한국학교수학회논문집 제 9 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 9, Number 2, 121-139, June 2006

다항식 관점에 의한 이차함수의 성질 탐구와 지도방안 탐색

조정수[1)]

본 논문은 현행 중등수학과 교육과정에서 제시하고 있는 이차함수 관련 내용이 학생들이 이미 배워서 알고 있는 다항식의 관점이 아니라 새로운 개념인 평행이동과 완전제곱에 의한 꼭지점 형식의 변형으로 지도함으로써 지도내용 사이의 연계성 상실과 학생들의 개념적 이해를 저해하고 있다는 문제점을 인식했다. 이를 해소하기 위하여 본 연구는 다항식 접근을 통한 이차함수의 성질 탐구와 지도방안을 살펴보며 이 접근의 이점을 몇 가지 구체적인 예를 사용하여 논의하고자 한다.

주요용어: 다항식, 이차함수, 그래핑 계산기

Ⅰ. 서론

현형 중학교 [9-가]의 “이차함수”와 고등학교 [10-나]의 “이차함수의 활용”에서 $y=ax^2+bx+c$를 지도하기 위해서는 $y=x^2$, $y=ax^2$, $y=ax^2+q$로 진행하여 완전제곱에 의한 꼭지점 형식인 $y=a(x-p)^2+q$로 변형하여 지도하고 있다(강옥기 외, 2002; 신현성 외, 2001; 전평국 외, 2002). 이러한 내용 전개에 따라 지도하기 위해서는 $y=ax^2+q$와 $y=a(x-p)^2+q$의 표현 형식에 따른 평행이동의 개념을 반드시 알아야 한다. 이런 내용 전개에 따라 지도할 때 반드시 필요한 또 다른 개념으로 완전제곱이 있는데 $y=ax^2+bx+c$의 중요한 성질 중의 하나인 꼭지점을 찾기 위해서는 완전제곱에 의해 $y=a(x-p)^2+q$의 꼭지점 형식으로 변형하여 그래프 개형을 그리도록 하고 있다. 따라서 평행이동과 완전제곱의 두 개념을 이해하지 않고서는 이차함수의 일반형 $y=ax^2+bx+c$에 대한 개념적 접근이 사실상 불가능하게 교과서에 전개되어 있다. 또한 이러한 내용 전개와 더불어 평행이동과 완전제곱의 수학적 개념들이 이차함수의 중요한 성질들을(예: 대칭적 성질, 꼭지점 및 그 부호의 변화, a의 절대값에 따른 그래프 폭의 변화 등) 탐구하는데 큰 도움이 되지 못한 채 단지 그래프의 개형을 그리는데 사용되는 것으로 지도되고 있는 실정이다.

1) 영남대학교 (chocs@yu.ac.kr)

그렇다면 이차함수의 일반형 $y=ax^2+bx+c$를 평행이동과 완전제곱을 사용하지 않으며 이차함수가 가진 성질을 충분히 활용할 수 있는 지도방법은 없을까? 즉 평행이동과 완전제곱을 사용하지 않고서도 꼭지점의 좌표와 대칭축을 지도할 수 있을까? 그리고 이렇게 지도했을 때 기존의 지도방법과의 차이는 무엇일까? 이 두 의문이 본 논문의 연구를 시작하게 된 동기이며 그 해답을 이차함수의 다항식적 접근에서 찾을 수 있었다. 본 논문에서 사용하고 있는 다항식적 접근이란 이차함수의 일반형 $y=ax^2+bx+c$를 하나의 함수식으로 보지 않고 각각의 단항식인 ax^2, bx, c의 합으로 본다는 것이다. 이렇게 함으로써 이차함수는 일차함수 $y=bx+c$의 "직선 성질"과 $y=ax^2$의 "대칭적 성질"을 가지게 됨을 알 수 있다. 이들 성질은 뒤에서 보자 자세하게 논의될 것이다.

이차함수의 교수-학습과 관련된 선행연구를 분석해 본 결과 학술지에 실린 연구논문으로는 일차다항식과 이차다항식의 관점에 따른 일차함수와 이차함수의 이해(박제남, 양희정, 1999), 이차함수의 그래프 지도를 위한 CAI 프로그램이나 컴퓨터 보조프로그램의 개발(김민경, 1998; 김승동, 김현종, 1999; 장세민, 1998), 이차함수의 효율적인 지도방안(박순길, 서현주, 1999) 등으로 한정되어 있었다. 한편 교육대학원 석사학위 논문연구로 오히려 이차함수에 대한 다양한 접근이 이루어지고 있었는데 그 대표적인 연구를 보면 그래픽 계산기를 이용한 함수 및 이차함수의 지도(김미선, 2001; 김은주, 2004; 노경희, 1997; 유은미, 2004; 이은녕, 2003; 하양희, 2000; 최종철, 2004;), 이차함수의 그래프와 관련된 오류분석(김해성, 2004; 성종기, 2000), Excel이나 GSP를 이용한 이차함수 지도(강현구, 2001; 이경도, 2003; 조윤동, 1998) 등이 있다. 하지만 이들 선행연구들은 기존의 교육과정에 제시되어 있는 이차함수 관련 내용의 효율적인 교수-학습 측면에서 이루어진 것으로 이차함수에 대한 다른 접근 방법에 대한 내용 전개의 변화나 교수-학습적 이점이나 방법에 대한 연구는 이루어지지 않았다.

따라서 본 논문에서는 완전제곱에 의한 꼭지점 형식으로의 변형에 의한 이차함수의 일반형 지도와는 달리 다항식 관점에서 이차함수가 지닌 일차함수의 "직선 성질"과 "대칭적 성질"을 활용하여 이차함수 지도에 새로운 접근방법을 고찰하고자 한다. 이를 통하여 이차함수와 관련된 성질을 탐구하고 이에 따른 지도방안에 대한 시사점을 찾고자 한다.

Ⅱ. 이차함수와 관련된 내용체계

아래 표는 제 7차 수학과 교육과정의 이차함수와 관련된 부분이다(교육부, 1998). 이차함수와 관련된 내용은 도형을 이동시켰을 때 모양의 불변성을 다루는 [5-나]의 합동과 대칭 내용에서부터 관련된다. [7-가]에서는 정비례를 $y=ax\ (a\neq 0)$로, 반비례를 $y=\frac{a}{x}\ (a\neq)$의 관계식으로 나타낸다고 하고 다음과 같이 함수를 정의하고 있다(박두일 외, 2002a; 전평국 외, 2002).

> 두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 정해지면 이에 따라서 y의 값이 한 개만 정해질 때, y를 x의 함수라 하고, 이것을 기호로 $y=f(x)$와 같이 나타낸다. (전평국 외, 2002, p. 133)

[표 1] 이차함수와 관련된 수학과 교육과정 내용 체계

단계 \ 영역	도형	문자와 식	규칙성과 함수
5-나	• 합동과 대칭		
7-가		• 문자의 사용 • 식의 값 • 일차식의 계산 • 일차방정식과 그 해 • 등식의 성질 • 일차방정식의 풀이와 활용	• 정비례, 반비례 • 함수의 개념 • 순서쌍과 좌표 • 함수의 그래프 • 함수와 활용
8-가		• 다항식의 연산	• 일차함수의 뜻 • 일차함수와 일차방정식의 관계 • 그래프를 통한 연립일차방정식의 해의 이해 • 일차함수의 활용
9-가		• 다항식의 곱셈 • 이차방정식과 그 해 • 이차방정식의 풀이와 활용	• 이차함수의 뜻 • 이차함수의 그래프 • 이차함수의 그래프의 성질
10-가		• 다항식의 연산 • 이차방정식의 판별식, 근과 계수와의 관계	
10-나	• 평행이동과 대칭이동		• 함수의 그래프 • 이차함수의 최대, 최소 • 이차함수의 응용

[8-가]에서는 일차함수를 다루고 있는데 그 정의는 다음과 같다.

> 함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 관한 일차식 $y=ax+b$ (a, b는 상수, $a \neq 0$)로 나타나면 이 함수를 x에 관한 일차함수라고 한다. (조태근 외, 2001. p. 121)

일차함수의 그래프에서 $y=ax+b$의 그래프는 일차함수 $y=ax$의 그래프를 b만큼 평행이동한 직선으로 정의하면서 한 도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 평행하게 이동하는 것을 평행이동이라고 정의하고 있다. 또한 $y=ax+b$의 그래프를 x절편과 y절편, 기울기의 개념을 이용하여 그래프를 그리고 그 성질을 탐구하고 있다. 그리고 일차함수와 일차방정식의 관계에 대해서는 다음과 같이 주어진 일차방정식을 y에 관해서 푸는 것으로 정의하고 있다 (강행고 외, 2001; 배종수 외, 2001; 조태근 외, 2001).

> 미지수가 2개인 일차방정식 $ax+by+c=0$ (단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)의 그래프는 일차함수 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 그래프와 같은 직선이다.

지금까지 살펴본 교육과정 해설서와 중학교 교과서에 따르면 일차함수를 일차식과 일차방정식에 기초하여 정의하고 있으며 평행이동의 개념을 사용하여 일차함수의 그래프를 다루고 있다. 여기서 관심의 초점은 바로 평행이동의 개념을 일차함수 $y=ax+b$의 그래프를 그릴 때 사용하고 있다는 점이다. 하지만 이러한 평행이동의 개념은 그래프를 그리고 y절편을 찾는 것 외에는 별다른 의미를 가지고 있지 않다. 그런데' 이 평행이동의 개념이 이차함수를 다루는데 있어서는 아주 중요한 도구적 개념이 되고 있다.

일차함수와 관련된 또 다른 논의는 위의 교육과정 내용 체계표에서 보듯이 식, 일차식, 일차방정식, 다항식의 연산 등의 개념이 일차함수를 다루는데 전혀 연관성이 없는 개념으로 제시되어 있다는 것이다. 그런데 일차함수 $y=ax+b$를 b라는 단항식과 ax라는 단항식의 합으로 이루어진 다항식으로 본다면 이들 개념들은 상호 연결된 개념이 된다. 특히 이러한 단항식의 합으로 이루어진 다항식으로 $y=ax+b$를 볼 때 이 일차함수는 단항식 b와 단항식 ax의 성질을 보존하고 있음을 알 수 있다. 이러한 사실은 이차함수를 단항식의 합으로 이루어진 다항식으로 해석하는데 기초가 되는 것이다. 예를 들어, $y=2x+4$에 관련된 다음 교과서의 예를 살펴보자(배종수, 2001, p. 119).

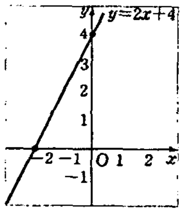
예제3

일차함수 $y=2x+4$의 그래프에서 x절편과 y절편을 구하고, 그 그래프를 그려라.

풀이

$y=2x+4$에서 $x=0$일 때 $y=4$이므로 y절편은 4이다.
$y=0$일 때 $0=2x+4$에서 $x=-2$이므로 x절편은 -2이다.
따라서, 이 함수의 그래프는 두 점 $(-2, 0)$, $(0, 4)$를 지나는 직선이다.

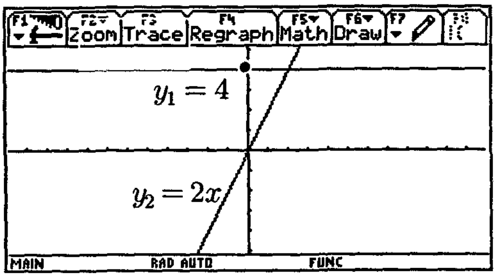
답 x절편 : -2, y절편 : 4



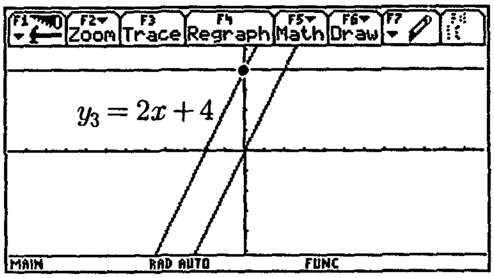
[그림 1] 일차함수의 그래프 그리기

위의 예는 x, y 절편 개념을 이용하여 그래프를 그리고 있는데 기울기와 절편 개념을 이용하여 그릴 수도 있다. 그런데 $y_1=4$와 $y_2=2x$로 이루어진 다항식의 개념에서 접근하더라도 전혀 문제가 없다는 것을 다음 그림2와 3에서 알 수 있다. [그림 2]처럼 $y_1=4$의 그래프를 먼저 그리고 $y_2=2x$를 어떻게 그릴 것인지를 고민해 보자. $y_1=4$는 x축과 평행한 직선으로 y축의 4에 고정되어 있기 때문에 $y_2=2x$라는 직선의 성질이 첨가될 때 움직일 수 있는 가능성은 오른쪽 위에서 아랫방향으로(/)와 왼쪽 위에서 아랫방향으로(\) 두 가지 경우뿐이다. 그런데 $y_2=2x$의 기울기가 양수이므로 오른쪽 위에서 아랫방향(/)이 되어야 하며 기울기가 2이기 때문에 기울기 $2=4/(x$ 축의 값$)=2$가 되어 x축과의 교점은 2가 된다. 그래서 [그림 3]과 같이 그린 다음 y_3 그래프와 y_2 그래프의 관계를 평행이동으로

설명하는 것도 가능성 있는 지도 방법이라고 생각하며 이에 대한 수학교실에서의 지도 가능성과 효과에 대한 연구가 필요하다고 본다.



[그림 2] $y_1 = 4$**와** $y_2 = 2x$**의 그래프**



[그림 3] y_1**과** y_2**의 합에 의한** $y_3 = 2x + 4$**의 그래프**

한편 현행 제 7차 중학교 수학과 교육과정을 보면 [9-가]의 규칙성과 함수 영역의 지도내용으로 이차함수의 뜻, 이차함수의 그래프, 그리고 이차함수의 그래프의 성질을 다루고 있다(교육부, 1998). 이차함수는 일차함수와 마찬가지 방식으로 이차식을 이용하여 다음과 같이 정의되고 있다.

> 일반적으로, 수의 집합 X, Y를 각각 정의역과 공역으로 하는 함수 y가 x에 관한 이차식 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, a, b, c는 실수)로 나타내어질 때, 이 함수를 x에 관한 **이차함수**라고 한다. 또, 정의역과 공역이 실수 전체의 집합일 때에는 간단히 $y = ax^2 + bx + c$를 **이차함수**라고 한다.(강옥기 외, 2002, p. 111)

이차함수의 이 정의에서도 이차식의 개념에 바탕을 두고 있지만 이차식과 이차함수에 대한 구체적인 관련성은 없는 것으로 보이며 이것은 아래에서 논의하고 있는 이차함수의 성질 탐구에서도 마찬가지였다.

이차함수의 그래프를 지도하는 과정은 $y = ax^2$의 그래프를 지도하고 이로부터 포물선, 축, 꼭지점을 정의하고 다음과 사실을 학생들이 인지하도록 하고 있다.

① 원점을 꼭지점으로 하고, y축을 축으로 하는 포물선이다.
② $a > 0$이면 아래로 볼록하고, $a < 0$이면 위로 볼록하다.
③ a의 절대값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.
④ $y = -ax^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.(강옥기 외, 2002; 전평국 외, 2002)

이런 성질과 함께 $y = ax^2 + q$, $y = a(x-p)^2$, $y = a(x-p)^2 + q$ 형태의 이차함수는 x축이나 y축, 또는 x와 y축으로의 평행이동을 이용하여 지도하고 있으며 각각의 형태에 대한 꼭지점의 좌표와 축을 제시하고 있다. 그리고 이차함수의 그래프의 성질에서는 $y = ax^2 + bx + c$의 그래프는 $y = a(x-p)^2 + q$의 꼴로 고쳐서 그리도록 제시하고 있으며

이 둘 사이의 관계를 다음과 같이 제시하고 있다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 ax^2+bx+c를 $a(x-p)^2+q$의 꼴로 변형한 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프와 같다.(전평국 외, 2002, p. 113)

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐서 그린 그래프와 같다.(강옥기 외, 2002, p. 128)

지도상의 유의점: 완전제곱식으로의 변형을 통하여 $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치는 방법을 익숙하게 할 수 있도록 지도한다.(박두일 외, 2002b, p. 188)

위에서 살펴본 교과서의 진술문을 보면 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 대수적 및 해석 기하인 그래프적 동치관계라는 뜻을 담고 있다. 이러한 주장의 배경에는 완전제곱이라는 대수적 알고리즘을 통한 식의 변형은 항상 동치관계를 만들어낸다는 사실을 바탕으로 하고 있는 듯 하다.

그런데 [9-가]의 문자와 식 영역의 지도 내용인 이차방정식과 그 해, 이차방정식의 풀이와 활용에 제시되어 있는 완전제곱의 목적은 완전제곱꼴로의 변형이 평행이동을 위한 것이 아님을 알 수 있다. 즉,

"이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 좌변이 인수분해가 되지 않을 때, 완전제곱을 이용하여 이차방정식의 해를 구하는 방법을 알아보자."(강옥기 외, 2002, p. 90)

또 다른 교과서에서도 이와 마찬가지로

"$ax^2+bx+c=0$에서 좌변을 쉽게 인수분해할 수 없을 때에는 완전제곱을 이용하여 풀 수 있게 한다.(박두일 외, 2002b, p. 142)

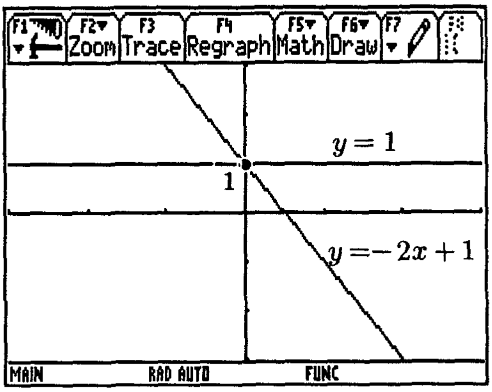
라고 완전제곱의 목적이 해를 구하는 한 가지 방법임을 밝히고 있다. 이처럼 [9-가]의 동일 단계의 교과서에서 완전제곱꼴이라는 같은 개념을 이차방정식 단원에서는 해를 구하는 방법으로, 이차함수 단원에서는 평행이동으로 서로 다르게 해석되고 있으며 이로 인하여 학생들은 완전제곱의 용도에 대한 오개념을 가질 수 있다고 보아진다.

지금까지 살펴본 이차함수의 지도와 관련된 교육과정 내용체계를 보면 일차함수와 이차함수를 단항식의 합으로 이루어진 다항식 관점에서가 아니라 $y=bx+c$와 $y=ax^2+bx+c$를 하나의 식으로 지도하고 있음으로 해서 이들 함수의 성질을 충분히 탐구, 발견하지 못하고 있는 실정이라고 본다. 따라서 이러한 분석에 기초하여 본 연구는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$를 완전제곱꼴의 변형과 평행이동의 개념이 아닌 단항식의 합으로 이루어진 다항식이란 측면에서 살펴보고, 이를 통하여 이차함수의 성질 탐구와 그 지도에 대한 시사점을 제시하는데 그 목적이 있다.

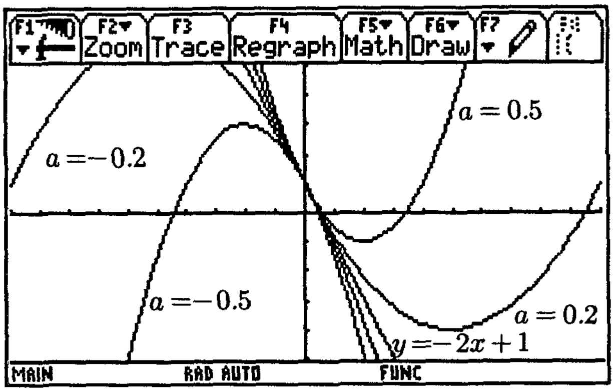
Ⅲ. 이차함수의 일차함수의 "직선 성질"과 "대칭적 성질"

1. 이차함수의 일차함수의 "직선 성질"

이차함수는 완전제곱에 의한 꼭지점 형식인 $y=a(x-p)^2+q$로 표현된 경우는 꼭지점과 y절편을 쉽게 구할 수 있지만 이차함수의 일반형인 $y=ax^2+bx+c$가 가지는 일차함수의 "직선 성질"과 "대칭적 성질"을 파악하기는 더 어렵다. 이차함수를 교과서의 정의에 따라 이차식의 관점에서 보고 이를 단항식의 합인 다항식으로 보면 당연히 일차함수인 $y=bx+c$의 성질을 가지고 있음을 알 수 있다. 그리고 이 일차함수는 앞에서 논의했듯이 x축에 평행한 $y=c$라는 직선에 기초하고 있음을 또한 알 수 있다. 예를 들어, $y=f(x)=ax^2-2x+1$의 함수를 입력하고 a 값의 변화를 살펴보면 앞의 [그림 2]와 [그림 3]에서 논의했던 것과 마찬가지로 이 함수의 그래프는 $y_1=1$이므로 항상 y축의 1을 지나고, $y_2=-2x+1$이므로 [그림 4]와 같이 된다. 그런데 a의 값을 작게 조절하면 $y_2=-2x+1$인 직선이 왼쪽 아랫방향이나 오른쪽 윗방향으로 휘는 것을 볼 수 있다. 이 사실은 이차함수가 일차함수의 성질을 가지고 있기 때문이며 이 일차함수의 성질에 $y=ax^2$의 성질이 더해짐으로 해서 $y=f(x)=ax^2-2x+1$인 이차함수가 만들어지는 것을 말해준다. 이 사실은 뒤에서 논의하게 되는 $y=ax^2+bx+c$의 부호를 결정할 때 b와 c의 부호를 쉽게 결정할 수 있게 해 준다.



[그림 4] $y=-2x+1$의 그래프



[그림 5] $y=ax^2-2x+1$의 그래프

위의 [그림 4]와 [그림 5]에서 보면 지금까지는 일차함수와 이차함수에서 상수항은 y 절편을 나타내는 일정하게 고정된 숫자로 취급함으로써 이 상수항이 다른 항들에게 어떤 영향을 미치는지 지도하지 않고 있다. 하지만 일차함수와 이차함수를 다항식의 관점에서 보면 이 상수항은 하나의 함수이며 다른 항들이 어떻게 첨가되더라도 이 상수항과 반드시 접하게 된다는 사실을 발견할 수 있다. 이것은 함수가 어떠한 고차함수일지라도 성립하는 성질이기

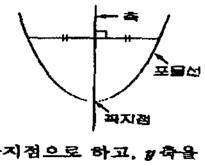
도 한 것으로 이차함수뿐만 아니라 모든 고차함수는 반드시 일차함수가 지니는 "직선 성질"을 가지고 있다.

2. 이차함수의 "대칭적 성질"

중학교 [9-가]에서 제시하고 있는 이차함수의 중요한 성질은 일반적으로 다음과 같다.

이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 같은 모양의 곡선을 포물선이라고 한다.

포물선은 선대칭도형으로 그 대칭축을 포물선의 축이라 하고, 포물선과 축과의 교점을 포물선의 꼭지점이라고 한다.



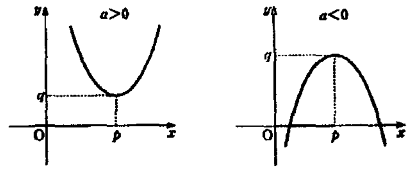
이를테면, $y=ax^2$의 그래프는 원점을 꼭지점으로 하고, y축을 축으로 하는 포물선이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이차함수 $y=ax^2$ $(a\neq 0)$의 그래프
1. 원점을 꼭지점으로 하고, y축을 축으로 하는 포물선이다.
2. $a>0$이면 아래로 볼록하고, $a<0$이면 위로 볼록하다.
3. a의 절대값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.
4. $y=-ax^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

(강옥기 외, 2002, p. 117)

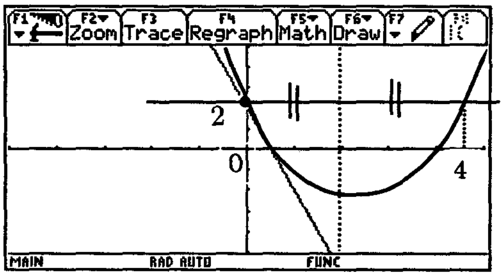
$y=a(x-p)^2+q$의 그래프
1. $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
2. 꼭지점의 좌표는 $(p,\ q)$이고, 꼭지점을 지나 y축에 평행인 직선 $x=p$를 축으로 하는 포물선이다.



(전평국 외, 2002, p. 110)

위의 교과서 지문에서도 볼 수 있듯이 이차함수에서 중요한 성질로는 $y=ax^2$의 경우 y축을 대칭축으로 하는 선대칭 도형 (또는 $y=a(x-p)^2+q$의 경우 y축에 평행인 직선 $x=p$를 축으로 하는 도형)이란 점이다. 그런데 일반적으로 중학교와 고등학교 교과서의 내용을 살펴보면 이차함수의 "대칭적 성질"은 간단히 이렇게 언급만 하고 이차함수의 성질 탐구에 적극적으로 활용하지 못하고 있는 실정이다. 이차함수의 일차함수의 "직선 성질"과 "대칭적 성질"을 활용하여 완전제곱에 의한 꼭지점 형식인 $y=a(x-p)^2+q$로 변형하지 않은 채 $y=ax^2+bx+c$의 성질을 탐구할 수 있는 가능성을 알아보고자 한다.

이차함수의 "대칭적 성질"은 위의 교과서 그림에서도 볼 수 있듯이 $x=p$의 대칭축은 x축과 평행한 직선과 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표의 절반과 같은데 이를 이용하여 꼭지점의 좌표를 쉽게 구할 수 있다. 예를 들어, 이차함수 $y=x^2-4x+2$에서 일차함수 $y_1=-4x+2$를 앞에서 논의했던 것처럼 그래프로 나타내면 [그림 6]과 같고 $y_2=x^2$ ($y=ax^2$꼴에서 a의 부호가 양수인 경우)이므로 결국 이 이차함수는 꼭지점과 x축과의 교점을 정확히는 알 수 없지만 $y=2$를 지나면서 아래로 볼록한 모양을 할 것이라고 짐작할 수 있다. 이제 정확한 꼭지점의 좌표와 x축과 교점을 구한다.



[그림 6] $y=x^2-4x+2$의 꼭지점 좌표 구하기

앞에서 살펴본 것과 같이 이 이차함수는 일차함수 $y=-4x+2$의 성질을 가지기 때문에 항상 y축의 2, 즉 $y=2$를 지난다. 이 점을 지나면서 x축과 평행한 직선을 그어 이 직선과 이차함수의 그래프가 만나는 x 좌표를 구한다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$2=x^2-4x+2$$
$$x^2-4x=x(x-4)=0$$
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 x축과 평행한 직선과 이 이차함수가 만나는 점은 [그림 6]과 같이 $x=0$과 $x=4$이며 이차함수의 "대칭적 성질"에 따르면 꼭지점의 x 좌표는 $\frac{0+4}{2}=2$가 된다. 이 $x=2$를 원래 이차함수에 대입하면 $y=2^2-4(2)+2=2$가 되어 꼭지점의 좌표는 $(2, 2)$가 된다. 꼭지점을 구한 다음 학생들에게 이차함수를 꼭지점 형식인 $y=(x-2)^2+2$로 표현하도록 지도할 수도 있다. 결국 이 예에서 보듯이 이차함수의 일차함수의 "직선 성질"과 "대칭적 성질"을 이용하면 완전제곱꼴로의 변형을 하지 않고서도 이차함수의 일반형에 대한 성질 탐구가 가능하게 된다.

이 방법에 대한 수학적 설명은 다음과 같다. 우선 $y=ax^2+bx+c$의 우변에 있는 두 개 항을 인수분해를 하면

$$y=x(ax+b)+c$$

가 된다. 그래서 $x=0$ 또는 $ax+b=0$ 일 때 $y=c$인데 다시 말해서 $x=0$ 또는 $x=\frac{-b}{a}$일 때 $y=c$가 된다. 포물선 위에 있는 이들 두 점을 좌표로 나타내면 다음과 같다.

$$(0, c) \text{ 와 } (\frac{-b}{a}, c)$$

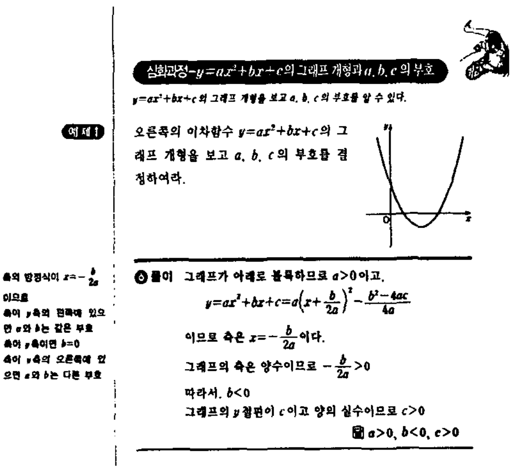
이차함수의 대칭적 성질을 이용하면 꼭지점의 x축 좌표는 이 두 점의 중점이므로 $\frac{-b}{2a}$이다. 또한 이 점을 $y=ax^2+bx+c$에 대입하면 이차함수의 꼭지점의 좌표 $(\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$를 구할 수 있다.

Ⅳ. 이차함수의 일차함수의 "직선 성질"과 "대칭적 성질"의 적용 예

지금까지 논의했던 이차함수의 일차함수의 "직선 성질"과 "대칭적 성질"을 적용하면 현행 중학교와 고등학교 수학과 교육과정에서 다루고 있는 여러 다항함수뿐만 아니라 그 외의 고차함수의 성질에 대한 보다 폭넓은 이해가 가능하다고 본다. 다음은 이러한 몇 가지 가능성을 예를 통해서 살펴본 것이다.

1. 이차함수의 일차함수의 "직선 성질"을 이용하여 $y=ax^2+bx+c$에서 a, b, c의 부호를 결정하기 위하여 완전제곱을 이용한 꼭지점 형식 $y=a(x-p)^2+q$로 변형할 필요가 없다.

현행 중학교 [9-가]의 모든 교과서에서는 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 보고 a, b, c의 부호를 구하는 내용을 심화과정으로 다루고 있다. 그 이유는 [그림 7]과 같이 꼭지점의 x좌표인 $-\frac{b}{2a}$를 알고 그래프에서 꼭지점의 위치가 원점의 오른쪽인지 왼쪽인지에 따라 부호를 정한 다음 그래프 개형에서 구한 a의 부호를 적용해야 하는 여러 단계를 거치기 때문이다.


심화과정-$y=ax^2+bx+c$의 그래프 개형과 a, b, c의 부호

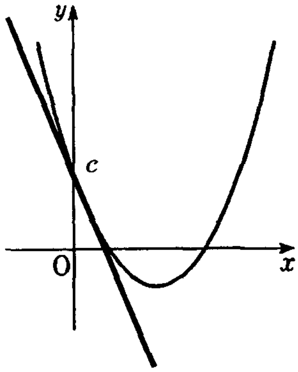
$y=ax^2+bx+c$의 그래프 개형을 보고 a, b, c의 부호를 알 수 있다.

예제 1 오른쪽의 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프 개형을 보고 a, b, c의 부호를 결정하여라.

축의 방정식이 $x=-\frac{b}{2a}$이므로
축이 y축의 왼쪽에 있으면 a와 b는 같은 부호
축이 y축이면 $b=0$
축이 y축의 오른쪽에 있으면 a와 b는 다른 부호

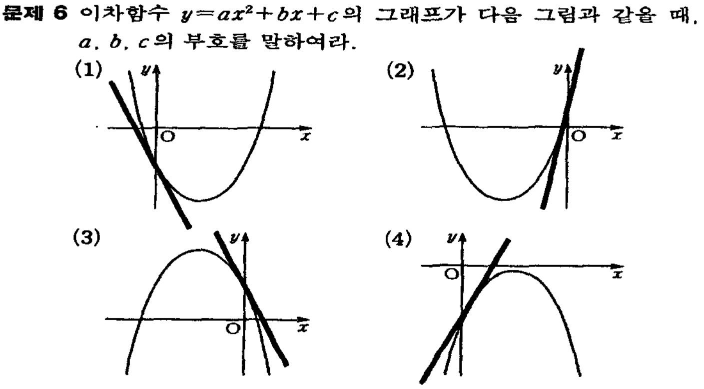
풀이 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$이고,
$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$
이므로 축은 $x=-\frac{b}{2a}$이다.
그래프의 축은 양수이므로 $-\frac{b}{2a}>0$
따라서, $b<0$
그래프의 y절편이 c이고 양의 실수이므로 $c>0$
답 $a>0$, $b<0$, $c>0$

[그림 7] $y=ax^2+bx+c$의 심화과정의 예(전평국 외, 2002, p. 118)



[그림 8] $bx+c$의 직선을 그린 경우

그런데 이 문제에 지금까지 논의했던 이차함수의 일차함수의 "직선 성질"을 적용하면 단지 $y=c$에서 이 그래프를 따라 직선 $y=bx+c$만 그려주면 b의 부호는 일차함수에서 배운 내용으로 충분히 해결할 수 있게 된다. 위의 예제에 이 방법을 적용하면 $y=c$를 지나면서 이 포물선을 끊지 않고 포함하도록 그려야 하므로 [그림 8]과 같이 그려진다. 따라서 b의 부호는 음수($b<0$)가 됨을 눈으로 쉽게 확인 할 수 있으며 더 이상 이런 유형의 문제는 심화과정의 내용으로 다룰 필요가 없어져 학습부진이나 오류를 크게 줄일 수 있을 것으로 본다. 이와 비슷한 [그림 9]의 교과서 예에서도 이 방법을 적용하여 $y=c$에 대해 직선만 그려주면 b의 부호를 쉽게 구할 수 있다.



[그림 9] b의 부호를 결정하는 교과서 예제(강옥기 외, 2002, p. 137)

2. 이차함수의 "대칭적 성질"을 이용하여 이차함수의 꼭지점의 x, y 좌표를 구할 수 있다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 꼭지점의 x좌표가 $x=\dfrac{-b}{2a}$인 포물선이며 [9-가] 교과서에서는 완전제곱에 의한 꼭지점 형식으로 변형하여 꼭지점의 좌표를 구하도록 지도하고 있다. 그런데 완전제곱에 의해 꼭지점의 x 좌표를 구하는 경우 학생들은 $x=\dfrac{-b}{2a}$의 의미를 개념적으로 이해하지 못한 채 단지 공식으로만 기억하는 경향이 많다. 하지만 이차함수의 "대칭적 성질"을 이용하게 되면 마찬가지로 꼭지점의 x, y 좌표를 구할 수 있으며 또한 그 의미를 보다 개념적으로 이해 가능하다. 일반적으로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 해는 [9-가]의 이차방정식 활용에서 다루는 근의 공식을 이용하여 구하고 있는데 잘 알려진 바와 같이 그 두 해는 다음과 같다.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이제 이 두 해를 각각 적어보면 $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$가 된다. 따라서 이차함수의 "대칭적 성질"을 적용하면 꼭지점의 x 좌표는 이들 두 x 좌표의 중점에 위치하므로

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2} = \frac{-b}{2a}$$

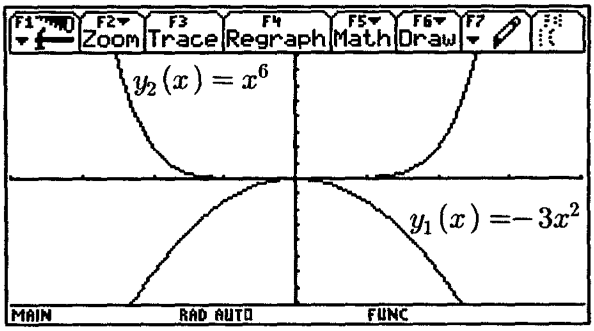
가 되어 꼭지점의 x 좌표를 구하게 된다. 이 꼭지점의 x 좌표를 $y = ax^2+bx+c$에 대입하여 풀면 꼭지점의 y 좌표도 구할 수 있으므로 이차함수의 "대칭적 성질"을 사용하여 꼭지점의 좌표를 구할 수 있다. 이를 통하여 학생들은 이차함수의 꼭지점의 x 좌표가 왜 $x = \frac{-b}{2a}$가 되는지를 개념적으로 충분히 이해할 수 있을 것이다. 이차함수의 "대칭적 성질"을 이용하면 완전제곱에 의한 꼭지점 형식으로의 변형에서는 이해할 수 없었던 꼭지점의 x 좌표에 대한 이해를 할 수 있게 되는 이점이 있다.

3. 이차함수의 다항식 접근은 다항함수에 대한 이해를 깊이 있게 한다.

이차함수를 앞에서 논의했던 다항식 접근으로 다루게 되면 다항함수에 대한 이해를 깊이 있게 하게 되는 이점이 있다. 예를 들어, $f(x) = x^6 - 3x^2$이란 함수의 성질을 탐구한다고 할 때 이 함수를 다항식으로 보지 않고 하나의 함수로 취급하는 현행 교육과정 범위 내에서 할 수 있는 수학적 활동으로는 인수분해를 통한 해 구하기와 그래프 개형을 지필로 그리기 위한 일계 또는 이계도함수 구하기 등이 있다. 즉 현행 교육과정의 초점은 함수에 대한 이해를 강조하기 보다는 함수의 개형을 그리는데 더 초점을 두고 있다.

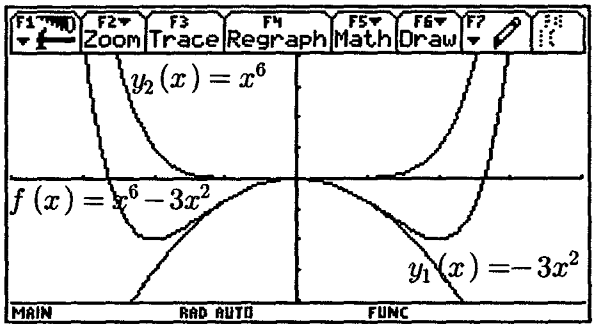
하지만 이 함수를 다항식의 관점에서 접근하면 이 함수에 포함되어 있는 함수들 사이의 관계성과 수학적 개념을 탐구할 수 있는 기회를 얻을 수 있게 된다. 즉 다항함수를 여러 단항식 그래프의 합으로 간주하는 것으로 이런 방식은 학생들로 하여금 다항함수의 그래프를 그리는 능력을 향상시키고자 하는 목적이 아니라 여러 다항함수와 그 그래프의 행동에 대한 질적 이해를 증대시키는데 목적이 있는 것이다(Hirsch, 1997).

그래핑 계산기를 사용하여 주어진 함수를 두 개의 단항식 $y_1(x) = -3x^2$과 $y_2(x) = x^6$으로 구분하여 그래프를 그려보면 다음 [그림 10]와 같다.



[그림 10] $y_1(x) =-3x^2$과 $y_2(x) = x^6$의 그래프를 동시에 그린 그림

그런데 주어진 함수 $f(x) = x^6 - 3x^2$는 이들 두 함수의 합이므로 $y_2(x) = x^6$의 성질을 가지게 되어 이차함수와 마찬가지로 아래로 볼록하게 될 것이다. 또한 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$가 $y = bx + c$에 접하듯이 다항함수는 항상 최고차 아래의 차수를 갖는 다항식에 접하기 때문에 주어진 함수는 $y_1(x) =-3x^2 + 0$에 접하는데 0에서 접하게 됨을 짐작할 수 있다. 마지막으로 -1과 1 사이에서는 $|x^6| < |-3x^2|$ 이므로 주어진 함수는 $y_1(x) =-3x^2$에 접근할 것으로 짐작할 수 있다. 위의 경우들을 모두 종합하여 보면 주어진 함수 $f(x) = x^6 - 3x^2$는 -1과 1 사이에서는 $y_1(x) =-3x^2$와 유사하게 움직일 것이며 그 외의 범위에서는 $y_2(x) = x^6$와 유사하게 움직일 것이라는 결론을 내릴 수 있다. 이제 이들 세 그래프를 함께 그려보면 다음 [그림 11]과 같이 지금까지의 추측이 옳음을 알 수 있으며 이를 통하여 학생들은 함수의 개념과 이들 함수들 사이의 관계성까지도 학습할 수 있게 된다.

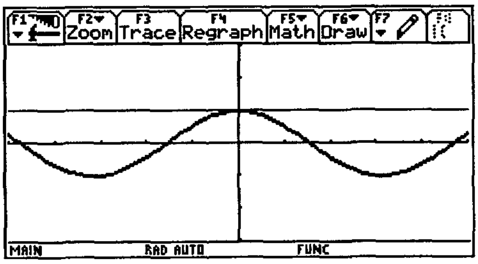


[그림 11] 다항식 접근에 의한 $f(x) = x^6 - 3x^2$의 그래프 탐구

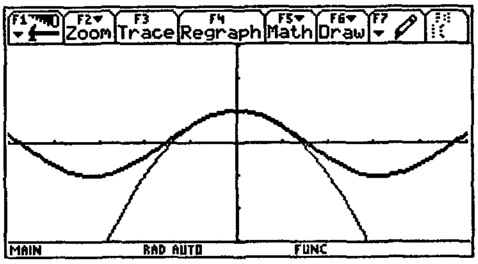
4. 고등 미적분학에서 다루는 테일러급수와 메크로린급수 전개의 기초를 이해할 수 있다.

이차함수를 본 연구에서 제시하고 있는 다항식 접근을 취하게 되면 고등 미적분학에서 다루고 있는 테일러(Taylor) 급수와 메크로린(Maclaurin) 급수의 기초를 중학교의 함수 내용

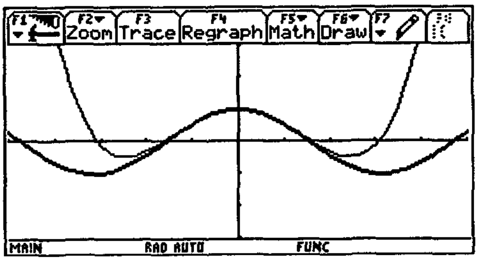
으로부터 다룰 수 있게 된다는 이점이 있다. 즉, 근사시키려고 하는 다항식의 항과 차수를 늘리면 이 다항식을 비다항함수(예: 삼각함수, 로그함수, 유리함수 등)에 상당히 근사시킬 수 있다. 비다항함수를 다항함수로 근사시킴으로 해서 항별 미분과 적분이 용이하게 되어 비다항함수의 성질을 쉽게 탐구할 수 있으며 기존의 함수로는 설명이나 예측할 수 없는 어떤 물리적 현상을 기존의 함수의 급수로 표현함으로써 이 현상을 수학적 모델링 할 수 있는 유용한 도구가 테일러급수와 메크로린급수 전개이다. 예를 들어, 비다항함수 $y=\cos x$를 다항식의 항을 증가시켜 근사시키도록 해 보자. 이 다항식을 $P(x)$라 하고 항을 하나씩 증가시켜 6개의 항을 차례로 나타내고 이를 그래핑 계산기를 사용하여 각각 나타내면 다음 [그림 12]와 같다.



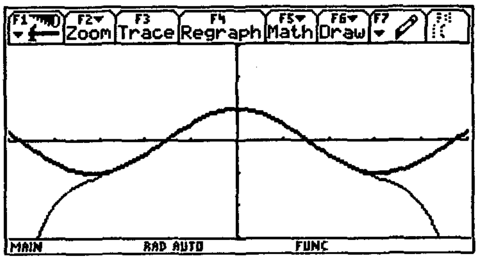
$P_1(x)=1$



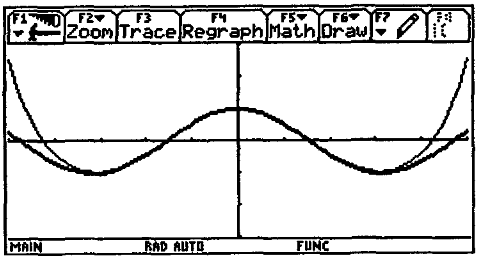
$P_2(x)=1-\frac{x^2}{2!}$



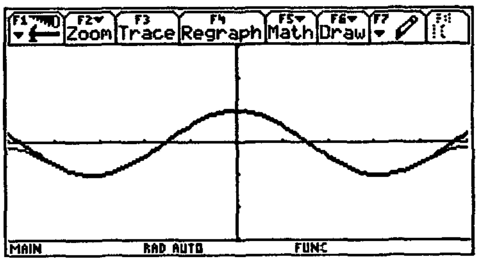
$P_3(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$



$P_4(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$



$P_5(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}$



$P_6(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}$

[그림 12] $y=\cos x$를 6개의 다항식으로 근사시킨 그림

위의 [그림 12]를 살펴보면 다항식의 항을 무한히 계속 증가시키면 모든 실수 구간에서 $y = \cos x$에 아주 근사하는 다항식을 만들어 낼 수 있다. 특히 수렴반경인 정의구역을 한정시켰을 경우 6개의 항을 사용해서 오차한계를 상당히 줄여 근사시킬 수 있음을 볼 수 있다. 또한 앞에서 논의했던 이차함수와 다른 함수의 예에서도 보았듯이 새로운 항이 하나씩 첨가되어 만들어지는 새로운 다항식의 그래프는 그 항이 첨가되지 이전까지의 항들로 만들어진 그래프가 가지는 성질을 그대로 보존하고 그 위에 새로 첨가되는 항의 성질을 더하게 됨을 알 수 있다. 예를 들어, $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$의 그래프는 $P_1(x) = 1$의 그래프가 1을 지나는 성질을 보존하면서 위로 볼록한 포물선 모양을 하게 되며, $P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$의 그래프는 $P_1(x)$의 1을 지나는 성질과 $P_2(x)$의 위로 볼록한 포물선 모양을 보존하면서 x^4의 그래프를 그리게 된다. 이와 같이 다항식 접근에 의한 이차함수의 성질 탐구방법은 비다항함수의 성질 탐구에서도 그대로 적용되는 이점을 가지고 있다.

V. 결 론

본 논문은 현행 중등수학과 교육과정에서 제시하고 있는 이차함수 관련 내용이 학생들이 이미 배워서 알고 있는 다항식의 관점이 아니라 새로운 개념인 평행이동과 완전제곱에 의한 꼭지점 형식의 변형으로 지도함으로써 지도내용 사이의 연계성 상실과 학생들의 개념적 이해를 저해하고 있다는 문제점을 파악했다. 따라서 이를 해소하기 위하여 다항식 접근을 통한 이차함수의 지도방안을 살펴보았으며 그 이점을 몇 가지 구체적인 예를 사용하여 논의해 보았다.

교육과정의 기존 내용구성과 체계를 변화시키는 것은 수학교육의 철학변화, 사회적 요구, 그리고 학생들의 학습에 대한 연구에 근거한다. 특히 수학교육의 변화에 대한 사회적 요구 중에서 현재 공학의 영향과 그 요구는 실로 크다고 할 수 있다. NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)의 “학교수학의 원리와 규준”에 따르면 그래핑 계산기와 같은 공학용 도구들의 출현으로 인하여 학교수학의 지도내용과 지도계열 및 지도방법에 대한 변화가 가능하다고 한다(NCTM, 2000). 이 원리에 따르면 수학교실에서 학습목표를 효율적으로 달성하기 위하여 적합한 공학용 도구를 사용하는 것은 학생들이 수학을 보다 심화된 수준으로 학습할 수 있도록 해 준다. 또한 지필환경에서는 힘들었던 다양한 예를 쉽게 만들고 조사할 수 있으며 손쉽게 추측을 제기하고 제기된 추측의 진위를 탐구할 수 있으며 이를 통하여 학생들의 수학내용에 대한 개념적 이해의 향상이 가능해진다. 본 연구에서도 살펴본 바와 같이 다항식 관점에서의 이차함수 성질탐구는 현행 교육과정의 지도계열 및 지도방법에 대한 변화와 더불어 대안을 제시하고 있으며 또한 이차함수의 성질탐구를 확장한 고차다항식과 테일러급수 전개의 방법에 대해서는 컴퓨터 대수시스템인 CAS(Computer Algebra Systems) 기능을 갖춘 그래핑 계산기와 같은 공학의 활용이 필수적이라 본다. CAS형 그래핑 계산기는 지필환경에서의 복잡한 수치계산과 대수식의 조작을 쉽게 대신해줌으로써 학교수학의 지도방법과 학생의 수학학습 방법의 변화를 이끌고 있다(Waits & Demana, 2000). 그래핑 계산기를 활용하여 이차함수를 지도하는 경우 사실 이차함수의 일반형

$y=x^2-4x+2$를 바로 입력하지 완전제곱에 의한 꼭지점 형식인 $y=(x-2)^2-2$로 입력할 필요가 없다. 따라서 CAS형 그래핑 계산기가 수학교실에 도입될 경우 현재 수학과 교육과정의 지도내용과 지도계열 및 방법에 대한 논의가 필요하다고 본다.

본 연구에서 논의된 바와 같이 이차함수뿐만 아니라 고차함수를 하나의 함수로서가 아니라 다항식의 관점에서 볼 때 함수 자체가 가지고 있는 다양한 성질을 발견할 수 있었고 이러한 발견은 함수에 대한 학생들의 개념적 이해를 촉진할 수 있다고 보아진다. 개념적 지식이란 관계성이 풍부한 지식이며 낱개의 수학적 지식이나 사실들 사이의 관계성을 형성할 때 개념적 지식은 발달하게 된다(Hiebert & Lefevre, 1986). 하지만 본 연구에서 논의했던 이차함수의 개념적 지식이 반드시 절차적 지식을 대신할 수 있다는 것은 아니다. Hiebert와 Lefevre의 주장처럼 이차함수가 가지는 일차함수의 "직선 성질"과 "대칭적 성질"의 활용에 따른 개념적 지식의 형성은 이차함수와 관련된 절차적 지식의 학습을 촉진할 것이며, 절차적 지식의 실행을 보다 의미 있고 정확하게 하도록 할 것이며, 그리고 이차함수와 관련된 절차적 지식의 전이와 절차의 수를 줄일 수 있을 것으로 기대된다. 또한 이와 관련하여 학교수학에서 가르치는 함수와 관련된 수많은 수학적 절차를 지도하기 전에 이와 관련된 수학적 개념들을 어떻게 지도할 것이며 어떻게 지도하는 것이 효율적이며 그 지도계열은 어떻게 변화 가능한지에 대한 논의(Heid, 2003)가 앞으로 필요할 것으로 본다. 따라서 본 연구에서 제시하고 있는 다항식의 관점에서 살펴본 이차함수의 성질 탐구와 그 지도방법에 대한 가능성은 현장 수학교실에서의 다양한 수업적용의 결과에 기초하여 앞으로 더욱 논의할 주제라고 본다.

참고문헌

강옥기, 정순영, 이환철 (2002). 중학교 수학 9-가. 서울: (주) 두산.

강행고, 이화영, 박진석, 이용완, 한경연, 이준홍 외 (2001). 중학교 수학 8-가. 서울: (주) 중앙교육진흥연구소.

강현구 (2001). GSP를 활용한 함수 지도에 관한 연구: 고등학교 공통수학 이차함수를 중심으로. 충북대학교 교육대학원 석사학위논문.

교육부 (1998). 수학과 교육과정 [별책 8]. 서울: 대한교과서주식회사.

금종해, 이만근, 이미라, 김영주 (2001). 중학교 수학 7-가. 서울: (주) 고려출판.

김미선 (2001). 그래픽 계산기를 이용한 이차함수의 지도에 관한 연구. 강원대학교 교육대학원 석사학위논문.

김민경 (1998). 컴퓨터를 활용한 수학적 교수-학습의 구성주의적 접근: 이차함수와 그래프의 개념 이해를 중심으로. 교육학연구, 제 36권 2호, 183-202.

김승동, 김현종 (1999). 함수의 그래프에 대한 컴퓨터 보조수업 프로그램 개발 및 적용연구: 이차함수의 그래프를 중심으로. 한국학교수학회논문집, 제 2권 1호, 67-77.

김은주 (2004). 그래픽 계산기를 이용한 중학교 함수지도에 관한 연구. 숙명여대 교육대학원 석사학위논문.

김해성 (2004). 이차함수 그래프 과제에서의 오류에 대한 교정방법과 그 효과분석. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

노희경 (1997). 그래픽 계산기를 이용한 수업연구: 중학교 3학년 이차방정식, 이차함수를

중심으로. 고려대학교 교육대학원 석사학위논문.
박두일, 신동선, 강영환, 윤재성, 김인종 (2002a). 중학교 수학 7-가. 서울: (주) 교학사.
박두일, 신동선, 강영환, 윤재성, 김인종 (2002b). 중학교 수학 7-가 교사용 지도서. 서울: (주) 교학사.
박순길, 서현주 (1999). 이차함수의 효율적인 지도방안: 중학교 3학년을 중심으로. 교과교육연구, 제 2권 1호, 105-136.
박제남, 양희정 (1999). 일차함수와 이차함수의 이해. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 제 8권, 287-301.
배종수, 박종률, 윤행원, 유종광, 김문환 외 (2001). 중학교 수학 8-가. 서울: 한성교육연구소.
성종기 (2000). 이차함수의 그래프에 대한 오류분석에 관한 연구: 중학교 3학년 함수단원 중심. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.
신현성, 최용준 (2001). 고등학교 수학 10-나. 서울: (주) 천재교육.
유은미 (2004). 그래픽 계산기를 활용한 실생활 문제풀이 수업이 학습태도에 미치는 영향: 이차함수를 중심으로. 강원대학교 교육대학원 석사학위논문.
이경도 (2003). 이차함수 성질에 관한 오류분석과 Excel을 사용한 교정에 관한 연구: 중학교 3학년을 대상으로. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.
이은녕 (2003). 그래핑 계산기의 활용이 이차함수 표상간의 이해에 미치는 효과. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.
이준열, 장훈, 최부림, 남호영, 이상은 (2003). 중학교 교사용 지도서 8-가. 서울: (주) 도서출판 디딤돌.
장세민 (1998). 중학교 수학과 CAI 프로그램 개발 연구: 이차함수의 그래프를 중심으로. 한국학교수학회논문집, 제 1권 1호, 151-163.
전평국, 신동윤, 방승진, 황현모, 정석규 (2002). 중학교 수학 7-가. 서울: (주) 교학사.
조윤동 (1998). (The) Geometer's Sketchpad(GSP)를 이용한 이차함수의 그래프와 이차곡선의 지도. 서강대학교 교육대학원 석사학위논문.
조태근, 임성모, 정상권, 이재학, 이성재 (2001). 중학교 수학 8-가. 서울: (주) 금성출판사.
최종철 (2004). 그래픽 계산기를 활용한 수업이 문제해결력에 미치는 효과: 고등학교 이차함수단원을 중심으로. 충북대학교 교육대학원 석사학위논문.
하양희 (2000). 그래픽 계산기를 활용한 수업이 중학생들의 이차함수 학습에 미치는 효과. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
Heid, M. K. (2003). Theories for thinking about the use of CAS in teaching and learning mathematics. In J. T. Fey, A. Cuoco, C. Kiern, L. McMullin & R. M. Zbiek (Eds.), Computer algebra systems in secondary school mathematics education (pp. 52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 1-27). Hilsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
Hirsh, C. R. (1995). Curriculum and evaluation standards for school mathematics addenda series, grade 9-12: Algebra in a technological world. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: The author.

Waits, B. K., & Demana, F. (2000). Calculators in mathematics teaching and learning: Past, present, and future. In E. D. Laughbaum (Ed.), Hand-held technology in mathematics and science education: A collection of papers (pp. 2-11). Teachers Teaching with Technology College Short Course Program at the Ohio State University.

A Study about the Properties of Quadratic Functions and Classroom Implications from a Polynomial Perspective

Cho, Cheong-Soo[2]

Abstract

This study identified the problems of teaching quadratic functions using a translation and a vertex form by completing squares of which method make teaching contents not to be interconnected and tend to interfere students' conceptual understanding. This seems to generated from which the current mathematics curriculum is not organized to deliver the related contents of quadratic functions from polynomial expressions students have already known. To resolve it this study investigates the properties of quadratic functions from a polynomial perspective and discusses classroom implications with a couple of concrete applications.

Key Words : Polynomial, Quadratic function, Graphing calculators

2) Yeungnam University (chocs@yu.ac.kr)