 문항들, 결과를 분석하고, 이를 바탕으로 창의적 수학 경진대회의 의의를 규명하

였다.

러시아 수학교사들의 창의적 수학 경진대회는 참석시험과 통신시험으로 운영되며, 희망하는 모든 수학교사들에 대해 개방된다(단, 학교에서 일주일에 9시간 미만의 수업을 맡는 교사들은 수상자에서 제외된다).

제 1회 창의적 수학 경진대회의 문제들은 수학 문제해결과 오류찾기로 구성되었으며, 12개의 문제를 4시간동안 해결하였다. 한편, 제 2회 창의적 수학 경진대회의 문제들은 수학 문제해결, 오류찾기, 다양한 해결 방법 찾기로 구성되었으며, 10개의 문제를 4시간 30분 동안 해결하였다. 제 1회 창의적 수학 경진대회에는 118명이 참가하여 19명이 수상자로 선정되었고, 제 2회 창의적 수학 경진대회에는 93명의 교사가 참가하여 14명이 수상자로 선정되었다.

제 1회 창의적 수학 경진대회의 결과를 살펴보면, 채점 결과를 96점 만점으로 환산하여 계산하면, 참가자들의 평균은 30.4점이었다. 그리고, 평가의 신뢰도에 대해 Cronbach α를 계산하면, 0.76으로 신뢰도가 높았다. 그리고, 제 1회 창의적 수학 경진대회 문항들에 대해 변별도, 난이도를 계산하여 분석하였다. 한편, 제 2회 창의적 수학 경진대회의 결과를 살펴보면, 전체 참가자들의 평균은 100점 만점의 22.3점이었고, Cronbach α는 0.84로 평가의 신뢰도가 높았다. 그리고, 제 2회 창의적 수학 경진대회 결과에 대해서도 변별도, 난이도를 계산하여 분석하였다.

한편, 창의적 수학 경진대회의 의의를 수학교사의 전문성 신장과 수학교육학의 이론 및 실제에 대한 연구의 활성화라는 측면에서 규명하였다. 수학교사의 전문성 신장에 관련하여, 첫째 수학교사들이 중등학교 수학 교과내용에 대한 폭넓은 지식을 갖추게 되며, 둘째 수학교사들이 비정형적인 문제에 대한 해결능력을 계발할 수 있는 기회를 가지며, 셋째 수학교사들이 학생들의 문제해결에 많은 주의를 기울이게 되며, 넷째 수학교사들이 수학교과서에 대한 작업에서 창의적 접근을 시도하게 된다.

한편, 수학교육학의 이론 및 실제에 대한 연구의 활성화에 관련하여, 첫째 수학교사들의 수학교육학 연구에 대한 보상을 제공하게 되며, 둘째 수학교육학 연구가 양적으로 질적으로 증대되며, 셋째 수학교육학 연구에 대한 활발한 의사소통이 이루어지게 된다.

본 연구의 결과는 수학교사의 전문성 신장 및 수학교육학 연구의 활성화를 위한 실질적이고 구체적인 방안을 모색하는데 기초 자료로 활용될 수 있을 것이다.

참고문헌

강미광 (2003). 중등 교사 양성을 위한 미적분학 강좌 운영방안, 수학교육, 제 42권 4호, 523-540.

박근덕 (1993). 일본의 수학과 교원 연수 상황 고찰, 수학교육, 제 32권 4호, 412-430.

박한식 (1982). 수학교사 재교육에 관한 실태 조사 연구, 수학교육, 제 20권 2호, 1-6.

박혜숙 (2003). 중등 교사 양성을 위한 기하 영역의 교육과정 개발, 수학교육, 제 42권 4호, 503-522.

신현용 (2003). 교사 양성 대학 수학교육과 교육과정 및 교수-학습 방법 개발에 관한 연구, 수학교육, 제 42권 4호, 431-452.

에르든에프 · 한인기 (2005). 유추를 통한 수학탐구. 서울: 승산.

이강섭 (2003). 중등 교사 양성을 위한 확률과 통계 영역의 교육과정 개발, 수학교육, 제

42권 4호, 561-578.

이병수 (2003). 교사 양성 대학에서의 해석학의 학습과 지도, 수학교육, 제 42권 4호, 541-560.

이재학 (2003). 중등 교사 양성을 위한 이산수학 강좌에 대한 연구, 수학교육, 제 42권 4호, 579-588.

정창현 외 (1994). 수학과 교사 재교육 실태 분석 및 개선 방안 연구-1, 2급 정교사 자격 연수를 중심으로-, 대한수학교육학회논문집, 제 4권 1호, 71-98.

정창현 외 (1995). 수학과 초·중등 교사 재교육 실태 분석 및 개선 방안 연구 II, 수학교육, 제 34권 2호, 297-343.

한국교육과정평가원 (2004). 수학과 교사의 학생 평가 전문성 신장 모형과 기준. 서울: 한국교육과정평가원.

한인기 (2003). 중등 교사 양성을 위한 수학교육학 및 수학사 강좌에 대한 연구, 수학교육, 제 42권 4호, 465-480.

Boltyanski & Yaglom (1965). Shkoknyi matematichecki kruzok pri MGU i Moskovskie matematicheskie olimpiady, In Eds. Boltyanski & Leman, Zbornik zadach Moskovskih matematicheskih olimpiad, 3-50.

Galperin & Tolpygo (1986). Moskovskie matematicheskie olimpiady, Moskva: Prosveshenie.

Kolmogorov (1986). Predislovie, In Galperin & Tolpygo, Moskovskie matematicheskie olimpiady, 3-4.

Kolmogorov (1988). Matematika-nauka and professia. Moscow: Fiz-mat Lit.

MCCME (2006). 웹자료: http://www.mccme.ru/oluch/

Tihomirov (1998). Razmyshleniya o pervyh moskovskih matematicheskih olimpiadah, Matematicheskoe Prosveshenie 2, 41-51.

러시아 수학교사들의 창의적 수학 경진대회에 대한 연구

A Study on Creative Mathematical Competition for Russian Mathematics Teachers

Han, Inki[2)]

Abstract

In this paper we analyze creative mathematical competition for Russian mathematics teachers, and try to find out some suggestions for developing mathematics teacher's professional abilities. For these purposes we analyze problems and result data of the creative mathematical competition(for example, mean, distribution, reliability, discrimination, difficulty), and extract some meanings related with expanding teacher's professional abilities and activating studies related with mathematical pedagogy.

Key Words: Mathematics teacher, Creative mathematical competition, Problem solving, Finding error

2) Gyeongsang National University (inkiski@gsnu.ac.kr)